УДК 517.946

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А. Д. Баев*, **С. С. Бунеев****

**Воронежский государственный университет*
***Елецкий государственный университет*

Поступила в редакцию 07.11.11 г.

Аннотация. В работе получены априорные оценки решений краевой задачи в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка.
Ключевые слова: априорная оценка, вырождающееся эллиптическое уравнение, весовые пространства С. Л. Соболева.

Abstract. In paper a priori estimates of solutions of boundary-value problem in the band for one degenerate elliptic equation of high order are obtained.
Keywords: a priori estimate, the degenerate elliptical equation, S. L. Sobolev's weight spaces.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для уравнений с вырождением относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [1], [2]. В работе В. П. Глушко [3] были получены априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [4]—[6] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые в полосе задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В настоящей работе получены априорные оценки решений краевых задач в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение третьего порядка по одной из переменных.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассмотрим уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \qquad (1.1)$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + \partial_t^3 v$, $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j \le 2m} a_{\tau j} D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j}$, $a_{\tau j}$ — комплексные числа, $\operatorname{Im} a_{02m} = 0$.

Здесь $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^{\tau} = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}\ldots\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задается условие

$$B(D_x)\, v\big|_{t=0} = \sum_{|\tau| \le m^*} b_\tau D_x^{\tau}\, v\big|_{t=0} = G(x) \qquad (1.2)$$

с комплексными коэффициентами b_τ.

На границе $t = d$ полосы R_d^n заданы условия вида

$$v\big|_{t=d} = \partial_t\, v\big|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1}\, v\big|_{t=d} = 0. \qquad (1.3)$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $\operatorname{Re} L_{2m}(\xi,\eta) \ge c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \ge 2m + m^*$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $B(\xi) \ne 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1.1)—(1.3). Рассмотрим интегральное преобразование, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$. В [3] показано, что для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. В этой работе для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$ ($s \ge 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} =$$

$$= \{\sum_{l=0}^{[\frac{3s}{2m}]} \left\| F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{3}l)} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \}^{\frac{1}{2}},$$

где $\left[\frac{3s}{2m}\right]$ — целая часть числа $\frac{3s}{2m}$.

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} = \{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l\le s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \}^{\frac{1}{2}}.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть $s \ge \max\{2m,\ m^* + \frac{m}{3}\}$ — целое число, $m \ge 3$ — целое число, и выполнены условия 1—3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1.1)—(1.3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} \le c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}} + \|B\,v|_{t=0}\|_{s-m^*-\frac{m}{3}}),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v.

Здесь $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве Соболева—Слободецкого $H_s(R^{n-1})$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.1

Применим к обеим частям уравнения (1.1) и условий (1.2)—(1.3) преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$. Получим следующую задачу, зависящую от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u\left(\xi,t\right) = \\ = L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right) u\left(\xi,t\right) + \partial_t^3 u\left(\xi,t\right) = f\left(\xi,t\right), \tag{2.1}$$

$$\sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau u\left(\xi,t\right)|_{t=0} = g\left(\xi\right), \tag{2.2}$$

$$u\left(\xi,t\right)|_{t=d} = \partial_t u\left(\xi,t\right)|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1} u\left(\xi,t\right)|_{t=d} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$, $f(\xi,t) = F_{x\to\xi}[F(x,t)]$, $g(\xi) = F_{x\to\xi}[G(x)]$.

Аналогично определенным выше пространствам введем пространства $\tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит пространству $\tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ ($s \ge 0$ — целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} =$$

$$= \left\{ \sum_{k+\frac{2m}{3}j\le s} \left\| F_\alpha^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}k} F_\alpha\left[\partial_t^j u\right]\right] \right\|_{L_2(0;d)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Утверждение теоремы 1.1 следует из следующей теоремы:

Теорема 2.1 Пусть $s \ge \max\left\{2m, m^* + \frac{m}{3}\right\}$ — целое число, $m \ge 3$ — целое число. Пусть $f\left(\xi,t\right) \in \tilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ при всех $\xi \in R^{n-1}$ и выполнены условия 1—3. Тогда для любого решения $u\left(\xi,t\right)$ задачи (2.1)—(2.3), принадлежащего при всех $\xi \in R^{n-1}$ пространству $\tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 \le \\ \le c\left(\|f\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{s-m^*-\frac{m}{3}} \left|g\left(\xi\right)\right|^2\right) \tag{2.4}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $\xi \in R^{n-1}$, u, f, g.

Из определения преобразования F_α получим, что для любых $u(t) \in L_2(0;d)$, $w(t) \in L_2(0;d)$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha[u](\eta) \cdot \overline{F_\alpha[w](\eta)} d\eta = 2\pi (u, w). \quad (2.5)$$

Здесь и в дальнейшем через $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в $L_2(0;d)$.

Кроме того, из определения преобразования F_α следует, что если $u(t) \in C^s[0;d]$ и удовлетворяет условиям

$$u(d) = \partial_t u(d) = \ldots = \partial_t^{s-1}(d) = 0, \quad (2.6)$$

то справедливо равенство

$$F_\alpha\left[D_{\alpha,t}^j u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta) \quad (2.7)$$

при всех $j = 0,1,2,\ldots,s$.

Из последнего равенства следует, что если $u(t) \in C^s[0;d]$, $w(t) \in C^s[0;d]$ и эти функции удовлетворяют условиям (2.6), то справедливо равенство

$$\left(D_{\alpha,t}^j u(t), w(t)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^j F_\alpha[u](\eta) \overline{F_\alpha[w](\eta)} d\eta. \quad (2.8)$$

В работе [3] доказаны аналоги неравенства Эрлинга—Ниренберга для весовых производных, которые в нашем случае можно сформулировать следующим образом.

Лемма 2.1. Пусть $u(t) \in \tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ (s-натуральное число). Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $j = 0,1,2,\ldots,s-1$ справедливо неравенство

$$\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 \le \varepsilon^{2(s-j)} \left\|D_{\alpha,t}^s u\right\|^2 + \left(c\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)}\right)\|u\|^2 \quad (2.9)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u.

Здесь и в дальнейшем через $\|\cdot\|$ обозначается норма в пространстве $L_2(0;d)$.

Следствие 2.1. Пусть $u(t) \in \tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $j = 0,1,2,\ldots,2m-1$, $\xi \in R^{n-1}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j} \left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 \le \varepsilon^{2(2m-j)} \left\|D_{\alpha,t}^{2m} u\right\|^2 + \\ &+c\left(\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(2m-j)}\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u, ξ.

Утверждение теоремы 2.1 вытекает из следующей совокупности утверждений. В этих утверждениях константы $c > 0$, $\varepsilon > 0$, во всех оценках не зависят от u, ξ.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия 1, 2; $m \ge 3$. Тогда для любой функции $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{m} \left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j} \left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 \le \\ &\le c\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u(t)\right\|^2 + \right. \\ &\left. +\left(1+|\xi|^2\right)^m \left\{\operatorname{Re} \partial_t^2 u(0) \overline{u(0)} - \frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right\}\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от ξ, u.

Доказательство. Так как пространство $C^{2m}[0;d]$ плотно в пространстве $\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, то неравенство (2.11) достаточно доказать для функций из $C^{2m}[0;d]$. Умножив скалярно в $L_2(0,d)$ обе части уравнения (2.1) на функцию $u(t)$, получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right) u, u\right) + \operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, u\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u, u\right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Используя равенство (2.7) и условие 1, получим оценку

$$\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right) u, u\right) \ge c_1 \sum_{j=0}^{m} \left(1+|\xi|^2\right)^{m-j} \left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|, \quad (2.13)$$

где $c_1 > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $\xi \in R^{n-1}$, u.

С использованием условия (1.3) получим равенство

$$\int_0^d \partial_t^3 u \cdot \bar{u} dt = -\partial_t^2 u(0) \overline{u(0)} + \frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2. \quad (2.14)$$

Применяя (2.13), (2.14) в (2.12) и используя неравенство Коши—Буняковского, получим для любого $\varepsilon > 0$ оценку

$$\begin{aligned} &c_1 \sum_{j=0}^{m} \left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j} \left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2 + \\ &+\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \le \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u(t)\right\|^2 + \varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2 + \\ &+\left(1+|\xi|^2\right)^m \operatorname{Re} \partial_t^2 u(0) \overline{u(0)}. \end{aligned}$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (2.11).

Лемма 2.3. При выполнении условий леммы 2.2 для любой функции $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left\|D_{\alpha,t}^{2m} u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m} u\right\|^2 + \left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right) + \\ &+c(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Умножив скалярно обе части равенства (2.1) на $D_{\alpha,t}^{2m}u$, получим оценку

$$\operatorname{Re} a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right)\le$$
$$\le\left|\left(\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ |\tau|\ge 1}} a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right)\right)\right|+ \qquad (2.16)$$
$$+\left|\left(A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u(t), D_{\alpha,t}^{2m}u\right)\right|.$$

Заметим, что

$$\left|\left(A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u(t), D_{\alpha,t}^{2m}u\right)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u(t)\right\|^2. \qquad (2.17)$$

С помощью неравенства (2.10) и неравенства Коши – Буняковского получим для любого $\varepsilon > 0$ оценку

$$\left|\left(\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ |\tau|\ge 1}} a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right)\right)\right|\le \qquad (2.18)$$
$$\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_1(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Используя (2.17) и (2.18) в правой части (2.16), получим оценку

$$\operatorname{Re} a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right)\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+$$
$$+c_2(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right). \qquad (2.19)$$

Заметим, что

$$-\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right)=\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^m\partial_t u\mid_{t=d}\right|^2+$$
$$+\operatorname{Re}\left(I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u, D_{\alpha,t}^m\partial_t u\right)+$$
$$+\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{2m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}^m\right)u\right)+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m-1} i\alpha(d)D_{\alpha,t}^j\partial_t^2 u\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t u}\mid_{t=d}.$$

Здесь $I_{1,2m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)$ — коммутатор операторов ∂_t и $D_{\alpha,t}^{2m}$, $I_{1,m}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)$ — коммутатор операторов ∂_t и $D_{\alpha,t}^m$.

Из последнего равенства и (2.19) следует оценка

$$\operatorname{Re} a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+$$
$$+c_3(\varepsilon)\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u(t)\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right)+$$
$$+c\Big(\left|\left(I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u, D_{\alpha,t}^m\partial_t u\right)\right|+$$
$$+\left|\left(\partial_t^2 u, I_{2m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u\right)\right|+$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}\left|\alpha(d)D_{\alpha,t}^j\partial_t^2 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t u(d)}\right|+\left|D_{\alpha,t}^m\partial_t u\mid_{t=d}\right|^2\Big). \qquad (2.20)$$

С помощью неравенства Коши—Буняковского и неравенства (2.10), получим

$$\left|\left(\partial_t^2 u, I_{2m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u\right)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right)+c_4(\varepsilon)\left(1+|\varepsilon|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \qquad (2.22)$$

Аналогично получим оценку

$$\left|\left(I_{m,1}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u, D_{\alpha,t}^m\partial_t u\right)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right)+c_5(\varepsilon)\left(1+|\varepsilon|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \qquad (2.23)$$

С помощью известной теоремы «о следах» (см. [3]) получим оценку

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left|\alpha(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^2 u(d)\cdot D_{\alpha,t}^{2m-1-j}\partial_t u(d)\right|+\left|D_{\alpha,t}^m\partial_t u\mid_{t=d}\right|^2\le$$
$$\le c\sum_{j=1}^{2m-1}\left|\partial_t^j u(d)\right|^2\le\varepsilon_1\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u\right|^2dt+c_6(\varepsilon_1)\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|u(t)\right|^2dt\le$$
$$\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_7(\varepsilon)\cdot\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Используя последнее неравенство и неравенства (2.22), (2.23) в правой части неравенства (2.20), получим, выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, оценку (2.15).

Лемма 2.4. При выполнении условий леммы 2.2 для любой функции $u(t)\in\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\le c\left(\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right). \qquad (2.24)$$

Доказательство. Из уравнения (2.1) получим с помощью неравенства (2.10) оценку

$$\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\le\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+$$
$$+\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Применяя в этом неравенстве неравенство (2.15) и выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (2.24).

Лемма 2.5. Пусть выполнены условия леммы 2.2 и m кратно трем. Тогда для любой функции $u(t)\in\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2 \le$$
$$\le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+ \quad (2.25)$$
$$+c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2\right)$$

при любом $\varepsilon>0$.

Доказательство. Умножим скалярно обе части равенства (2.1) на функцию $-D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u$, получим равенство

$$-\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)-$$
$$-\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)= \quad (2.26)$$
$$=-\operatorname{Re}\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right).$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)=\operatorname{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u,D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right)+$$
$$+\operatorname{Re}\left(I_{\frac{m}{3},1}\partial_t^2 u,D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right)+R_1, \quad (2.27)$$

где $I_{\frac{m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)$ — коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}$ и ∂_t,

$$R_1=\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{\frac{m}{3}-1} i\alpha(d)\,D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^3 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}-1-j}\partial_t^2 u(d)}.$$

Таким образом, получим равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)=\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u(d)\right|^2+$$
$$+\operatorname{Re}\left(I_{\frac{m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t^2 u,D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u\right)+R_1. \quad (2.28)$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое в левой части равенства (2.26). Имеем

$$-\operatorname{Re}\left(L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)=$$
$$=-\operatorname{Re}\left(a_{02m}D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)-$$
$$-\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}} a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)=$$
$$=a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+a_{02m}\operatorname{Re}\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)-$$
$$-a_{02m}\operatorname{Re}D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u(d)}+$$
$$+R_2+a_{02m}\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)-$$
$$-\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}} a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right), \quad (2.29)$$

где $I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)$ — коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}$ и ∂_t,

$$R_2=-a_{02m}\sum_{j=0}^{\frac{2m}{3}-1} i\alpha(d)\,D_{\alpha,t}^{2m-j-1}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}+j}\partial_t^2 u(d)}.$$

Применяя (2.28) и (2.29) в равенстве (2.26), получим неравенство

$$a_{02m}\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2\le$$
$$\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+$$
$$+\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\left|a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u,D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)\right|+$$
$$+\left|a_{02m}\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right|+ \quad (2.30)$$
$$+\left|a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u,I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)\right|+$$
$$+\left|a_{02m}\operatorname{Re}D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u(d)}\right|+$$
$$+|R_1|+|R_2|+\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u(d)\right|^2,$$

где R_1 и R_2 определены выше.

Оценим правую часть неравенства (2.30). С помощью неравенства Коши—Буняковского и оценки (2.10), получим неравенства

$$\left|a_{02m}\left(I_{1,\frac{4m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|+\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+ \quad (2.31)$$
$$+c_1(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2,$$

$$\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\left|a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right)\right|\le \tag{2.32}$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2\right)+c_2(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

С помощью теоремы «о следах» получим при $m\ge 3$ оценку

$$\left|a_{02m}D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u(d)}\right|+$$
$$+|R_1|+|R_2|+\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{m}{3}}\partial_t^2 u(d)\right|^2\le \tag{2.33}$$
$$\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_3(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Применяя неравенство (2.31)—(2.33) в правой части неравенства (2.30) и выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим неравенство (2.25).

Лемма 2.6. При выполнении условий леммы 2.5 для любой функции $u(t)\in\tilde H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+$$
$$+c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2\right). \tag{2.34}$$

где $\varepsilon>0$ любое число.

Доказательство. Умножим скалярно обе части равенства (2.1) на функцию $-D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u$, получим

$$-\operatorname{Re}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)-$$
$$-\operatorname{Re}\sum_{\substack{j+|\tau|\le 2m\\ j\ne 2m}}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)- \tag{2.35}$$
$$-\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=$$
$$=-\operatorname{Re}\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right).$$

Интегрируя по частям, получим

$$-\operatorname{Re}a_{02m}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=-\frac{a_{02m}}{2}\left|D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u(d)\right|^2-$$
$$-a_{02m}\alpha(d)\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\frac{m}{3}}iD_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j-1}u(d)}- \tag{2.36}$$
$$-a_{02m}\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u, I_{\frac{5m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u\right),$$

где $I_{\frac{5m}{3},1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)$ — коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}$ и ∂_t.

Аналогично получим равенство

$$-\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)=\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\frac{2m}{3}}i\alpha(d)D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-j}u(d)}+ \tag{2.37}$$
$$+\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t^2 u\right).$$

Применяя (2.36) и (2.37) в равенстве (2.35), получим оценку

$$\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2\le\left|\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right|+$$
$$+\left|\sum_{\substack{j+|\tau|\le 2m\\ j\ne 2m}}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right|+$$
$$+c\left[\sum_{j=1}^{\frac{m}{3}}\left|D_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j-1}u(d)}\right|+\right. \tag{2.38}$$
$$+\left|\left(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u, I_{1,\frac{5m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u\right)\right|+$$
$$+\sum_{j=1}^{\frac{2m}{3}}\left|D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-j}u(d)}\right|+$$
$$\left.+\left|\partial_t^2 u, I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u\right|+\left|D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u(d)\right|^2\right].$$

Оценим слагаемые в правой части неравенства (2.38). Используя неравенство Коши – Буняковского, получим оценку

$$\left|\sum_{\substack{j+|\tau|\le 2m\\ j\ne 2m}}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right|+$$
$$+\left|\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u, D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right)\right|\le \tag{2.39}$$
$$\le\varepsilon(\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2)+$$
$$+c(\varepsilon)(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+(1+|\xi|^2)^{2m}\|u\|^2).$$

Используя теорему о «следах», получим оценку

$$\sum_{j=1}^{\frac{m}{3}}\left|D_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}+j-1}u(d)}\right|+\left|D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u(d)\right|^2+$$
$$+\sum_{j=1}^{\frac{2m}{3}}\left|D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}-j}u(d)}\right|\le \qquad (2.40)$$
$$\le\varepsilon_1\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u\right|^2dt+c(\varepsilon_1)\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|u(t)\right|^2dt\le$$
$$\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c(\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

С помощью неравенства Коши—Буняковского и оценки (2.10) получим неравенства

$$\left|(D_{\alpha,t}^{\frac{5m}{3}}u,I_{1,\frac{5m}{3}}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2, \qquad (2.41)$$

$$\left|(\partial_t^2 u,I_{\frac{4m}{3},1}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3u\right\|^2\right)+ \qquad (2.42)$$
$$+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

Применяя оценки (2.39)—(2.42) в правой части неравенства (2.38), получим оценку (2.34).

Лемма 2.7. Пусть $\frac{m}{3}$ — целое число, тогда при выполнении условий леммы 2.2 для любой функции $u(t)\in\tilde H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left(1+|\xi|^2\right)^m\operatorname{Re}\partial_t^2u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right). \qquad (2.43)$$

Доказательство. Складывая почленно неравенства (2.11), (2.15), (2.24), (2.25) и (2.34), получим оценку

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+$$
$$+\left\|\partial_t^3u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u\right\|^2\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2\right)+$$
$$+c(\varepsilon)(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left(1+|\xi|^2\right)^m(\operatorname{Re}\partial_t^2u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2)\right). \qquad (2.44)$$

которая справедлива при любом $\varepsilon>0$.

В силу неравенства (2.11) получим, что

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\le c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left(1+|\xi|^2\right)^m\partial_t^2u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right).$$

Используя это неравенство в (2.44), получим оценку

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+$$
$$+\left\|\partial_t^3u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t u\right\|^2\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{2m}{3}}\partial_t^2 u\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left\|\partial_t^3u\right\|^2\right)+c(\varepsilon)\left(\|f\|^2+\right.$$
$$\left.+\left(1+|\xi|^2\right)^m(\operatorname{Re}\partial_t^2u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2)\right).$$

Выбирая в этом неравенстве число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим, учитывая определение нормы в пространстве $\widetilde H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0,d)$, оценку (2.43).

Рассмотрим теперь случай, когда $\frac{m}{3}$ не является целым числом. В этом случае для доказательства теоремы 2.1 вместо лемм 2.5—2.7 используются следующие леммы 2.5′—2.7′.

Лемма 2.5′. Пусть выполнены условия леммы 2.2 и $\frac{m}{3}$ не является целым числом. Тогда для любой функции $u(t)\in\tilde H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\right.$$
$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2+$$

$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2)+$$

$$+c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2\right)\Big) \quad (2.45)$$

при всех целых $k\in\left[0,\dfrac{m}{3}\right]$ и любых $\varepsilon>0$.

Доказательство. Умножим скалярно обе части равенства (2.1) на функцию $-\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u$.

Получим равенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-2k}\Big[-a_{02m}\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)-$$
$$-\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\Big]=$$
$$=-\operatorname{Re}\left(Au,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)+ \quad (2.46)$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j}u,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right).$$

Преобразуем слагаемые в левой части равенства (2.46). Интегрируя по частям, получим равенство

$$-a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u,D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)=$$
$$=-a_{02m}\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\Big[-\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2- \quad (2.47)$$
$$-\operatorname{Re}\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)+$$
$$+\operatorname{Re}D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}+\widetilde{R_1}+\widetilde{K_1}\Big],$$

где $\widetilde{R_1}=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m-k}i\alpha(t)D_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot D_{\alpha,t}^{2k+j+1}\partial_t^2 u(d)$, $\widetilde{K_1}=\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+k}u,I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)\partial_t u\right)$, $I_{m+k,1}\left(D_{\alpha,t},\partial_t\right)$ — коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{m+k}$ и ∂_t.

Аналогично получаем равенство

$$-\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u,D_{\alpha,t}^{2k}u\right)=$$
$$=-\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\Big[\frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{k}\partial_t u(d)\right|^2+$$
$$+\operatorname{Re}\partial_t^2 D_{\alpha,t}^{k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{k}u(d)}+ \quad (2.48)$$
$$+\operatorname{Re}\left(I_{k,3}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right),D_{\alpha,t}^{k}u\right)+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{k-1}D_{\alpha,t}^{k+j-1}\partial_t^3 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j}u(d)}\cdot i\alpha(d)\Big].$$

Используя (2.47) и (2.48) в (2.46), получим оценку

$$\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\le\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\|u\|^2+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+$$
$$+\left|\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j},\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\right|+$$
$$+c\Big\{\left|\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)\right|+$$
$$+\left|D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}\right|+$$
$$+\widetilde{R_1}+\widetilde{K_1}+\frac{1}{2}\left|\partial_t D_{\alpha,t}^{k}u(d)\right|^2+$$
$$+\left|\partial_t^2 D_{\alpha,t}^{k}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{k}u(d)}\right|+$$
$$+\left|\left(I_{k,3}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{k}u\right)\right|+$$
$$+\left|\sum_{j=1}^{k-1}D_{\alpha,t}^{k+j-1}\partial_t^3 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j}u(d)\cdot i\alpha(d)}\right|\Big\}\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}. \quad (2.49)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (2.49). С помощью неравенства Коши—Буняковского и оценки (2.10), получим неравенства

$$\left|\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}a_{\tau j}\xi^{\tau}\left(D_{\alpha,t}^{j},\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right)+ \quad (2.50)$$
$$+c_1(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m},$$

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(I_{1,m+k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-k}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right)+ \quad (2.51)$$
$$+c_2(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2,$$

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(I_{k,3}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u,D_{\alpha,t}^{k}u\right)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\Big(\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2+$$
$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\cdot\left\|D_{\alpha,t}^{4m}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\Big)+ \quad (2.52)$$
$$+c_3(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2,$$

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\left(I_{k,3}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u, D_{\alpha,t}^k u\right)\right| + \\ +\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\widetilde{K_1} \le \\ \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 + \right. \\ \left.\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2\right)+ \\ +c_4(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{2.53}$$

С помощью теоремы «о следах» и оценки (2.10), получим неравенство

$$\left(1+|\xi|\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\widetilde{R_1}+\frac{1}{2}\left|\partial_t D_{\alpha,t}^k u(d)\right|^2 + \right. \\ +\left|\partial_t^2 D_{\alpha,t}^k u(d)\overline{D_{\alpha,t}^k u(d)}\right| + \\ +\sum_{j=1}^{k-1} D_{\alpha,t}^{k+j-1}\partial_t^3 u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{2k-j}u(d)} i\alpha(d) + \\ \left. +\left|D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\overline{D_{\alpha,t}^{m+k}\partial_t u(d)}\right|\right\} \le \\ \le \varepsilon_1\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|+c_5(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \tag{2.54}$$

Применяя неравенства (2.50)—(2.54) в правой части неравенства (2.49), получим оценку (2.45).

Лемма 2.6′. При выполнении условий леммы 2.5′ для любой функции $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3 u\right\|^2 + \right. \\ \left. +\left(1+|\xi|\right)^{\frac{4m}{3}-\left[\frac{4m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2\right)+ \\ +c(\varepsilon)\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left\|A\left(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2\right) \tag{2.55}$$

при всех $k \in \left[0, \frac{m}{3}\right]$ и любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Умножим скалярно обе части равенства (2.1) на функцию $-\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u$, получим равенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left[-a_{02m}\operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)- \right. \\ \left. -\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right] = \\ = -\operatorname{Re}\left(Au,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)+ \\ +\operatorname{Re}\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}} a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^j u,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4m}\partial_t u\right). \tag{2.56}$$

С помощью интегрирования по частям получим равенство

$$-a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left(D_{\alpha,t}^{2m}u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right) = \\ = a_{02m}\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|D_{\alpha,t}^{m+2k}u(d)\right|^2 - \\ -a_{02m}\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\widehat{R_1}+\widehat{M_1}\right\}, \tag{2.57}$$

где $\widehat{R_1} = \operatorname{Re} i\sum_{j=12}^{m-2k}\alpha(d) D_{\alpha,t}^{2m-j}u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k+j-1}u(d)}$,

$\widehat{M_1} = \operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^{m+2k}u, I_{1,m+2k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}^{m+2k}\right)u\right)$,

$I_{1,m+2k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)u = \partial_t D_{\alpha,t}^{m+2k}u - D_{\alpha,t}^{m+2k}\partial_t u$.

Аналогично получим равенство

$$-\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right) = \\ = a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 + \\ +a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} + \\ +\left\{\operatorname{Re}\left(\partial_t^2 u, I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right)- \right. \\ -\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u(d)} + \\ \left. +\sum_{j=1}^{2k} D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k-j}u(d)\frac{1}{i}\alpha(d)}\right\}, \tag{2.58}$$

где $I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right) = \partial_t D_{\alpha,t}^{4k} - D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t$.

Используя равенства (2.57) и (2.58) в равенстве (2.56), получим неравенства

$$\frac{a_{02m}}{2}\left\|D_{\alpha,t}^{m+k}u(d)\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} + \\ +a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\|D_{\alpha,t}^{2k}\partial_t^2 u\right\|^2 \le \\ \le\left|\left(Au,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right| + \\ +\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\left|a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^j u,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right| + \\ +\left|a_{02m}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\left|\widehat{R_1}\right|+\left|\widehat{M_1}\right|\right\}\right| + \\ +\left|a_{02m}\right|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\left|\partial_t^2 u, I_{1,4k}\left(\partial_t, D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right| + \right. \\ +\left|\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u(d)}\right| + \\ \left. +\left|\sum_{j=1}^{2k} D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k-j}\partial_t u(d)\frac{1}{i}\alpha(d)}\right|\right\}. \tag{2.59}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (2.59). С помощью неравенства Коши—Буняковского, получим

$$\left|\left(Au,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k} D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right| \le \le \varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2. \quad (2.60)$$

С помощью неравенства Коши – Буняковского и оценки (2.10), получим оценку

$$\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m\\ j\ne 2m}}\left|a_{\tau j}\xi^\tau\left(D_{\alpha,t}^j u,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right)\right| \le$$

$$\le \varepsilon\left\{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right\}+ \quad (2.61)$$

$$+c_1(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

С помощью теоремы «о следах» получим оценку

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left\{\left|\widehat{R_1}\right|+\left|\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u(d)}\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2k}D_{\alpha,t}^{j-1}\partial_t^2 u(d)\cdot\overline{D_{\alpha,t}^{4k-j}u(d)}\cdot\overline{\frac{1}{i}\alpha(d)}\le\right. \quad (2.62)$$

$$\le\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c_2(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2.$$

С помощью неравенства Коши—Буняковского и оценки (2.10), получим неравенства

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\widehat{M_1}\right|\le$$

$$\le\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|D_{\alpha,t}^{m+2k},I_{1,m+2k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)u\right|\le$$

$$\le\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2+\left\|\partial_t^3u\right\|^2\right)+$$

$$+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \quad (2.63)$$

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-2k}\left|\partial_t^2 u,I_{1,4k}\left(\partial_t,D_{\alpha,t}\right)\partial_t u\right|\le$$

$$\le\varepsilon\left(\left\|\partial_t^3u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{4k}\partial_t u\right\|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{4m}{3}-4k}+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right)+$$

$$+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \quad (2.64)$$

Используя неравенства (2.60)—(2.64) в правой части неравенства (2.59), получим оценку (2.55).

Теперь мы сможем доказать аналог леммы 2.7 в случае, когда $\dfrac{m}{3}$ не является целым числом.

Лемма 2.7′**.** При выполнении условий леммы 2.5′ для любой функции $u(t)\in\tilde H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\le c\left(\|Au\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\right)\times \times\left\{\operatorname{Re}\partial_t^2u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right\}. \quad (2.65)$$

Причем константа $c>0$ не зависит от ξ, u.

Доказательство. Складывая почленно неравенства (2.11), (2.15), (2.24), (2.45) и (2.55) и применяя в полученном неравенстве оценку (2.11), получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+$$

$$+\left\|\partial_t^3u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-\left[\frac{m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{m+\left[\frac{m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2+$$

$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2\le$$

$$\le c(\varepsilon)\left(\|Au\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\left\{\operatorname{Re}\partial_t u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right\}\right)+$$

$$+\varepsilon\left[\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-\left[\frac{m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\frac{4m}{3}}\partial_t u\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2\right].$$

Выбирая в этом неравенстве число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^j u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^3u\right\|^2+$$

$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}-\left[\frac{m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{4m}{3}\right]}\partial_t u\right\|^2+$$

$$+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}-\left[\frac{2m}{3}\right]}\left\|D_{\alpha,t}^{\left[\frac{2m}{3}\right]}\partial_t^2 u\right\|^2\le$$

$$\le c\left(\|Au\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\left(\operatorname{Re}\partial_t^2u(0)\overline{u(0)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t u(0)\right|^2\right)\right). \quad (2.66)$$

Заметим, что левая часть неравенства (2.66) есть выражение, эквивалентное норме $\|\cdot\|_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}$.

Отсюда и из (2.66) получаем оценку (2.65).

Доказательство теоремы 2.1.

Из лемм 2.7 и 2.7′ вытекает, что оценки (2.43) и (2.65) справедливы для любого решения

$u(\xi,t)$ задачи (2.1)—(2.3), принадлежащего при всех $\xi \in R^{n-1}$ по переменной t пространству $\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$, причем константы $c>0$ в (2.43) и (2.65) не зависят от u, ξ.

Используя неравенство Коши, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right| \le$$

$$\le \left(1+|\xi|^2\right)^{m}\left(\varepsilon\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|u(\xi,0)\right|^2\right)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon = \varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{2m}{3}}$, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{m}\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right| \le$$

$$\le \varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|^2+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2,$$

где ε_1 — любое число.

Заметим, что $\left|\partial_t^2 u(\xi,0)\right|^2 = -2\operatorname{Re}\left(\partial_t^3 u, \partial_t^2 u\right)$. Отсюда получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right| \le$$

$$\le 2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\left(\partial_t^3 u, \partial_t^2 u\right)\right| + \qquad (2.67)$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2.$$

Применяя для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (2.67) неравенство Коши, получим оценку

$$\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\left(\partial_t^3 u, \partial_t^2 u\right)\right| \le$$

$$\le \varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left(\varepsilon_2\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon_2}\left\|\partial_t^2 u\right\|\right)^2.$$

Выберем в этом неравенстве $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{m}{3}}$, получим оценку

$$\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{3}}\left|\left(\partial_t^3 u, \partial_t^2 u\right)\right| \le$$

$$\le \varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2.$$

Применяя это неравенство в правой части неравенства (2.85), получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^{m}\partial_t^2 u(\xi,0)\overline{u(\xi,0)}\right| \le$$

$$\le 2\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+2\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\left\|\partial_t^2 u\right\|^2+ \qquad (2.68)$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2.$$

Применим неравенство (2.68) в правой части неравенства (2.43), если m кратно 3, и в правой части неравенства (2.65), если m не кратно 3, получим оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\|Au\|^2+2\varepsilon_1\left\|\partial_t^3 u\right\|^2+\right.$$

$$\left.+2\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{2m}{3}}\cdot\left\|\partial_t u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2\right).$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon_1 > 0$ достаточно малым, получим неравенство

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c_1\left(\|Au\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left|u(\xi,0)\right|^2\right) \qquad (2.69)$$

Заметим теперь, что в силу условия 3

$$\left|u(\xi,0)\right| = \left|\frac{\sum\limits_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau u(\xi,0)}{\sum\limits_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau}\right| \le$$

$$\le c\left(1+|\xi|\right)^{-m^*}\left|B(\xi)u\,|_{t=0}\right| \le c\left|g(\xi)\right|\left(1+|\xi|\right)^{-m^*}.$$

Применяя это неравенство в (2.69) получим оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le$$

$$\le c\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{5m}{3}}\left(1+|\xi|^2\right)^{-m^*}\left|g(\xi)\right|^2\right)$$

или

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-m^*-\frac{m}{3}}\left|g(\xi)\right|^2\right)$$

Таким образом, доказана оценка (2.4) при $s=2m$. Справедливость оценки (2.4) при $s>2m$ доказывается методами, аналогичными методам работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сб. — 1969. — Т. 80 (112), Вып. 4. — С. 455-491.

2. *Вишик М. И.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи

математических наук. — 1970. — Т. 25, Вып. 4. — С. 29—56.

3. *Глушко В. П.* Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048-79.

4. *Баев А. Д.* Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. — 240 с.

5. *Баев А. Д.* Об одной краевой задаче в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. Естеств. науки. — 2008. — № 3 (62). — С. 27—39.

6. *Баев А. Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка/А. Д. Баев // Доклады Академии наук, 2008, Т. 422, №6, С. 727—728.

Баев А. Д. — д. ф.-м. н., декан математического факультета, заведующий кафедрой математического анализа, Воронежский государственный университет

Тел. (4732)208401

E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бунеев С. С. — аспирант Елецкого государственного университета

Тел. 89508083812

E-mail: limes88@mail.ru

Baev Alexander Dmitrievich — Doctor of physico-mathematical sciences, the dean of Department of Mathematics, head of a chair of mathematical analysis of Voronezh State University

Tel. (4732) 208401.

E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Buneev S. S. — post-graduate student of Yelets State University

Tel. 89508083812.

E-mail: limes88@mail.ru