

ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫМ ПОЛЕМ: МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА

Т. С. Саранцева, М. В. Фролов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.03.2012 г.

Аннотация: Основываясь на методе эффективного радиуса (МЭР), развита теория генерации высших гармоник (ГВГ) в сильном световом поле с эллиптической поляризацией. В рамках МЭР получены аналитические выражения для амплитуды генерации гармоник и сформулировано приближение сильного поля (ПСП) в случае вырожденного начального состояния. Рассчитаны спектры ГВГ и поляризационные свойства гармоник для отрицательных ионов водорода и фтора. На примере МЭР установлена точность приближения сильного поля для ГВГ в эллиптически поляризованном поле.

Ключевые слова: генерация высших гармоник, приближение сильного поля, метод эффективного радиуса, поляризационные характеристики гармоник.

Abstract: Based on the time-dependent effective range theory (TDER), we develop the theory of high harmonic generation (HHG) in a strong elliptically polarized laser field. Analytical expressions for HHG amplitude were obtained in the framework of TDER and strong field approximation was introduced for degenerate initial states. Both HHG spectra and polarization properties of harmonics were calculated for negative ions H^- and F^- . The accuracy of SFA for HHG in an elliptically polarized field was shown.

Key words: high harmonic generation, strong field approximation, time-dependent effective range theory, polarization properties of harmonics.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты по взаимодействию атомной системы с сильным эллиптически поляризованным светом позволяют получать значительно больше информации об атомных характеристиках системы, чем в случае линейной поляризации. Такая возможность обусловлена возникновением целого ряда новых эффектов, отсутствующих для линейной поляризации, таких как, например, эллиптический дихроизм в угловых распределениях фотоэлектронов [1, 2] и выходе высших гармоник [3], поворот главной оси эллипса поляризации гармоники относительно главной оси эллипса поляризации накачки [4, 5], возникновение у излучаемой гармоники эллиптичности отличной от эллиптичности поля накачки [5, 6] и т.д. Как показывает анализ, все эти эффекты обусловлены специфической интерференцией действительных и мнимых частей нелинейных восприимчивостей или амплитуд многофотонного поглощения [2, 3]. Таким образом, измерение поляризационных характеристик позволяет непосредственно

получать информацию о соотношении между мнимой и действительной частями амплитуды соответствующего процесса.

Характерные для сильного светового поля эффекты плато в высокоэнергетической части спектра надпороговой ионизации и генерации гармоник также существенно зависят от эллиптичности светового поля [1, 6—8]. В частности, увеличение эллиптичности поля накачки приводит к резкому уменьшению выхода высокоэнергетических электронов и фотонов. По этой причине в реальных экспериментах используют лазерные поля с небольшой эллиптичностью. В последние несколько лет интерес к атомным фотопроцессам в сильном эллиптически поляризованном световом поле снова возрос [9—12]. В первую очередь это связано с тем, что эллиптически поляризованные гармоники в области плато нашли практическое применение при получении импульсов аттосекундной длительности [13—15].

Значительная доля теоретических расчетов для выхода высших гармоник и их поляризационных свойств выполнено в так называемом

приближении сильного поля, которое для случая эллиптического поля было развито в работах [6, 16]. Популярность такого метода расчета вызвана, в первую очередь, объективными трудностями, возникающими при решении нестационарного уравнения Шредингера в случае эллиптически поляризованного поля и последующей физической интерпретации результатов численного интегрирования. Следует отметить, что в своей «классической» формулировке ПСП предполагает, что невозмущенный атомный уровень является изолированным. Однако, хорошо известно, что для начальных состояний с ненулевым орбитальным моментом эллиптически поляризованное поле перемешивает магнитные подуровни и приближение изолированного уровня перестает адекватно описывать физическую ситуацию. Очевидно, что проверка точности ПСП для начальных состояний с ненулевым начальным моментом путем сравнения с численным решением уравнения Шредингера представляет весьма трудоемкую задачу. Поэтому привлекательными становятся аналитические модели, сохраняющие все основные особенности взаимодействия эллиптически поляризованного поля с оптическим электроном. Одна из них основана на применении метода эффективного радиуса (МЭР) для периодически зависящих от времени гамильтонианов [17, 18]. Недавно указанная модель была успешно использована для анализа генерации высших гармоник (ГВГ) в линейно поляризованном поле [19–22].

В настоящей работе мы развиваем МЭР для ГВГ в эллиптически поляризованном поле. В частности, в работе получены точные выражения для амплитуды ГВГ в эллиптически поляризованном поле, сформулировано ПСП для вырожденных состояний и исследована точность ПСП при расчете полного выхода гармоник и их поляризационных свойств.

2. МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА

2.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим взаимодействие монохроматического поля с частотой ω и напряженностью F с валентным электроном, находящимся в состоянии $\psi_{\kappa lm}(\mathbf{r})$ с энергией $E_0 = -\hbar^2 \kappa^2 / (2m)$, орбитальным моментом l и проекцией m^* . Взаимодействие с сильным световым полем будем рассматривать в дипольном приближении:

* Ось квантования направлена вдоль орта e_z .

$$V(\mathbf{r}, t) = |e| \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}, \quad (1)$$

полагая, что энергия лазерного фотона меньше потенциала ионизации ($\hbar\omega \lesssim |E_0|$). Вектор переменного электрического поля $\mathbf{F}(t)$ параметризуем через единичный комплексный вектор поляризации \mathbf{e} :

$$\mathbf{F}(t) = F \operatorname{Re}(\mathbf{e} e^{-i\omega t}), \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}_x + i\eta \mathbf{e}_y}{\sqrt{1 + \eta^2}}, \quad (2)$$

где η — эллиптичность поля, а единичные орты \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y задают положение осей эллипса поляризации светового поля. Вместо эллиптичности поляризации состояние поля удобно описывать степенью линейной (ℓ) и циркулярной (ξ) поляризации:

$$\ell = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}, \quad \xi = i(\mathbf{e}_z \cdot [\mathbf{e} \times \mathbf{e}^*]) = \frac{2\eta}{1 + \eta^2}. \quad (3)$$

При *адиабатическом* включении лазерного поля связанное состояние $\psi_{\kappa lm}$ переходит в квазистационарное квазиэнергетическое состояние (ККЭС) $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ с квазиэнергией ε [23]. Волновая функция ККЭС и соответствующие им квазиэнергии могут быть найдены из решения задачи на собственные значения:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t), \\ \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) &= \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t + 2\pi / \omega), \\ \mathcal{H} &= -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U(r) + V(\mathbf{r}, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где решение ищется в классе периодических функций с асимптотикой расходящихся сферических волн на больших расстояниях [23]. Анализ уравнения (4) существенно упрощается, если атомный потенциал $U(r)$ имеет конечный радиус действия r_c , а состояние $\psi_{\kappa lm}$ является слабосвязанным, т.е. $\kappa r_c \ll 1$. В этом случае все пространство можно разделить на две области: (i) область внутри ямы ($r \lesssim r_c$), где движение электрона определяется в основном действием короткодействующего потенциала; (ii) область вне потенциальной ямы ($r \gtrsim r_c$), для которой $U(r) \simeq 0$ и динамика электрона определяется только взаимодействием с переменным электрическим полем $\mathbf{F}(t)$. Более того, если возмущенный световым полем уровень незначительно сдвигается относительно своего первоначального положения, то в области $r_c \lesssim r < \kappa^{-1}$ электрон можно считать квазисвободным и проекция волновой функции ККЭС на сферическую функцию $Y_{lm}(\Omega_r)$ может быть представлена в

виде суперпозиции регулярного и нерегулярного решений уравнения Шредингера для свободной частицы с орбитальным моментом l и «энергией» $E_n = \varepsilon + n\hbar\omega$ [17, 18]:

$$\int \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) d\Omega \sim \sum_n (r^{-l-1} + \dots + r^l B_l(E_n)) f_n^{(l,m)} e^{-in\omega t}, \quad (5)$$

где $f_n^{(l,m)}$ — коэффициенты Фурье периодической функции $f^{(l,m)}(t)$, а функция $B_l(E)$ может быть выражена через парциальную фазу рассеяния δ_l , параметризованную через длину рассеяния a_l и эффективный радиус r_l [24]:

$$(2l-1)!!(2l+1)!! B_l(E) = k^{2l+1} \text{ctg} \delta_l(k) \approx -a_l^{-1} + r_l k^2 / 2, \quad (6)$$

$$E = \hbar^2 k^2 / (2m).$$

Волновая функция ККЭС на больших расстояниях ($r > r_c$) может быть составлена из решений для свободного электрона в электрическом поле $\mathbf{F}(t)$. Как показывает анализ в [18], искомая волновая функция, удовлетворяющая граничному условию (5), выражается в виде свертки нестационарной функции Грина свободного электрона в переменном электрическом поле $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ и функции $f^{(l,m)}(t)$:

$$\Phi_\varepsilon^{(l,m)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2\pi\hbar^2 \sqrt{k}}{m} C_{\kappa l} \int_0^\infty e^{i\varepsilon\tau/\hbar} \mathcal{Y}_{l,m}[\alpha(\mathbf{r}; t, t-\tau)] \times G(\mathbf{r}, t; 0, t-\tau) f^{(l,m)}(t-\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$\alpha(\mathbf{r}; t, t-\tau) = \frac{m\mathbf{r}}{\tau} + \frac{|e|\hbar}{\omega^2} \left[\dot{\mathbf{F}}(t-\tau) - \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t-\tau)}{\tau} \right],$$

где явный вид функции Грина $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ указан в [25], $\mathcal{Y}_{l,m}(\mathbf{r})$ — шаровая функция [26], $C_{\kappa l}$ — безразмерный асимптотический коэффициент. Отметим, что в случае эллиптически поляризованного поля, магнитное квантовое число не сохраняется и решение следует искать в виде суммы волновых функций (7):

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \sum_m \Phi_\varepsilon^{(l,m)}(\mathbf{r}, t). \quad (8)$$

Сшивая решение (8) при малых r с граничным условием (5), получим систему интегродифференциальных уравнений на функции $f^{(l,m)}(t)$ или эквивалентную ей систему алгебраических уравнений на коэффициенты Фурье $f_n^{(l,m)}$. В случае $l=0$ и $l=1$ эти системы уравнений имеют вид [18]:

$$\sum_{k'} (M_{k,k'}^{(l,0)}(\varepsilon) - \mathcal{R}_l(\varepsilon + 2k\hbar\omega) \delta_{k,k'}) f_k^{(l,0)} = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{k'} \left[\left(\bar{M}_{k,k'}^{(l,m)}(\varepsilon) - \mathcal{R}_l(\varepsilon + 2k\hbar\omega) \delta_{k,k'} \right) f_{k'}^{(l,m)} + \hat{M}_{k,k'}^{(l,m)}(\varepsilon) f_{k'}^{(l,-m)} \right] = 0, \quad (10)$$

$$\mathcal{R}_l(\varepsilon) = -a_l^{-1} + \frac{r_l q^2}{2} - iq^{l+1/2}, \quad q = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}, \quad (11)$$

где матричные элементы $M_{k,k'}^{(l,m)}$ могут быть записаны в виде одномерных интегралов от функций Бесселя [18].

2.2. ПРИБЛИЖЕНИЕ СИЛЬНОГО ПОЛЯ

Термин «приближение сильного поля» или «приближение Келдыша» традиционно используется в задачах, связанных с ионизацией [27]. Суть этого приближения заключается в том, что при вычислении матричного элемента перехода из связанного состояния в непрерывный спектр пренебрегается влиянием сильного светового поля на валентный электрон и в качестве функции начального состояния выбирают невозмущенную волновую функцию связанного состояния $\psi_{\kappa l m}(\mathbf{r}) e^{-iE_0 t/\hbar}$. Для функции конечного состояния, напротив, взаимодействие с сильным световым полем учитывается точно, а эффектами атомного потенциала пренебрегают, и в качестве функции конечного состояния выбирают волновую функцию свободного электрона в поле $\mathbf{F}(t)$ с заданным импульсом \mathbf{p} [27]. Очевидно, что при описании других процессов в лазерном поле, также можно ввести понятие «приближение сильного поля», подразумевая, что в рамках этого приближения эффекты сильного светового поля и атомного потенциала учитываются с той же точностью, что и в теории Келдыша для ионизации.

В модели эффективного радиуса эффекты атомного потенциала, модифицированные сильным световым полем, сосредоточены в коэффициентах $f_k^{(l,m)}$ [17, 18, 28], описывающих индуцированный световым полем обмен k -фотонами между электроном и сильным лазерным полем на расстояниях $r < r_c$. Очевидно, такой обмен не возможен в низшем порядке по атомному потенциалу, поэтому, пренебрегая коэффициентами с $k \neq 0$, мы учитываем эффекты атомного потенциала с той же точностью, что и в приближении Келдыша (см., например, [28, 29]). Таким образом, в модели эффективного радиуса ПСП соответствует замене точной

квазиэнергии на E_0 и пренебрежением всеми коэффициентами $f_k^{(l,m)}$ с $k \neq 0$, т.е.

$$\varepsilon \rightarrow E_0, \quad f_k^{(l,m)} \rightarrow \mathcal{F}_{lm} \delta_{k,0}. \quad (12)$$

Отметим, что для фотоотрыва учет коэффициентов $f_k^{(l,m)}$ с $k \neq 0$ принципиально существенен при анализе высокоэнергетической части спектра (области плато), формирующейся за счет дополнительного взаимодействия электрона с атомным потенциалом в сильном световом поле. ПСП для МЭР в случае изолированного уровня было сформулировано в работах [17, 30], однако в случае эллиптически поляризованного поля магнитные подуровни перемешиваются и приближение изолированного уровня становится неприменимым. Сформулируем на основе точно решаемой модели МЭР ПСП в случае вырождения.

Одновременное испускание и поглощение фотона не изменяет орбитальный момент электрона, поэтому нерезонансное эллиптическое поле может перемешивать состояния только с одинаковой четностью m . Условие нормировки для коэффициентов \mathcal{F}_{lm} в этом случае может быть записано в виде:

$$\sum'_m |\mathcal{F}_{l,m}|^2 = 1, \quad (13)$$

где штрих означает, что суммирование проводится по состояниям с одинаковой четностью m . В случае $l = 0, 1$ и $m = 0$ условие (13) дает $\mathcal{F}_{l,0} = 1$ и ПСП формулируется также как и для изолированного уровня. В случае $l = 1$ и $m = \pm 1$ происходит перемешивание указанных магнитных подуровней, и в условие нормировки входят уже два коэффициента: $\mathcal{F}_{l=1,m=1}$ и $\mathcal{F}_{l=1,m=-1}$. Для определения $\mathcal{F}_{l,\pm 1}$ рассмотрим уравнение с $k = 0$ из системы (10) с одновременной подстановкой $f_k^{(l,m)} \rightarrow \mathcal{F}_{lm} \delta_{k,0}$. В этом случае бесконечная система уравнение (10) редуцируется в систему двух связанных однородных уравнений. Нетривиальное решение этой системы возможно только при определенных значениях ε , которые обращают детерминант системы в нуль. Для определения комплексной квазиэнергии ε и соответствующих ей $\mathcal{F}_{l=1,m=\pm 1}$ достаточно рассмотреть матричные элементы $\bar{M}_{0,0}^{(1,\pm 1)}$ и $\hat{M}_{0,0}^{(1,\pm 1)}$ в низшем порядке теории возмущений по F . Более того, ограничиваясь низкочастотным случаем ($\hbar\omega \ll |E_0|$) эти матричные элементы также могут быть разложены в ряд по ω . Как показывает анализ, нетривиальное решение такой

системы возможно при двух значениях квазиэнергии:

$$\varepsilon_{\pm} = E_0 + \Delta\varepsilon_{\pm}, \quad (14)$$

$$\Delta\varepsilon_{\pm} = -\frac{C_{\kappa,1}^2 |E_0|}{16} \left(\frac{F}{F_0} \right)^2 \times \left[1 + \frac{11}{32} \tilde{\omega}^2 \mp 3\ell \left(1 + \frac{5}{12} \tilde{\omega}^2 + 2\beta^2 \right) \right],$$

которым соответствуют два набора коэффициентов $\mathcal{F}_{l,m}^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{l=1,m=1}^{(\pm)} &= 1 / \sqrt{2} (1 \mp \beta), \\ \mathcal{F}_{l=1,m=-1}^{(\pm)} &= \pm 1 / \sqrt{2} (1 \mp \beta), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\beta = \frac{\xi \tilde{\omega}}{4\ell}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\hbar\omega}{|E_0|}, \quad F_0 = \frac{\sqrt{2m|E_0|^3}}{|e|\hbar},$$

где мы ограничились случаем $\xi \ll 1$. Параметр β , характеризующий перемешивание магнитных подуровней эллиптически поляризованным полем, пропорционален частоте поля и является малым в низкочастотном режиме. Например, для отрицательного иона фтора, $\lambda = 0.8$ мкм ($\hbar\omega / |E_0| \approx 0.46$), $\beta \approx 0.075$ для $\eta = 0.3$. Отметим, что для $\beta = 0$ коэффициенты $\mathcal{F}_{l,m}^{(\pm)}$ задают такую суперпозицию функций $\Phi_{\varepsilon}^{(l,m)}$, которая обеспечивает сохранение проекции орбитального момента на ось OX , являющейся главной осью поляризации. Таким образом, пренебрегая штарковским сдвигом (см. (14)) и учитывая, что значение параметра β пренебрежимо мало, сформулируем ПСП в случае вырожденного состояния в виде: $\varepsilon \rightarrow E_0$ и $f_k^{(1,1)} \rightarrow \delta_{k,0} / \sqrt{2}$, $f_k^{(1,-1)} \rightarrow \pm \delta_{k,0} / \sqrt{2}$.

3. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫМ ЛАЗЕРНЫМ ПОЛЕМ

Амплитуда генерации N -ой гармоник с вектором поляризации e' определяется компонентной Фурье дуального дипольного момента $\tilde{\mathbf{d}}_N$ [31]:

$$\begin{aligned} A_N &= (e'^* \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{N\omega}), \\ \tilde{\mathbf{d}}_N &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{iN\omega t} \langle \tilde{\Phi}_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) | \mathbf{d} | \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathbf{d} = -|e|\mathbf{r}$, а $\tilde{\Phi}_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)$ дуальная к ККЭС функция:

$$\tilde{\Phi}_{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \Phi_{\varepsilon}^*(\mathbf{r}, -t) \Big|_{\eta \rightarrow -\eta}. \quad (17)$$

Разложив вектор $\tilde{\mathbf{d}}_N$ на параллельную и перпендикулярную компоненты:

$$\tilde{\mathbf{d}}_{N\omega} = \chi_{\parallel}^{(q)} \mathbf{e}_x + \chi_{\perp}^{(q)} \mathbf{e}_y, \quad (18)$$

запишем полный выход гармоники \mathcal{R}_N , степень циркулярной поляризации ξ_N и угол поворота θ_N через восприимчивости $\chi_{\parallel}^{(q)}$ и $\chi_{\perp}^{(q)}$:

$$\mathcal{R}_N = \frac{(N\omega)^3}{2\pi\hbar c^3} \frac{1}{2l+1} \sum_{q=1}^{2\ell+1} \left(|\chi_{\parallel}^{(q)}|^2 + |\chi_{\perp}^{(q)}|^2 \right), \quad (19)$$

$$\xi_N = \frac{\sum_{q=1}^{2\ell+1} 2\text{Im}[\chi_{\parallel}^{(q)*} \chi_{\perp}^{(q)}]}{\sum_{q=1}^{2\ell+1} \left(|\chi_{\parallel}^{(q)}|^2 + |\chi_{\perp}^{(q)}|^2 \right)}, \quad (20)$$

$$\text{tg}(2\theta_N) = \frac{\sum_{q=1}^{2\ell+1} 2\text{Re}[\chi_{\parallel}^{(q)*} \chi_{\perp}^{(q)}]}{\sum_{q=1}^{2\ell+1} \left(|\chi_{\parallel}^{(q)}|^2 - |\chi_{\perp}^{(q)}|^2 \right)}, \quad (21)$$

где c — скорость света, а индекс q нумерует квазиэнергетические состояния, соответствующие начальному состоянию с орбитальным моментом l .

Хотя волновые функции МЭР неограниченно возрастают при $r \rightarrow 0$ (см. (5)), тем не менее матричный элемент (16) остается конечным. Действительно, с одной стороны, согласно правилам дипольного отбора переходы возможны только с изменением орбитального момента на единицу. С другой стороны, компоненты волновой функции с $l' \neq l$, индуцированные световым полем, имеют регулярное поведение $r^{l'}$ при $r \rightarrow 0$ и поэтому расходимость на малых расстояниях в матричном элементе (16) может возникнуть только при дипольном переходе между компонентой волновой функции ККЭС с угловым моментом l и $l' = |l-1|$. Учитывая радиальную зависимость парциальных компонент ККЭС на малых расстояниях легко видеть, что для такого перехода радиальная часть матричного элемента (16) имеет регулярное поведение $\sim r^{|l-1|-l+2}$ при $r \rightarrow 0$. Отметим, что для расчета дуального дипольного момента можно также использовать альтернативный подход, основанный на вычислении производной от комплексной квазиэнергии в двух полях [32], который приводит к тому же результату, что и непосредственное вычисление матричного элемента (16) на функциях (8).

В МЭР дуальный дипольный момент может быть представлен в виде:

$$\tilde{\mathbf{d}}_{N\omega} = C_{\kappa,l}^2 \sum_{k,k'} f_k^{(l,0)} \mathbf{d}_{k,k';N}^{(l,0)} f_{k'}^{(l,0)}, \quad m=0, \quad l=0,1, \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{N\omega} = C_{\kappa,l}^2 \sum_{k,k',p} \left(f_k^{(1,p)} \bar{\mathbf{d}}_{k,k';N}^{(1,p)} f_{k'}^{(1,p)} + f_k^{(1,p)} \hat{\mathbf{d}}_{k,k';N}^{(1,p)} f_{k'}^{(1,-p)} \right), \quad (23)$$

$$l=1.$$

где матричные элементы $\mathbf{d}_{k,k';N}^{(l,0)}$, $\bar{\mathbf{d}}_{k,k';N}^{(1,p)}$ и $\hat{\mathbf{d}}_{k,k';N}^{(1,p)}$ могут быть записаны в виде одномерных интегралов от функций Бесселя (см. [20] в случае линейной поляризации).

В приближении Келдыша соотношения (22) и (23) упрощаются:

$$\tilde{\mathbf{d}}_{N\omega} = C_{\kappa,l}^2 \mathbf{d}_{0,0;N}^{(l,0)}, \quad m=0, \quad l=0,1, \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{N\omega} = C_{\kappa,l}^2 \left(\frac{\bar{\mathbf{d}}_{0,0;N}^{(1,1)} + \bar{\mathbf{d}}_{0,0;N}^{(1,-1)}}{2} \pm \frac{\hat{\mathbf{d}}_{0,0;N}^{(1,1)} + \hat{\mathbf{d}}_{0,0;N}^{(1,-1)}}{2} \right), \quad (25)$$

$$l=1.$$

В том случае если уровень не перемешивается с другим как, например, в случае $l=0$ или $l=1$ и $m=0$, дуальный дипольный момент определяется одним матричным элементом, однако для перемешивающихся состояний дуальный дипольный момент определяется рядом парциальных компонент. Физический смысл каждой парциальной компоненты легко понять исходя из анализа волновой функции ККЭС в ПСП [28]. Для $l=1$ и перемешивающихся магнитных подуровней $m=\pm 1$ она имеет вид:

$$\Phi_{KA}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = \left[\Phi_{KA}^{(1,+1)}(\mathbf{r}, t) \pm \Phi_{KA}^{(1,-1)}(\mathbf{r}, t) \right] / \sqrt{2}, \quad (26)$$

где волновые функции $\Phi_{KA}^{(1,m)}(\mathbf{r}, t)$ получаются из (7) заменой $f^{(l,m)}(t) \rightarrow 1$ и $\varepsilon \rightarrow E_0$. Непосредственное вычисление дуального дипольного момента с функциями (26) приводит к следующему результату:

$$\bar{\mathbf{d}}_{0,0;N}^{(1,m)} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{iN\omega t} \langle \tilde{\Phi}_{KA}^{(1,m)}(\mathbf{r}, t) | \mathbf{d} | \Phi_{KA}^{(1,m)}(\mathbf{r}, t) \rangle dt, \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_{0,0;N}^{(1,m)} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{iN\omega t} \langle \tilde{\Phi}_{KA}^{(1,-m)}(\mathbf{r}, t) | \mathbf{d} | \Phi_{KA}^{(1,m)}(\mathbf{r}, t) \rangle dt, \quad (28)$$

где дуальная функция $\tilde{\Phi}_{KA}^{(1,m)}(\mathbf{r}, t)$ определяется по правилу (17) и заменой $m \rightarrow -m$. Таким образом, парциальная компонента $\bar{\mathbf{d}}_{0,0;N}^{(1,m)}$ определяет амплитуду так называемого «прямого» канала в ГВГ, т.е. начальное и конечное состояния одинаковы, $\hat{\mathbf{d}}_{0,0;N}^{(1,m)}$ определяет амплитуду «обменного» канала в ГВГ для которого начальное и конечное состояния не совпадают.

На рис. 1 представлены спектры ГВГ, вычисленные для отрицательных ионов Н⁻ ($|E_0| = 0.755$ эВ, $C_{\kappa,0} = 2.304$) и F⁻ ($|E_0| = 3.4$ эВ, $C_{\kappa,1} = 1.188$) для двух наборов лазерных параметров, соответствующих «низкочастотному» режиму

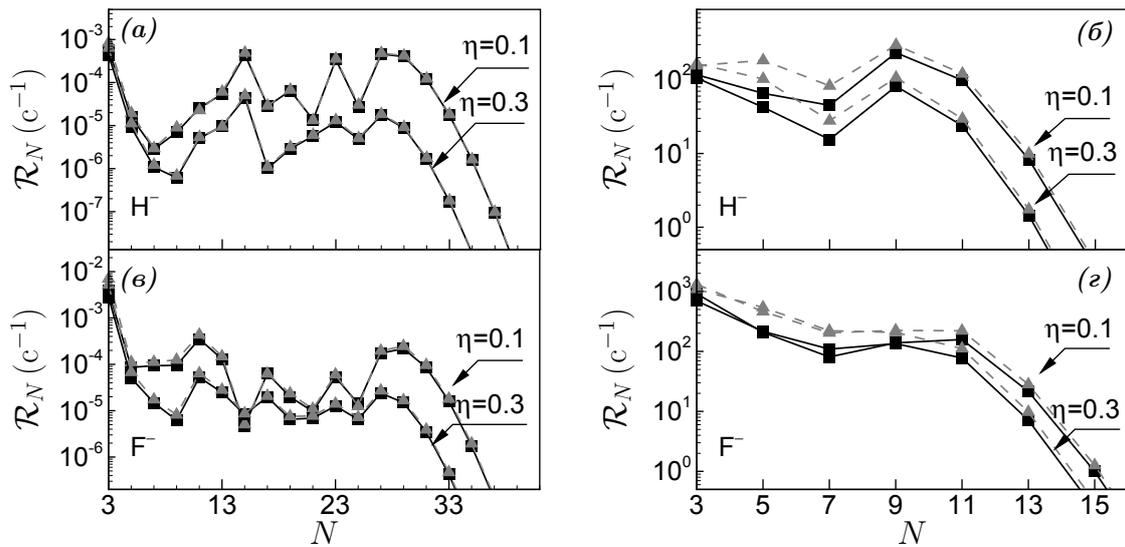


Рис. 1. Спектр гармоник для H^- и F^- . Параметры лазерного поля: (а), (в) $\hbar\omega = 0.098|E_0|$, $F = 0.1F_0$; (б), (г): $\hbar\omega = 0.343|E_0|$, $F = 0.418F_0$. Сплошные линии с квадратами — точный расчет; пунктирные линии с треугольниками — приближение сильного поля

($\hbar\omega = 0.098|E_0|, F = 0.1F_0$), и «высокочастотному» режиму ($\hbar\omega = 0.343|E_0|, F = 0.418F_0$), где $F_0 = \sqrt{2m_e |E_0|^3 / |e|\hbar}$ — характерная напряженность внутриатомного поля (для H^- : $F_0 = 3.4 \times 10^7$ В/см; для F^- : $F_0 = 3.3 \times 10^8$ В/см). В «низкочастотном» режиме спектры ГВГ, полученные в рамках ПСП (см. (24), (25)), прекрасно согласуются с точным расчетом. Однако в «высокочастотном» режиме точный и приближенные результаты совпадают значительно хуже. Тем не менее они качественно описывают особенности спектра ГВГ (высоту и точку обрыва плато).

Хорошо известно, что поляризационные характеристики гармоник достаточно чувствительны к выбору модели и к приближениям, сделанным в рамках этой модели [3]. По этой причине нами были вычислены зависимости степени циркулярной поляризации гармоники ξ_N и угла поворота главной оси эллипса поляризации гармоники θ_N от номера гармоники N (точно (в рамках МЭР) и с помощью ПСП. Указанные зависимости представлены на рис. 2 («низкочастотный» режим) и рис. 3 («высокочастотный» режим). Видно, что различия в поляризационных свойствах для точного результата и для приближения Келдыша также

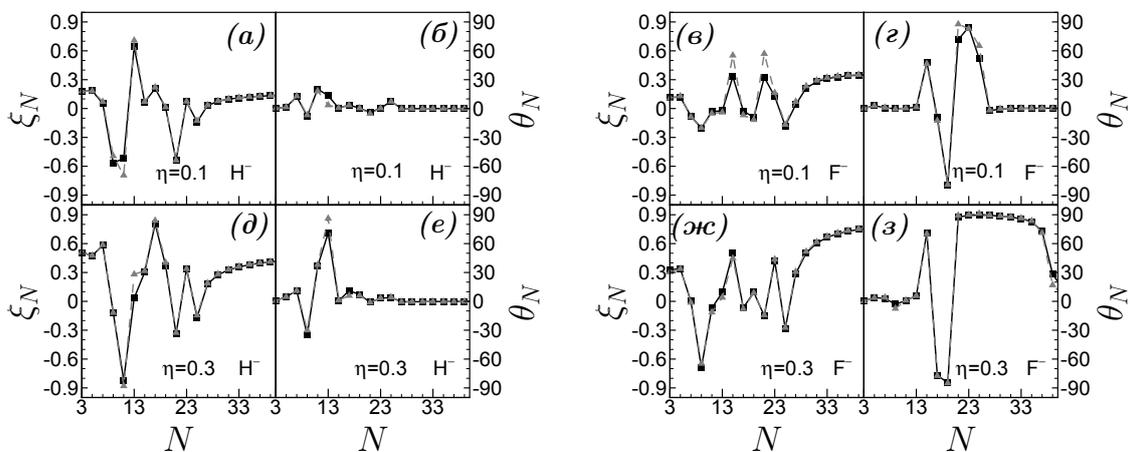


Рис. 2. Зависимость степени эллиптической поляризации гармоники и угла поворота главной оси эллипса поляризации гармоники от ее номера для H^- и F^- . Параметры лазерного поля: $\hbar\omega = 0.098|E_0|$, $F = 0.1F_0$. Сплошные линии с квадратами — точный расчет; пунктирные линии с треугольниками — приближение сильного поля

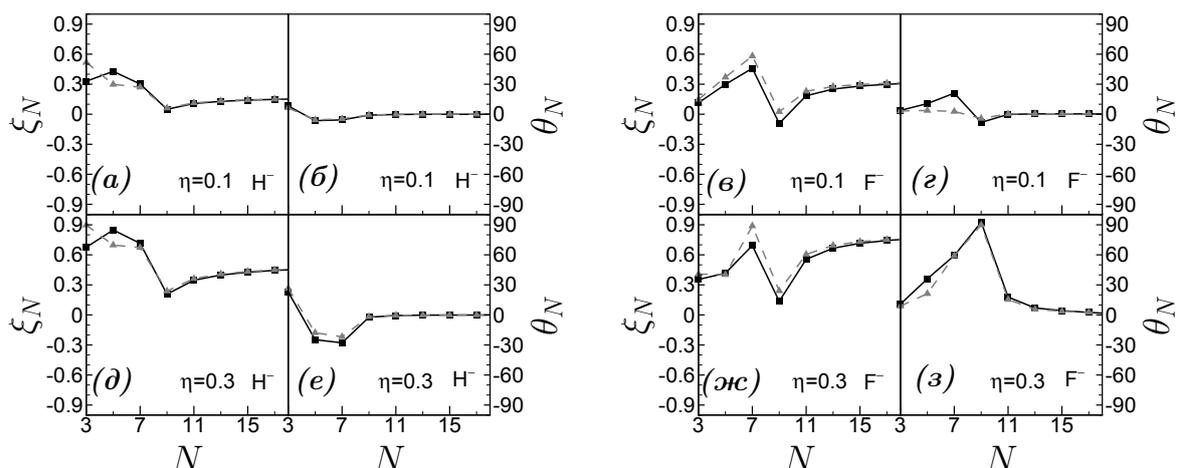


Рис. 3. Зависимость степени эллиптической поляризации гармоники и угла поворота главной оси эллипса поляризации гармоники от ее номера для H^- и F^- . Параметры лазерного поля: $\hbar\omega = 0.343|E_0|$, $F = 0.418F_0$. Сплошные линии с квадратами — точный расчет; пунктирные линии с треугольниками — приближение сильного поля

не носят принципиального характера, что свидетельствует о высокой точности приближений Келдыша в области малых частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Above-threshold ionization by an elliptically polarized field: Interplay between electronic quantum trajectories / G. G. Paulus, F. Grasbon, A. Dreischuh et al. // *Physical Review Letters*. — 2000. — Vol. 84. — P. 3791—3794.
2. Multiphoton detachment of a negative ion by an elliptically polarized, monochromatic laser field / N. L. Manakov, M. V. Frolov, B. Borca, A. F. Starace // *Journal of Physics B*. — 2003. — Vol. 36. — P. R49—R124.
3. Манаков, Н. Л. Диссипативно-индуцированные эффекты при генерации гармоник сильного светового поля с эллиптической поляризацией в газах / Н. Л. Манаков // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1996. — Т. 110. — С. 1244—1251.
4. Polarization of high-intensity high-harmonic generation / F. A. Weihe, S. K. Dutta, G. Korn et al. // *Physical Review A*. — 1995. — Vol. 51. — P. R3433—R3436.
5. Polarization of high-order harmonics / P. Antoine, B. Carre, A. L'Huillier, M. Lewenstein // *Physical Review A*. — 1997. — Vol. 55. — P. 1314—1324.
6. A unified theory of high-harmonic generation: Application to polarization properties of the harmonics / W. Becker, A. Lohr, M. Kleber, M. Lewenstein // *Physical Review A*. — 1997. — Vol. 56. — P. 645—656.
7. Influence of ellipticity on harmonic generation / Budil K. S., P. Salieres, M. D. Perry, A. L'Huillier // *Physical Review A*. — 1993. — Vol. 48. — P. R3437—R3440.
8. Burnett N. H. Ellipticity and polarization effects in harmonic generation in ionizing neon / N. H. Burnett, C. Kan, P. B. Corkum // *Physical Review A*. — 1995. — Vol. 51. — P. R3418—R3421.
9. Coulomb asymmetry in above-threshold ionization / S. P. Goreslavski, G. G. Paulus, S. V. Popruzhenko, N. I. Shvetsov-Shilovski // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 93. — P. 233002.
10. Popruzhenko, S. V. Strong field approximation for systems with Coulomb interaction / S. V. Popruzhenko, D. Bauer // *Journal of Modern Optics*. — 2008. — Vol. 55. — P. 2573—2589.
11. Popruzhenko, S. V. Coulomb-corrected quantum trajectories in strong-field ionization / S. V. Popruzhenko, G. G. Paulus, D. Bauer // *Physical Review A*. — 2008. — Vol. 77. — P. 053409.
12. Origin for ellipticity of high-order harmonics generated in atomic gases and the sublaser-cycle evolution of harmonic polarization / V. V. Strelkov, A. A. Gonoskov, I. A. Gonoskov, M. Y. Ryabikin // *Physical Review Letters*. — 2011. — Vol. 107. — P. 043902.
13. Controlling attosecond electron dynamics by phase-stabilized polarization gating / I. Sola, E. Mevel, L. Elouga et al. // *Nature Physics*. — 2006. — Vol. 2. — P. 319—322.
14. Isolated single-cycle attosecond pulses / G. Sansone, E. Benedetti, F. Calegari et al. // *Science*. — 2006. — Vol. 314. — P. 443—446.
15. Shaping of attosecond pulses by phase-stabilized polarization gating / G. Sansone, E. Benedetti, J. P. Caumes et al. // *Physical Review A*. — 2009. — Vol. 80. — P. 063837.
16. Theory of high-order harmonic generation by an elliptically polarized laser field / P. Antoine, A. L'Huillier, M. Lewenstein et al. // *Physical Review A*. — 1996. — Vol. 53. — P. 1725—1745.

17. Model-independent quantum approach for intense laser detachment of a weakly bound electron / M. V. Frolov, N. L. Manakov, E. A. Pronin, A. F. Starace // *Physical Review Letters*. — 2003. — Vol. 91. — P. 053003.
18. Frolov M. V. Effective-range theory for an electron in a short-range potential and a laser field / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Physical Review A*. — 2008. — Vol. 78. — P. 063418.
19. Манаков Н. Л. Пороговые явления в сечениях атомных фотопроцессов в сильном лазерном поле / Н. Л. Манаков, М. В. Фролов // *Письма в ЖЭТФ*. — 2006. — Т. 83. — С. 630—634.
20. Description of harmonic generation in terms of the complex quasienergy. II. Application to time-dependent effective range theory / M. V. Frolov, A. V. Flegel, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Physical Review A*. — 2007. — Vol. 75. — P. 063408.
21. Frolov M. V. Wavelength scaling of high-harmonic yield: Threshold phenomena and bound state symmetry dependence / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Physical Review Letters*. — 2008. — Vol. 100. — P. 173001.
22. Analytic formulae for high harmonic generation / M. V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva, A. F. Starace // *Journal of Physics B*. — 2009. — Vol. 42. — P. 035601.
23. Manakov, N. L. Atoms in a laser field / N. L. Manakov, V. D. Ovsiannikov, L. P. Rapoport // *Physics Reports*. — 1986. — Vol. 141. — P. 319—433.
24. Ландау, Л. Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1989. — 768 с.
25. Фейнман Р. Квантовая механика и интегралы по траекториям / Р. Фейнман, А. Хибс. — М.: Мир, 1968. — 382 с.
26. Варшалович Д. А. Квантовая теория углового момента: аппарат неприводимых тензоров, сферические функции, Згу-символы / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. — Л.: Наука, 1975. — 440 с.
27. Келдыш Л. В. Ионизация в поле сильной электромагнитной волны / Л. В. Келдыш // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1964. — Т. 47. — С. 1945—1957.
28. An analytical quantum model for intense field processes: quantum origin of rescattering plateaus / M. V. Frolov, A. A. Khuskivadze, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Journal of Physics B*. — 2006. — Vol. 39. — P. S283—S305.
29. Манаков Н. Л. Распад слабосвязанного уровня в монохроматическом поле / Н. Л. Манаков, А. Г. Файнштейн // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1980. — Т. 79. — С. 751—762.
30. Strong field detachment of a negative ion with non-zero angular momentum: application to F^- / M. V. Frolov, N. L. Manakov, E. A. Pronin, A. F. Starace // *Journal of Physics B*. — 2003. — Vol. 36. — P. L419—L426.
31. Static-electric-field-induced polarization effects in harmonic generation / B. Borca, A. V. Flegel, M. V. Frolov et al. // *Physical Review Letters*. — 2000. — Vol. 85. — P. 732—735.
32. Description of harmonic generation in terms of the complex quasienergy. I. General formulation / M. V. Frolov, A. V. Flegel, N. L. Manakov, A. F. Starace // *Physical Review A*. — 2007. — Vol. 75. — P. 063408.

Саранцева Т. С. — аспирант кафедры теоретической физики физического факультета, Воронежский государственный университет
E-mail: sartan86@mail.ru
Тел. (473) 2208-756

Фролов М. В. — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики физического факультета, Воронежский государственный университет
E-mail: frolov@phys.vsu.ru
Тел. (473) 2208-756

Sarantseva T. S. — postgraduate student, Physics Department, Voronezh State University
E-mail: sartan86@mail.ru
Tel.: (473) 2208-756

Frolov M. V. — Candidate of Physics and Mathematics, associate professor, Physics Department, Voronezh State University
E-mail: frolov@phys.vsu.ru
Tel.: (473) 2208-756