УДК 621.3.015.4

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА ПЕРВЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

В. В. Белоглазов, Н. Д. Бирюк, И. Л. Глухов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.03.2012 г.

Аннотация: при рассмотрении задачи устойчивости параметрического контура с периодическими параметрами принято приводить уравнение контура к хорошо изученному уравнению Матье. Однако уравнение Матье оказывается слишком частным, поэтому не может охватить многих важных для теории и практики случаев. Ниже предложено расширение области применимости анализа устойчивости контура за счет численных компьютерных расчетов.
Ключевые слова: параметрический контур, линейное дифферениальное уравнение с периодическими коэффициентами, уравнение Матье, константа Ляпунова, компьютерные вычисления.

Abstract: when the problem of stability of time varying circuit with periodical parameters is considered, it is the usual way to reduce the equation of a circuit to the well-studied Mathieu. But Mathieu equation is found to be too particular case, so that it can not encompass many cases, which are important for the theory and the practice. Below it is proposed an expension of a stability analysis at the expense of numerical computer calculations.
Key words: time varying circuit, linear differential equation with periodical coefficients, Mathieu equation, Lyapunov's constant, computer calculations

1. ВВЕДЕНИЕ

Параметрический контур достаточно широко применяется в радиоэлектронике, так как может быть положен в основу одноконтурных малошумящих усилителей в радиосвязи. Параметрические малошумящие усилители являются лучшими для увеличения мощности входного высокочастотного сигнала [1]. Процессы в параметрическом контуре должны быть устойчивы по Ляпунову во избежание крайне нежелательного при эксплуатации паразитного самовозбуждения. В настоящее время задача устойчивости параметрического контура не решена с необходимой для практических приложений полнотой. Во многих публикациях эта задача решается путем приведения уравнения контура к хорошо изученному уравнению Матье [2]. Однако оказывается, что уравнение Матье имеет частный характер, в силу чего многие важные случаи не могут быть охвачены при таком подходе. Устойчивость более общего уравнения Хилла исследована лишь частично. Заметим, что в своих статьях [3] А. М. Ляпунов уделял много внимания этой задаче. Он основательно разработал ее толкование, получил решения для интересных частных случаев, но, тем не менее, полное решение не было найдено. Трудность заключается в том, что для полного решения задачи требуется выполнить весьма громоздкие преобразования, которые в то время не смог сделать даже Ляпунов. В наше время эта задача в принципе может быть решена с помощью компьютера. Ниже предлагается один из вариантов ее решения. Для анализа выбран относительно простой случай, который, однако, без особых трудностей обобщается на более сложные задачи этого типа.

К уравнению вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0, \quad p(t+T) = p(t),$$

где $p(t)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T, численный анализ устойчивости которого производится в данной работе, может быть приведено стандартными приемами (замена переменной) уравнение более общего вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0, \quad a(t+T) = a(t),$$
$$b(t+T) = b(t),$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — периодические функции с одним и тем же периодом T.

2. УРАВНЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА

Исследуем устойчивость параметрического контура на примере простейшего последовательного колебательного контура с изменяющейся по периодическому закону емкостью (рис. 1). Переменная емкость в качестве необходимой периодической реактивности параметрического контура более удобна для практических применений, чем переменная индуктивность, так как существуют несколько простых технических подходов к реализации переменной емкости в электрической цепи: сегнетоконденсаторы различных типов, запертые полупроводниковые диоды, варикапы с периодическим запирающим напряжением. Для дальнейшего анализа важно, чтобы закон изменения емкости не зависел от заряда, накопленного этой емкостью. В таком случае система будет линейной. Рассмотрим свободный процесс в таком контуре.

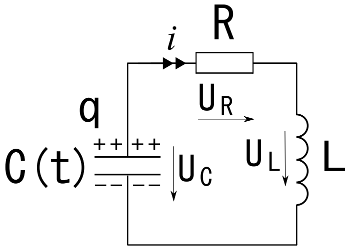

Рис. 1. Контур с параметрической емкостью

На рис. 1 показаны условные направления тока (двойная стрелка) и напряжений. Уравнение для этого контура, полученное из второго закона Кирхгофа, относительно заряда конденсатора q имеет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC(t)}q=0. \qquad (1)$$

Для упрощения математических процедур при анализе устойчивости этого периодического дифференциального уравнения второго порядка целесообразно перейти к безразмерным величинам времени и заряда на конденсаторе. С этой целью введем произвольные делители заряда q_{m} и времени $\mathrm{t_m}$, которые определяют безразмерные переменные

$$\tau=\frac{t}{t_{\mathrm{m}}}, \quad x=\frac{q}{q_{\mathrm{m}}}.$$

В этих переменных уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{t_{\mathrm{m}}R}{L}\frac{dx}{d\tau}+\frac{t_{\mathrm{m}}^2}{LC(\tau)}x=0 \qquad (2)$$

Переменные и коэффициенты этого уравнения безразмерные, причем масштабный множитель времени t_{m} можно менять произвольно, приводя за счет этого уравнение к удобному для решения виду.

Закон изменения емкости во времени зададим функцией

$$C(t)=C_0\left[1+m\cos(\Omega t)\right], \quad m<1. \qquad (3)$$

Эта функция всегда положительна $\left(m<1\right)$ и является периодической. Коэффициент m отражает глубину модуляции амплитуды емкости и может быть назван коэффициентом модуляции емкости; Ω — модулирующая круговая частота емкости. Нормировкой $t=t_{\mathrm{m}}\tau$ можно формально изменять круговую частоту переменной части емкости:

$$\Omega t=\Omega t_m\tau=\Omega'\tau, \text{ где } \Omega'=\Omega t_m.$$

Подберем масштабный делитель t_{m} так, чтобы выполнялось равенство

$$\Omega'=\Omega t_m=1, \text{ то есть } t_m=\frac{1}{\Omega}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{R}{\Omega L}\frac{dx}{d\tau}+\frac{1}{\Omega^2LC_0\left(1+m\cos\tau\right)}x=0. \qquad (4)$$

Теперь период периодического коэффициента в полученном уравнении равен 2π. Заменой переменной [4]

$$x=y\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{\Omega L}\tau\right)$$

исключим из уравнения (4) первую производную, сведя уравнение последовательного параметрического контура к удобному для анализа на устойчивость виду

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+f(\tau)y=0, \qquad (5)$$

где

$$f(\tau)=\frac{1}{\Omega^2LC_0\left(1+m\cos\tau\right)}-\frac{1}{4}\frac{R^2}{\Omega^2L^2}$$

Рассмотрим физический смысл параметра $\frac{R}{\Omega L}$, совершив для этого очевидное преобразование с целью выделения добротности $Q_0 = \dfrac{\Omega_0 L}{R}$ контура с немодулированной емкостью

$$\frac{R}{\Omega L} = \frac{\Omega_0}{\Omega}\frac{R}{\Omega_0 L} = \frac{b}{Q_0},$$

где $b = \dfrac{\Omega_0}{\Omega}$ — отношение собственной частоты контура $\left(\Omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}\right)$ к модулирующей частоте емкости.

Выраженная через параметры Q_0 и b связь функций x и y

$$x = y\exp\left(-\frac{b}{2Q_0}\tau\right)$$

позволяет сделать вывод о меньшем затухании колебательного процесса в параметрическом контуре при условии $b < 1 (\Omega > \Omega_0)$ по сравнению со свободными колебаниями в контуре с постоянной емкостью C_0.

Функция $f(\tau)$ уравнения (5) также может быть выражена через параметры b и Q_0:

$$f(\tau) = b^2\left(\frac{1}{1+m\cos\tau} - \frac{1}{4Q_0^2}\right).$$

Добротность контура Q_0 с немодулированной емкостью обратно пропорциональна числу колебаний, за время которых произойдет заметное уменьшение амплитуды колебаний. Поэтому для подавления затухания стараются увеличить добротность немодулированного контура. При добротностях $Q_0 \approx 100$—300 и более второе слагаемое составляет порядка 10^{-5}—10^{-6} и менее относительно первого, минимум которого равен 0.5 и достигается при коэффициенте модуляции емкости m приближающемся к единице при $\tau = 0$. Поэтому при анализе устойчивости колебаний в параметрическом контуре пренебрежем малым слагаемым (малость которого не зависит от соотношения собственной и модулирующей частот) и будем анализировать уравнение (5) с функцией $f(\tau)$ в виде

$$f(\tau) = \frac{B}{1+m\cos\tau}, \qquad (6)$$

где $B = b^2 = \left(\dfrac{\Omega_0}{\Omega}\right)^2$.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ КОНТУРА

Уравнение (5) с параметрической функцией (6) принимает вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{B}{1+m\cos\tau}x = 0. \qquad (7)$$

Это уравнение Хилла с периодом изменения коэффициента 2π. Известно, что такое уравнение может быть либо устойчивым неасимптотически, либо неустойчивым [3, 5]. В первом случае можно подобрать две константы, такие, что в любой момент времени функция свободного процесса больше меньшей из них и меньше большей. Во втором случае подбор таких констант невозможен, так как размах функции свободного процесса неограниченно возрастает, то есть, при любых двух константах с течением времени функция свободного процесса начинает превышать либо большую из них, либо становится меньше меньшей.

Разграничение случаев неустойчивости и неасимптотической устойчивости для уравнения типа (7) — очень сложная задача, которую долго и настойчиво исследовал А.М. Ляпунов, разработавший подходы к ее решению [3]. Он показал, что, если коэффициент уравнения Хилла представляет собой всегда неположительную функцию, то это уравнение неустойчиво, если — всегда неотрицательную функцию, то необходимо выполнить дополнительный анализ, метод которого был разработан самим Ляпуновым (впоследствии этот метод стал называться первым методом Ляпунова). Если функция принимает и положительные, и отрицательные значения, то в общем случае эта задача остается нерешенной.

Ограничимся здесь условием неотрицательности функции-коэффициента в уравнении Хилла, то есть

$$f(\tau) \ge 0,$$

которое выполняется для функции (6).

Ляпунов доказал, что для уравнения типа (7) при упомянутых ограничениях существует константа A (позже названная константой Ляпунова), которая позволяет решить вопрос об устойчивости этого уравнения. Таким образом, в данном случае задача об устойчивости сводится к вычислению константы Ляпунова A. Если выполняется неравенство

$$-1 \le A \le 1, \qquad (8)$$

то уравнение (7) устойчиво, в противном случае — неустойчиво. Эта константа может быть найдена только приближенно, поэтому случаи $A = -1$ и $A = 1$ не могут быть обнаружены. Таким образом, доступное для вычислений необходимое и достаточное условие устойчивости уравнения (7) представляет собой двойное строгое неравенство

$$-1 < A < 1.$$

Таким образом, сложность задачи об устойчивости исследуемого контура обусловлена сложностью вычисления константы Ляпунова A. Для получения этой константы нужно предварительно найти особую фундаментальную систему решений уравнения (7). Как известно из теории линейных диффенциальных уравнений, фундаментальная система любого линейного дифференциального уравнения второго порядка состоит из любых двух линейно независимых решений этого уравнения. Имеется бесконечное множество фундаментальных систем решений одного и того же линейного дифференциального уравнения. Каждое решение $x(\tau)$ однозначно задается своими начальными условиями: $x(\tau_0)$ и $\frac{dx(\tau_0)}{d\tau}$. Общепринятым является выбор $\tau_0 = 0$, тогда начальные условия задаются двумя числами: $x(0)$ и $\frac{dx(0)}{d\tau}$.

Для вычисления константы A требуется особая фундаментальная система решений, начальные условия для отыскания одного из них $(x_1(\tau))$ задаются следующим образом: $x_1(0) = 1$ и $\frac{dx_1(0)}{d\tau} = 0$; а второго $(x_2(\tau))$ — $x_2(0) = 0$ и $\frac{dx_2(0)}{d\tau} = 1$. Если известны два таких решения, и T — период коэффициента уравнения (7), то

$$A = \frac{1}{2}\left[x_1(T) + \frac{dx_2(T)}{d\tau}\right].$$

В исследуемом случае $T = 2\pi$, поэтому

$$A = \frac{1}{2}\left[x_1(2\pi) + \frac{dx_2(2\pi)}{d\tau}\right]. \qquad (9)$$

Воспользуемся численным методом Эйлера для решения дифференциального уравнения второго порядка с известными начальными условиями. Разобьем исследуемый интервал изменения переменной $\tau = 0\ldots 2\pi$ (период исследуемого уравнения (7)) на n подынтервалов (равных или неравных). Если n — достаточно большое число, то в пределах каждого достаточно малого подынтервала функцию переменной τ можно заменить ее значением в любой из точек этого подынтервала. То есть, на любом подынтервале достаточно малой длины имеем дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. В пределах первого подынтервала решение строится по обычным правилам отыскания решения дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами по начальным условиям. Это решение в конце первого подынтервала задает начальные условия для поиска решения на втором подынтервале. Затем аналогично строится решение для второго подынтервала, которое, в свою очередь, определяет начальные условия для третьего подынтервала и т.д. Таким способом решение доводится до конца периода и приближенно находятся два числа: $x(2\pi)$ и $\frac{dx(2\pi)}{d\tau}$. Степень приближения зависит от длин подынтервалов и скорости изменения коэффициента уравнения (7) в каждом подынтервале.

Доказано [5], что чем меньше подынтервалы, тем точнее полученное итерационное решение. Если длины подынтервалов стремятся к нулю, то приближенное решение стремится к точному. Погрешности конкретных приближенных решений решений могут быть оценены [5]. Для задач об устойчивости точность решений должна быть высокой, поэтому при аналитической реализации итерационного метода возникает необходимость проведения большого числа промежуточных вычислений. Громоздкость этой задачи преодолевается численными расчетами на компьютере.

Для анализа устойчивости параметрических колебаний в исследуемом контуре при различных величинах безразмерных параметров B и m рассчитаем константу Ляпунова (9) уравнения (7) для отдельных пар значений параметров B и m в пределах: $B = 0.05\ldots 0.95$ и $m = 0.05\ldots 0.95$ с равномерным шагом 0.05. Интервал изменения параметра $\tau = 0\ldots 2\pi$ разбивался на $N = 1\,000\,000$ равных подынтевалов, последовательное решение уравнения на которых позволяло получить значения $x_1(2\pi)$ и $\frac{x_2(2\pi)}{\tau}$.

Таким образом константа Ляпунова была вычислена для 361 точки в плоскости параметров m и B. Результаты представлены в таблицах 1 и 2. Качественно анализ устойчивости удобно провести с использованием графиков константы Ляпунова A как функции одного из параметров при фиксированном значении другого. Семейство кривых типа $A = A(m)$ при постоянных значениях параметра $B \le 0.25$ представлено на рис. 2 и $B \ge 0.25$ — на рис. 3. На рис. 4 представлены некоторые кривые семейства $A = A(B)$. На этих графиках жирными прямыми $A = -1$ и $A = 1$ показаны границы полосы устойчивости уравнения (7).

При параметризующей частоте вдвое превышающей собственную частоту контура $\left(B = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^2 = 0.25\right)$ не существует коэффициента модуляции емкости m при котором колебания в параметрическом контуре были бы устойчивы, что связано со значениями константы Ляпунова $A < -1$. При возрастании B от значения 0.25 диапазон значений m, в котором $A < -1$, быстро сужается, и для $B > 0.296$ константа Ляпунова $A > -1$ при любых m в исследуемом диапазоне.

При $0.3 \le B \le 0.525$ константа Ляпунова находится в диапазоне устойчивости при любых m. При $B > 0.525$ константа Ляпунова A достигает единицы только в точках лежащих на одной кривой (см. таблицу 2), то есть области нестабильности отсутствуют.

При значениях параметра $B < 0.25$ область, где $A < -1$, простирается ко все меньшим значениям B (то есть, к более высоким параметризующим частотам) при увеличении коэффициента модуляции конденсатора m. При $m > 0.933$ область с $A < -1$ покрывает всю рассматриваемую область значений $B < 0.25$.

Таким образом численным методом получено решение важнейшей для радиоэлектроники (особенно радиосвязи) задачи об устойчивости параметрического контура с гармонически модулированной емкостью. такое решение может быть без особых проблем обобщено на более сложные случаи.

Заметим, однако, что имеет значение не задача об устойчивости уравнения (7), а аналогичная задача для уравнения (4). По этому поводу можно констатировать, что если устойчиво уравнение (7), то уравнение (4) тем более устойчиво. Если уравнение (7) неустойчиво, то в общем случае задача об устойчивости уравнения (4) остается нерешенной. Тогда требуется не только обнаружить факт неустойчивости уравнения (7), но и вычислить максимальную константу Ляпунова A его решений.

Таблица 1

Константа Ляпунова A при $B \le 0.5$

т\B	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
0.05	0.1642	–0.4055	–0.760	–0.9466	–1.0008	–0.9557	–0.8387	–0.6726	–0.4762	–0.2649
0.10	0.1614	–0.4095	–0.765	–0.9500	–1.0030	–0.9566	–0.8382	–0.6707	–0.4731	–0.2609
0.15	0.1567	–0.4163	–0.771	–0.9559	–1.0069	–0.9582	–0.8373	–0.6675	–0.4679	–0.2540
0.20	0.1499	–0.4259	–0.781	–0.9641	–1.0124	–0.9603	–0.8360	–0.6629	–0.4604	–0.2441
0.25	0.1410	–0.4387	–0.794	–0.9749	–1.0195	–0.9630	–0.8340	–0.6566	–0.4503	–0.2311
0.30	0.1297	–0.4549	–0.811	–0.9884	–1.0283	–0.9661	–0.8314	–0.6484	–0.4374	–0.2144
0.35	0.1157	–0.4748	–0.831	–1.0049	–1.0389	–0.9696	–0.8277	–0.6380	–0.4212	–0.1937
0.40	0.0986	–0.4990	–0.855	–1.0246	–1.0512	–0.9734	–0.8226	–0.6248	–0.4012	–0.1684
0.45	0.0778	–0.5282	–0.884	–1.0479	–1.0655	–0.9771	–0.8158	–0.6083	–0.3765	–0.1376
0.50	0.0527	–0.5633	–0.919	–1.0752	–1.0817	–0.9805	–0.8064	–0.5874	–0.3462	–0.1003
0.55	0.0223	–0.6055	–0.960	–1.1072	–1.0999	–0.9832	–0.7937	–0.5611	–0.3088	–0.5515
0.60	–0.0151	–0.6568	–1.009	–1.1447	–1.1201	–0.9843	–0.7763	–0.5274	–0.2625	–0.2652
0.65	–0.0613	–0.7196	–1.069	–1.1886	–1.1422	–0.9826	–0.7520	–0.4840	–0.2045	0.6688
0.70	–0.1199	–0.7981	–1.142	–1.2406	–1.1659	–0.9762	–0.7178	–0.4269	–0.1309	0.1498
0.75	–0.1964	–0.8986	–1.233	–1.3027	–1.1902	–0.9617	–0.6685	–0.3500	–0.0358	0.2534
0.80	–0.3006	–1.0325	–1.350	–1.3777	–1.2129	–0.9323	–0.5946	–0.2433	0.0903	0.3848
0.85	–0.4528	–1.2224	–1.509	–1.4702	–1.2279	–0.8744	–0.4782	–0.0881	0.2626	0.5535
0.90	–0.7044	–1.5223	–1.743	–1.5866	–1.2170	–0.7532	–0.2781	0.1531	0.5075	0.7680
0.95	–1.2492	–2.1237	–2.156	–1.7288	–1.1017	–0.4477	0.1279	0.5693	0.8549	0.9867

Таблица 2

Константа Ляпунова A при $B \geq 0.5$

$m \backslash B$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
0.05	–0.2649	–0.0512	0.1556	0.3477	0.5197	0.6677	0.7893	0.8833	0.9492	0.9877
0.10	–0.2609	–0.0463	0.1608	0.3531	0.5248	0.6725	0.7935	0.8865	0.9515	0.9889
0.15	–0.2540	–0.0382	0.1695	0.3620	0.5335	0.6805	0.8003	0.8920	0.9552	0.9907
0.20	–0.2441	–0.0267	0.1820	0.3747	0.5458	0.6917	0.8100	0.8995	0.9603	0.9930
0.25	–0.2311	–0.0115	0.1984	0.3914	0.5618	0.7063	0.8223	0.9091	0.9665	0.9956
0.30	–0.2144	0.0078	0.2191	0.4123	0.5818	0.7242	0.8374	0.9205	0.9736	0.9980
0.35	–0.1937	0.0315	0.2444	0.4376	0.6058	0.7456	0.8550	0.9334	0.9812	0.9996
0.40	–0.1684	0.0604	0.2749	0.4679	0.6341	0.7705	0.8751	0.9476	0.9887	0.9998
0.45	–0.1376	0.0950	0.3111	0.5035	0.6670	0.7988	0.8973	0.9624	0.9951	0.9973
0.50	–0.1003	0.1365	0.3539	0.5449	0.7046	0.8304	0.9210	0.9769	0.9993	0.9905
0.55	–0.5515	0.1859	0.4042	0.5928	0.7471	0.8648	0.9454	0.9896	0.9993	0.9771
0.60	–0.2652	0.2450	0.4632	0.6477	0.7943	0.9014	0.9689	0.9983	0.9920	0.9535
0.65	0.6688	0.3158	0.5322	0.7099	0.8455	0.9382	0.9885	0.9990	0.9729	0.9144
0.70	0.1498	0.4008	0.6125	0.7794	0.8991	0.9719	0.9995	0.9856	0.9345	0.8514
0.75	0.2534	0.5033	0.7051	0.8547	0.9509	0.9957	0.9927	0.9468	0.8640	0.7508
0.80	0.3848	0.6269	0.8094	0.9303	0.9908	0.9955	0.9501	0.8620	0.7391	0.5895
0.85	0.5535	0.7732	0.9180	0.9898	0.9940	0.9388	0.8339	0.6900	0.5175	0.3269
0.90	0.7680	0.9299	0.9969	0.9790	0.8891	0.7424	0.5546	0.3408	0.1153	–0.1093
0.95	0.9867	0.9818	0.8656	0.6674	0.4167	0.1411	–0.1351	–0.3921	–0.6143	–0.7910

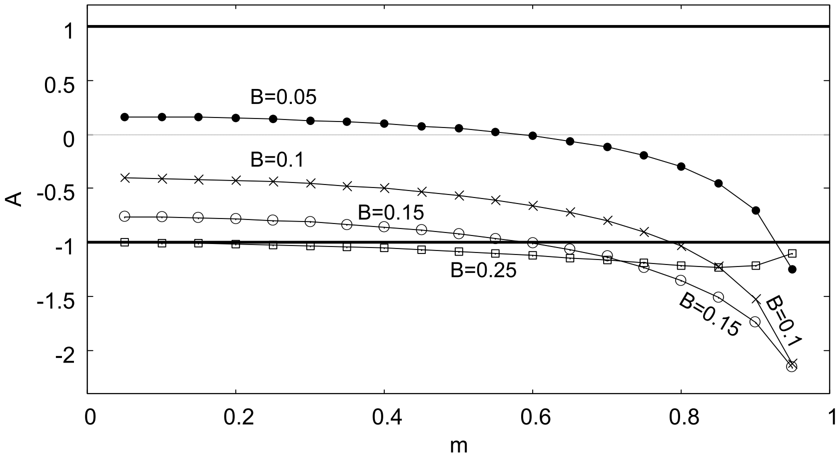

Рис. 2. Константа Ляпунова как функция коэффициента модуляции емкости m при некоторых $B \leq 0.25$

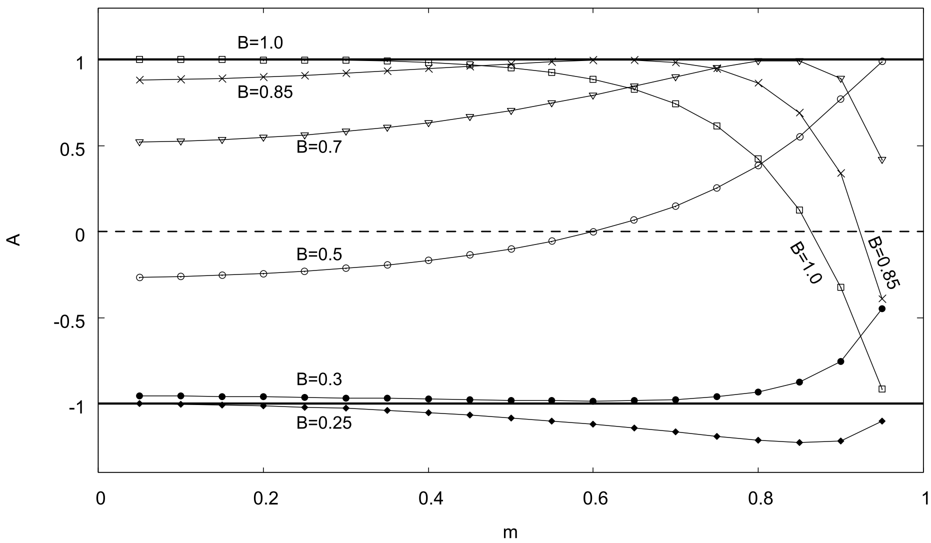

Рис. 3. Константа Ляпунова как функция коэффициента модуляции емкости m при некоторых $B \geq 0.25$

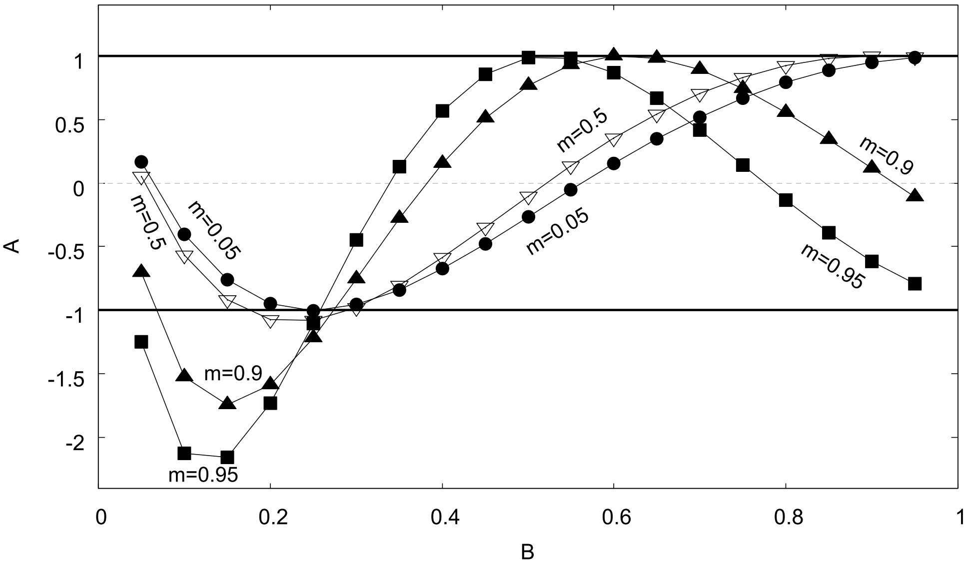

Рис. 4. Константа Ляпунова как функция коэффициента B при некоторых значениях коэффициента модуляции емкости m

4. БОЛЕЕ ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА

Целесообразно отметить, что изложенный выше метод численного нахождения константы Ляпунова A для анализа устойчивости принципиально может быть распространен на случай нелинейного контура. В этом легко убедиться, если принять во внимание сформулированный полвека назад, но не замеченный широкой преподавательской и научной общественностью принцип линейного включения [6]. Он утверждает, что любое решение нелинейного уравнения может быть представлено как решение специально подобранного линейного уравнения. В таком случае следует рассматривать параметрический контур максимально общего вида.

Применительно к схеме на рисунке 1 это означает, что все элементы контура изменяются во времени периодически с одним и тем же периодом T, то есть

$$C(t+T) = C(t),\ \ R(t+T) = R(t), \\ L(t+T) = L(t). \tag{10}$$

Тогда для параметрического контура вместо (2) будем иметь уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{t_m R(\tau) + \dot{L}(\tau)}{L(\tau)}\frac{dx}{d\tau} + \frac{t_m^2}{L(\tau)C(\tau)}x = 0 \tag{11}$$

где $\dot{L}(\tau) = \dfrac{dL(\tau)}{d\tau}$.

Применяя замену переменных

$$x = y\exp\left[-\frac{1}{2}\int\left(\frac{t_m R + \dot{L}}{L}\right)d\tau\right],$$

получим вместо (11)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(\tau)y = 0,$$

где периодический коэффициент имеет следующий вид

$$f(\tau) = \frac{t_m^2}{LC} - \frac{1}{4}\left(\frac{t_m R + \dot{L}}{L}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{t_m R + \dot{L}}{L}\right).$$

Следовательно, задача о параметрическом контуре самого общего вида с одинаковым периодом изменения всех переменных характеристик свелась к усложнению функции $f(\tau)$ по сравнению с задачей, в которой периодически изменялась только емкость, при этом периодичность функции как и в (5) сохраняется, то есть

$$f(\tau + T) = f(\tau).$$

Принципиальных трудностей для применения численных методов здесь не возникает, требуется лишь условие

$$f(\tau) \geq 0.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение расчетных мощностей современной компьютерной техники для численного решения уравнения последовательного параметрического контура позволило рассмотреть вопрос о его устойчивости на основе первого метода Ляпунова, который требует при своей реализации совершения громадного числа последовательных однотипных математических операций, но обеспечивает исчерпывающий ответ об устойчивости. Проведенные исследования охватывают широкий диапазон интересных с точки зрения практической реализации основных характеристик параметрического контура: глубины модуляции амплитуды переменной емкости и отношения модулирующей и собственной частот. Численные расчеты, лежащие в основе решения вопроса об устойчивости, выполнены на более высоком уровне точности в сравнении с ранее опубликованными в открытой научной литературе исследованиями.

Помимо подробного анализа задачи об устойчивости последовательного параметрического контура с периодической емкостью отмечена возможность сведения к этой задаче более общего случая свободных колебаний в параметрическом контуре, величины активного сопротивления, емкости и индуктивности которого периодически изменяются с одинаковой частотой.

Решение задачи об устойчивости параметрического контура является не только важной теоретической основой для разработки неподверженных паразитному самовозбуждению радиоцепей, но и инструментом исследования целого класса процессов в нелинейных системах, которые посредством принципа линейного включения [6] могут быть сведены к процессам в линейных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко В. М.* Малошумящие входные цепи СВЧ приемных устройств / В. М. Руденко, Д. Е. Халятин, В.Р. Магнушевский — М.: Связь, 1971. — 279 с.

2. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье / Н.В. Мак-Лахлан. — М.: ИЛ, 1953. — 476 стр.

3. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений / А. М. Ляпунов — Т. 2. — М.: Изд. АН СССР, 1956. — 475 с.

4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Наука, 1965. — 703 с.

5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М.: Изд. МГУ: ЧеРо, 1998. — 480 с.

6. *Былов Б. Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, — М.: Наука, 1966. — 485 с.

Белоглазов В. В. — научный сотрудник, соискатель, Всероссийский научно-исследовательский институт МВД России
E-mail: VVBeloglazov@freemail.ru
Тел.: 220-86-25

Бирюк Н. Д. — профессор, физический факультет, кафедра экспериментальной физики, Воронежский государственный университет
E-mail: lidia@vmail.ru
Тел.: 220-86-25

Глухов И. Л. — ассистент, физический факультет, кафедра экспериментальной физики, Воронежский государственный университет
E-mail: GlukhovOfficial@mail.ru
Тел.: 220-86-25

Beloglazov V. V. — research worker, applicant, subdepart-ment of experimental physics, All-Russian Scientific Research Institute of Russian Ministry of Internal Affairs
E-mail: VVBeloglazov@freemail.ru
Tel: +7(473) 220-86-25

Birjuk N. D. — full professor, Department of Physics, subdepartment of experimental physics, Voronezh State University
E-mail: lidia@vmail.ru
Tel: +7(473) 220-86-25

Glukhov I. L. — assistant, Department of Physics, subdepartment of experimental physics, Voronezh State University
E-mail: Glukhov@phys.vsu.ru
Tel: +7(473) 220-86-25