УДК 517.927

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 27.01.11 г.

Аннотация. Рассматривается краевая задача

$$x''(t)+f(t,(Tx)(t))=0\ ,\ \ 0<t<1\ , \qquad (1)$$

$$x(0)=0\ ,\ \ x(1)=0\ , \qquad (2)$$

где $T:C\to L_p$ ($1<p<\infty$) — линейный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1]\times[0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0)\equiv 0$.

В работе на основе теории полуупорядоченных пространств получены достаточные условия существования и единственности положительного решения для краевой задачи (1)—(2).

Ключевые слова: Конус, полуупорядоченность, оператор, положительное решение, краевая задача.

Abstract. Boundary value

$$x''(t)+f(t,(Tx)(t))=0\ ,\ \ 0<t<1\ , \qquad (1)$$

$$x(0)=0\ ,\ \ x(1)=0\ , \qquad (2)$$

is being examined, where $T:C\to L_p$ ($1<p<\infty$) is the linear continuous operator, the function $f(t,u)$ is non-negative on $[0,1]\times[0,\infty)$, and monotonically increases in the second argument, satisfying the Caratheodory condition and $f(\cdot,0)\equiv 0$.

On the basis of the theory of semi regulated spaces the sufficient conditions of solving the boundary value problem (1)—(2) are received in this article.

Key words: Cone, semi regulation, operator, positive solution, boundary value problem.

Вопросам исследования существования и единственности положительных решений для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, например [1]—[10]. Практически во всех вышеупомянутых работах естественным орудием исследования положительных решений являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем методы исследования положительных решений нелинейных операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.*

В данной работе с помощью общей теоремы М. А. Красносельского — Ю. В. Покорного [11] получены достаточные условия существования положительного решения для одного нелинейного функционально – дифференциального уравнения второго порядка, а единственность такого решения устанавливается применением принципа единственности для выпуклых операторов [12, с. 220].

Полученные в работе результаты являются продолжением исследований автора, ранее опубликованных в работах [13], [14].

Обозначим через C пространство $C[0,1]$, через L_p ($1<p<\infty$) — пространство $L_p(0,1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной [15, с. 27].

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t)+f(t,(Tx)(t))=0\ ,\ \ 0<t<1\ , \qquad (1)$$

$$x(0)=0\ ,\ \ x(1)=0\ , \qquad (2)$$

где $T:C\to L_p$ ($1<p<\infty$) — линейный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0)\equiv 0$.

Под положительным решением задачи (1)—(2) будем понимать функцию $x\in W^2$, положительную в интервале $(0,\ 1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)—(2) интегральное уравнение

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds\ ,0\le t\le 1\,,\qquad(3)$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\dfrac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2), имеющая вид

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s), & 0\le t\le s;\\ s(1-t), & s\le t\le 1.\end{cases}$$

Предположим, что функция $f(t,u)$ неотрицательна, монотонно возрастает по второму аргументу и $f(t,u)\le bu^{p/q}$ ($b>0\,,1<q<\infty$) при $u>0$.

В операторной форме уравнение (3) можно переписать в виде

$$x=GNTx,$$

где $N:L_p\to L_q$ — оператор Немыцкого, $G:L_q\to C$ — оператор Грина.

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds\ ,\ 0\le t\le 1\quad(4)$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и вполне непрерывен ([15], с.161).

Обозначим через $\tilde K$ конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$x(t)\ge\|x\|_C\,\varphi(t)\,,\ 0\le t\le 1\,,$$

где $\varphi(t)=\min(t,1-t)$.

Теорема 1. Предположим, что $T:C\to L_p$ — линейный положительный (монотонный) на конусе $\tilde K$ оператор. Пусть выполнено условие

$$a(t)u^{p/q}\le f(t,u)\le bu^{p/q}\,,\ t\in[0,\ 1]\,,\qquad(5)$$

где $p>q>1$, $a(t)$ — неотрицательная ($a(t)\ne 0$) суммируемая на отрезке $[0,1]$ функция и b-некоторое положительное число.

Тогда краевая задача (1)—(2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. В дальнейшем под полуупорядочиванием $u\prec v$ и $u\precsim v$ в конусе $\tilde K$ пространства C соответственно будем понимать $u(x)\le v(x)$ при всех $x\in[0,\ 1]$ и $u(x)>v(x)$ хотя бы для одного $x\in[0,\ 1]$.

Покажем, что существует такой элемент $v^*\in\tilde K$, $v^*\ne\theta$, что для каждого $x\in\tilde K$

$$Ax\succ\|Ax\|\cdot v^*\,.\qquad(6)$$

Действительно, в силу монотонности оператора $T:C\to L_p$ и условия (5) теоремы имеем

$$\frac{Ax}{\|Ax\|_C}=\frac{\int_0^1 G(t,s)f(t,(Tx)(s))ds}{\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds}\ge$$

$$\ge\frac{\varphi(t)\int_0^1\varphi(s)a(s)\left(Tx\right)^{p/q}(s)ds}{\frac{b}{4}\int_0^1\left(Tx\right)^{p/q}(s)ds}\ge$$

$$\ge\frac{4\varphi(t)\|x\|_C^{p/q}\int_0^1\varphi(s)a(s)\left(T\phi\right)^{p/q}(s)ds}{b\|Tx\|_{L_p}^{p/q}}\ge$$

$$\ge 4\phi(t)\frac{\int_0^1\varphi(s)a(s)\left(T\phi\right)^{p/q}(s)ds\,\|x\|_C^{p/q}}{b\gamma^{p/q}\|x\|_C^{p/q}}\ge$$

$$\ge 4\varphi(t)\frac{\int_0^1 a(s)\varphi(s)\left(T\varphi\right)^{p/q}(s)ds}{b\gamma^{p/q}}\,,\ 0\le t\le 1,$$

где γ — норма оператора $T:C\to L_p$. Взяв в качестве $v^*(t)$ функцию $4\varphi(t)\dfrac{\int_0^1 a(s)\varphi(s)\left(T\varphi\right)^{p/q}(s)ds}{b\gamma^{p/q}}$,

мы можем убедиться в выполнении условия (6).

Покажем теперь, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\|A(\lambda v^*)\|_C}{\lambda}=\infty\,.\qquad(7)$$

В самом деле, в силу линейности оператора $T:C\to L_p$ и условия (5) теоремы имеем

$$(A\lambda v^*)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,T(\lambda v^*)(s))ds\ge$$

$$\ge\varphi(t)\int_0^1\varphi(s)a(s)(T\lambda v^*)^{p/q}(s)ds=$$

$$=\lambda^{p/q}\varphi(t)\int_0^1\varphi(s)a(s)(Tv^*)^{p/q}(s)ds,$$

$$0\le t\le 1.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\lambda \to \infty$, убедимся в справедливости (7).

Найдем теперь $r > 0$ такое что для каждого $x \in \tilde{K}$, $\|x\| \le r$ и $x \ne \theta$

$$Ax \not\succ x . \qquad (8)$$

В силу условия (5) теоремы имеем

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,(Tx)(s)) ds \le$$

$$\le \varphi(t) b \int_0^1 (Tx)^{p/q}(s) ds \le \varphi(t) b \|Tx\|_{L_p}^{p/q} \le$$

$$\le \varphi(t) \|x\|_C b \gamma^{p/q} \|x\|_C^{p/q-1} \le x(t) b \gamma^{p/q} r^{p/q-1},$$

$$0 \le t \le 1.$$

Отсюда при $r < \left(\dfrac{1}{b^q \gamma^p} \right)^{\frac{1}{p-q}}$ следует (8).

Тогда согласно теореме существования [11], оператор (4) имеет в конусе $\tilde{K}$ пространства C по крайней мере одну неподвижную точку, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1) — (2).□

Пусть $x(t)$ — положительное решение уравнения (3). В силу ограничений на f в рассматриваемом конусе $\tilde{K}$ пространства C имеем

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,(Tx)(s)) ds \ge$$

$$\ge \varphi(t) \int_0^1 \varphi(s) a(s) (Tx)^{p/q}(s) ds \ge$$

$$\ge \varphi(t) \|x\|_C^{p/q} \int_0^1 \varphi(s) a(s) (T\phi)^{p/q}(s) ds,$$

$$0 \le t \le 1.$$

Переходя в последнем неравенству к максимуму на отрезке $[0,1]$, получим

$$\max_{t \in [0,1]} x(t) \ge \max_{t \in [0,1]} \varphi(t) \|x\|_C^{p/q} \int_0^1 \varphi(s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s) ds .$$

$$\|x\|_C \ge \frac{1}{2} \|x\|_C^{p/q} \int_0^1 \varphi(s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s) ds .$$

Отсюда следует

$$0 < \|x\|_C \le \beta ,\ 0 < x(t) \le \beta \quad (0 < t < 1), \quad (9)$$

где $\beta \equiv \left(\dfrac{2}{\int_0^1 \varphi(s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s) ds} \right)^{\frac{q}{p-q}}$.

В дальнейшем предполагается, что функция $f(t,u)$ дифференцируема по u и $f'_u(t,u)$ монотонно возрастает по второму аргументу.

Допустим, что уравнение (3) имеет два положительных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Из принципа единственности для выпуклых операторов [12, с. 220] следует, что обе разности $x_1(t) - x_2(t)$ и $x_2(t) - x_1(t)$ не являются строго положительными функциями. Без ограничения общности можно считать, что разность $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ обладает следующим свойством: найдутся такие числа t_0 и t_1, что $y(t_0) = \max_{t \in [0,1]} y(t) = \|y(t)\|_C$, $y(t_1) < 0$. Отсюда вытекает, что $\|y(t) - l\|_C \ge \frac{1}{2} \|y(t)\|_C$ при любом числе l.

Из равенств

$$x_i(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,(Tx_i)(s)) ds \ \ (i = 1,2),\ 0 \le t \le 1.$$

применяя теорему о среднем к разности $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$, получим

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) f_u'(s, \tilde{\theta}(s)) (Ty)(s) ds ,\ \ 0 \le t \le 1 ,$$

где функция $\tilde{\theta}(t)$ принимает значения, промежуточные между значениями $(Tx_1)(t)$ и $(Tx_2)(t)$.

Взяв в качестве числа l ноль, в силу монотонности производной $f'_u(t,u)$ и оценок (9), имеем

$$\frac{1}{2} \|y\|_C \le \|y\|_C \le$$

$$\le \frac{1}{4} \int_0^1 \left| f'_u(s, \beta (T1)(s)) \right| \left| (Ty)(s) \right| ds \le$$

$$\le \frac{1}{4} \|\psi\|_{L_{p'}} \|Ty\|_{L_p} \le \frac{1}{4} \|\psi\|_{L_{p'}} \gamma \|y\|_C ,$$

где $\psi(t) \equiv f'_u(t, \beta (T1)(t))$, $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$.

Таким образом,

$$\|y\|_C \le \frac{\|\psi\|_{L_{p'}} \gamma}{4} \|y\|_C ,$$

т.е. $\|\psi\|_{L_{p'}} \gamma \ge 4$.

Если последнее неравенство не выполняется, то уравнение (3), а следовательно, и краевая задача (1)—(2) при $\dfrac{p}{q} > 1$ имеет единственное положительное решение. Доказана

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 краевая задача (1)—(2) имеет единственное положительное решение, если функция $f(t,u)$ дифференцируема по u, производная $f'_u(t,u)$ монотонно возрастает по второму аргументу и $\|\psi\|_{L_{p'}} \gamma < 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wong F. H., Wang S. P., Chen T.G.* Existence of positive solutions for second order functional differential equations // Computers & Mathematics with Applications. 2008. V. 56, Issue 10, P. 2580—2587.

2. *Ma R.* Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations // Appl. Math. Comput. 2007. V. 193. № 1. P. 66—72.

3. *Zima M.* On positive solutions of functional-differential equations in banach spaces // Journal of Inequalities and Applications Volume 6 (2000), Issue 3, P. 359—371.

4. *Agarwal R. P., Stanek S.* Positive solutions of singular value problems for delay differential equations // Dyn. Syst. Appl. 16, No. 4, 755—770 (2007).

5. *Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F.* Existence of positive solutions for functional equations // Computer & Mathematics with Applications, Volume 40, Issues 6—7, September—October 2000, P. 783—792.

6. *Sun Y., Han M., Debnath L.* Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations // Applied Mathematics and Computation, Vol. 190, Issue 1, 1 July 2007, P. 699—704.

7. *Weng P., Jiang D.* Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE // Computers & Mathematics with Applications, Vol. 37, Issue 10, May 1999, P. 1—9.

8. *Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F.* Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. 297, No. 1, P. 14—23 (2004).

9. *Yin F., Fugi F., Li Y.* The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations. J. Math. Study 35, No. 4, P. 364—370 (2002).

10. *Agarwal R., Staněk S.* Positive solutions of singular boundary value problems for delay differential equations. Dyn. Syst. Appl. 16, No. 4, P. 755—770 (2007).

11. *Красносельский М.А., Покорный Ю.В.* О ненулевых решениях уравнений с сильными нелинейностями. Математические заметки. Т. 2., № 5 (1969), С. 253—260.

12. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. — 394 с.

13. *Абдурагимов Г. Э.* О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка. Известия вузов. Математика. — 2004, № 6. С. 3—5.

14. *Абдурагимов Г. Э.* О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка. Известия вузов. Математика. — 2006, № 5. С. 3—6.

15. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

Абдурагимов Г. Э. — к. ф.-м н., доцент, Дагестанский государственный университет
Тел. 8(722) 92-25-87
E-mail: gusen_ e@mail.ru

Abduragimov G. E. — Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Assistant Professor, Daghestan State University
Tel. 8(722) 92-25-87
E-mail: gusen_ e@mail.ru