УДК 517.988.8

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА С ПОСТОЯННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ СО СХЕМОЙ КРАНКА—НИКОЛСОН ПО ВРЕМЕНИ

Е. В. Шепилова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 6.06.2011 г.

Аннотация. Линейная задача типа Шредингера с постоянным оператором в сепарабельном гильбертовом пространстве решается приближенно проекционно-разностным методом. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галеркина с ориентацией на конечномерные подпространства типа конечных элементов, а по времени используется схема Кранка—Николсон. Установлены оценки погрешности приближенных решений в норме исходного пространства, а также в энергетической норме. Найденные оценки позволяют получать не только сходимость приближенных решений к точному, но и дают числовые характеристики скорости сходимости.
Ключевые слова: уравнение типа Шредингера, проекционно-разностный метод, схема Кранка—Николсон.

Annotation. A linear problem of the Shredinger type is solved approximately a projective-difference method in a separable Hilbert space. Discretisation of that problem on the space is spent by the Galerkin method with orientation to finite-dimensional subspaces of finite element type. Discretisation of that problem on the time is spent by the Krank—Nicolson scheme. Estimations of error for the approximated solutions are established. That estimations allow to receive not only convergence of the approximated solutions to exact, but also give numerical performances of a velocity of convergence.
Keywords: the Shredinger type equation, a projective-difference method, Krank—Nicolson scheme.

ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

При постановке задачи будем придерживаться подхода, систематически используемого Ж.-Л. Лионсом (см., напр., [1] и [2]).

Пусть даны два комплексных сепарабельных гильбертовых пространства V и H, причем $V \subset H$ и вложение плотно и непрерывно. Пусть V' и H' — пространства двойственные к V и H соответственно, тогда $H' \subset V'$ и данное вложение плотно и непрерывно. Далее по теореме Рисса проводится отождествление H и H'. Таким образом, приходим к включениям $V \subset H \equiv H' \subset V'$, где каждое пространство плотно в последующем и вложения непрерывны [3]. На $u, v \in V$ определено семейство симметричных полуторалинейных форм $a(u,v)$. Предположим, что для всех $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$| a(u,v) | \leq M_1 \parallel u \parallel_V \parallel v \parallel_V, \; a(u,u) \geq \alpha \parallel u \parallel_V^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что $a(u,v) = (Au, v)$ и $\parallel A \parallel_{V\to V'} \leq M_1$. Здесь под выражением (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Заметим, если $z \in H$, то выражение (z,v) совпадает со скалярным произведением в H.

Для заданной на $[0,T]$, где $T < \infty$, со значениями в V' функции $f(t)$ и элемента u^0 рассмотрим вариационную задачу: найти функцию $u(t)$ со значениями в V такую, что почти всюду на $[0,T]$ для всех $v \in V$ выполнено

$$\begin{gathered}(u'(t), v) + ia(u(t), v) = (f(t), v),\\ u(0) = u^0 \in V.\end{gathered} \quad (2)$$

Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

Очевидно, что задача (2) равносильна задаче Коши в пространстве V':

$$u'(t) + iAu(t) = f(t), \; u(0) = u^0 \in V. \quad (3)$$

Вопрос о существовании и единственности решения задачи (3), при различных предположениях на u^0 и f, рассматривался в [1] и [4]. Так в [1] приводится следующая теорема о слабой разрешимости задачи (3).

Теорема 1. *Пусть для задачи (3) выполнены условия, перечисленные выше. Дополнительно предположим, что* $f \in L_2(0,T;H)$ *и существует* $f' \in L_2(0,T;V')$. *Тогда задача (3) имеет единственное решение* $u(t)$ *такое, что* $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$, *уравнение удовлетворяется почти всюду на* $[0,T]$ *и выполняется начальное условие.*

Решение задачи (3), существование которого утверждается в теореме 1, часто называют "слабым решением" задачи (3). Кроме того, в [1] и [2] приводятся примеры задач, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Отметим, что под пространством, например, $L_p(0,T;V)$ для $1 \le p < \infty$ понимается пространство функций $t \to u(t) \in V$, измеримых на $[0,T]$ и таких, что $\| u(t) \|_V^p$ суммируема на $[0,T]$ по Лебегу. Под $C([0,T],H)$ понимается пространство функций $t \to u(t) \in H$, непрерывных на $[0,T]$ (см., напр., [1]).

В [4] указаны условия более гладкой разрешимости задачи (3).

Определим приближенную задачу. Пусть V_h — конечномерное подпространство V, где параметр $h > 0$. Пусть P_h — ортогональный проектор в пространстве H на V_h. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму

$$\| u_h \|_{V_h'} = \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|_V = 1} | (u_h, v_h) | .$$

Оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ [5], для которого справедлива оценка

$$\| \overline{P}_h u \|_{V_h'} \le \| u \|_{V'} \text{для } u \in V'$$

и соотношение

$$(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v) \text{для } u \in V', v \in H.$$

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ разбиение отрезка $[0,T]$. Задаче (3) сопоставим проекционно-разностную задачу в V_h

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau_k} + i\overline{P}_h A \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} = \\ = \overline{P}_h \frac{f(t_k) + f(t_{k-1})}{2}, \tag{4}$$

где элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{1,N}$.

Докажем однозначную разрешимость задачи (4), то есть обратимость в V_h оператора $I + i\tau_k (2)^{-1} \overline{P}_h A$. Действительно, пусть $v_h \in V_h$ такой, что

$$(I + i\tau_k (2)^{-1} \overline{P}_h A) v_h = 0.$$

Отсюда получим

$$(v_h + i\tau_k (2)^{-1} \overline{P}_h A v_h, v_h) = \\ = \| v_h \|_H^2 + i\tau_k (2)^{-1} a(v_h, v_h) = 0.$$

Таким образом, $v_h = 0$ и задача (4) однозначно разрешима.

Далее определим гильбертово пространство $V(A) = \{u, v \in V | (u,v)_{V(A)} = a(u,v)\}$. Рассмотрим $Q_h(A)$ — ортогональный проектор в пространстве $V(A)$ на V_h. Заметим, что для $u \in V$ и $v_h \in V_h$ выполнено $a(u, v_h) = a(Q_h(A)u, v_h)$. Тогда для любого $u \in V$

$$\overline{P}_h A u = \overline{P}_h A\, Q_h(A) u.$$

В [6] показано, что для любого $u \in V$ справедлива оценка

$$\| [I - Q_h(A)] u \|_V \le c \| (I - Q_h) u \|_V, \tag{5}$$

где Q_h — ортогональный проектор в пространстве V на V_h, а константа c не зависит от $u \in V$ и h.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В НОРМЕ $C([0,T],H)$.

Лемма 1. *Пусть* $u_m^h (m = \overline{1,N})$ *— решение приближенной задачи (4). Тогда справедлива следующая оценка*

$$\| u_m^h \|_H^2 \le c \{ \| u_0^h \|_H^2 + \sum_{k=1}^m \tau_k \| f_k^h \|_H^2 \}, \tag{6}$$

где $f_k^h = \overline{P}_h (f(t_k) + f(t_{k-1}))/2$, $m = \overline{1,N}$.

Доказательство. Умножим (4) скалярно в H на $(u_k^h + u_{k-1}^h)/2$ и возьмем удвоенную вещественную часть, тогда

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau_k}, \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right) = \\ = 2\,\mathrm{Re}\left(f_k^h, \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right). \tag{7}$$

Учитывая, что

$$(u_k^h - u_{k-1}^h, u_k^h + u_{k-1}^h) = \\ = \| u_k^h \|_H^2 - \| u_{k-1}^h \|_H^2 + i2\,\mathrm{Im}(u_k^h, u_{k-1}^h),$$

из равенства (7) получим

$$(\tau_k)^{-1} (\| u_k^h \|_H^2 - \| u_{k-1}^h \|_H^2) = \mathrm{Re}(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h). \tag{8}$$

Оценим правую часть (8).

$$\mathrm{Re}(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h) \le (2)^{-1} \| f_k^h \|_H^2 + $$
$$+ (2)^{-1} \| u_k^h + u_{k-1}^h \|_H^2 \le \tag{9}$$
$$\le (2)^{-1} \| f_k^h \|_H^2 + \| u_k^h \|_H^2 + \| u_{k-1}^h \|_H^2 .$$

Подставим (9) в (8) и результат просуммируем по k от 1 до $m \le N$. Тогда

$$\| u_m^h \|_H^2 \le \| u_0^h \|_H^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \tau_k \| f_k^h \|_H^2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \tau_k \| u_k^h \|_H^2 + \sum_{k=1}^{m} \tau_k \| u_{k-1}^h \|_H^2 .$$

Заметив, что

$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k \| u_{k-1}^h \|_H^2 \le$$
$$\le c_1 \tau_1 \| u_0^h \|_H^2 + c_2 \sum_{k=1}^{m} \tau_k \| u_k^h \|_H^2,$$

получим оценку

$$\| u_m^h \|_H^2 \le c_1 \left(\| u_0^h \|_H^2 + \sum_{k=1}^{m} \tau_k \| f_k^h \|_H^2 \right) + $$
$$+ c_2 \sum_{k=1}^{m} \tau_k \| u_k^h \|_H^2 . \tag{10}$$

В (10) выделим суммарное неравенство для $\| u_m^h \|_H^2$ и в результате получим оценку (6) решения приближенной задачи (4).

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ — решение задачи (3) такое, что $u' \in L_2(0,T;V)$ и существует $u'' \in L_1(0,T;H)$. Пусть u_k^h — решение приближенной задачи (4), где $u_0^h = P_h u^0$. Тогда справедлива следующая оценка погрешности, в которой $\tau = \max \tau_k$,*

$$\max_{1 \le k \le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H^2 \le c_1 \sum_{k=1}^{N} (\tau_k)^{-1} \times$$
$$\times \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_H^2 + \tag{11}$$
$$+ c_2 \int_0^T \| [I - Q_h(A)] u(t) \|_H^2 \, dt +$$
$$+ c_3 \int_0^T \| [I - Q_h(A)] u'(t) \|_H^2 \, dt.$$

Доказательство. К уравнению (3) применим оператор $\overline{P}_h$, полученное равенство возьмем в точке t_k и преобразуем к следующему виду:

$$i\overline{P}_h A w_h(t_k) = \overline{P}_h f(t_k) - \overline{P}_h u'(t_k), \tag{12}$$

где $w_h(t) = Q_h(A) u(t), k = \overline{1,N}$. Обратим внимание, что последнее равенство имеет смысл, так как из предположений леммы 2 следует $u \in C([0,T],V)$ и $u' \in C([0,T],H)$.

Из (12) и уравнения (4) следует тождество

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau_k} + i\overline{P}_h A \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} =$$
$$= \frac{w_h(t_k) - w_h(t_{k-1})}{\tau_k} - \overline{P}_h \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \tag{13}$$

для $z_k^h = w_h(t_k) - u_k^h$ ($k = \overline{1,N}$).

Далее применим оценку (6) к z_m^h ($m = \overline{1,N}$), удовлетворяющему (13). Получим неравенство

$$\| z_m^h \|_H^2 \le c \| z_0^h \|_H^2 + c \sum_{k=1}^{m} \tau_k \times$$
$$\times \left\| \frac{w_h(t_k) - w_h(t_{k-1})}{\tau_k} - \overline{P}_h \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right\|_H^2 = \tag{14}$$
$$= c\mathrm{I}_1 + c\mathrm{I}_2.$$

Рассмотрим и оценим каждое слагаемое в правой части (14).

$$\mathrm{I}_1 = \| z_0^h \|_H^2 = \| Q_h(A) u(0) - u_0^h \|_H^2 =$$
$$= \| Q_h(A) u^0 - P_h u^0 \|_H^2 \le \| [I - Q_h(A)] u^0 \|_H^2 . \tag{15}$$

$$\mathrm{I}_2 = \sum_{k=1}^{m} \tau_k \| (\tau_k)^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} w_h'(t) dt -$$
$$- P_h \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \|_H^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \tau_k \| (\tau_k)^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [w_h'(t) - P_h u'(t)] dt + \tag{16}$$
$$+ (\tau_k)^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [P_h u'(t) -$$
$$- P_h \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}] dt \|_H^2 .$$

Из (16) получим оценку

$$\mathrm{I}_2 \le 2 \sum_{k=1}^{m} (\tau_k)^{-1} \times$$
$$\times \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [I - Q_h(A)] u'(t) dt \right\|_H^2 + 2 \sum_{k=1}^{m} (\tau_k)^{-1} \times$$
$$\times \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_H^2 \le \tag{17}$$
$$\le 2 \int_0^T \| [I - Q_h(A)] u'(t) \|_H^2 \, dt + 2 \sum_{k=1}^{N} (\tau_k)^{-1} \times$$
$$\times \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_H^2 .$$

Таким образом, из (14), (15) и (17) следует оценка

$$\| z_m^h \|_H^2 \le c_1 \| [I - Q_h(A)]u^0 \|_H^2 +$$
$$+c_2 \int_0^T \| [I - Q_h(A)]u'(t) \|_H^2 \, dt + c_3 \sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \times \qquad (18)$$
$$\times \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_H^2 .$$

Далее заметим, что

$$u(t_m) - u_m^h = [u(t_m) - w_h(t_m)] + z_m^h,$$

тогда справедлива оценка

$$\| u(t_m) - u_m^h \|_H^2 \le 2 \| [I - Q_h(A)]u(t_m) \|_H^2 + 2 \| z_m^h \|_H^2 .$$

Следовательно, отсюда и из (18) получим

$$\| u(t_m) - u_m^h \|_H^2 \le$$
$$\le c_1 \max_{0 \le t \le T} \| [I - Q_h(A)]u(t) \|_H^2 +$$
$$+c_2 \int_0^T \| [I - Q_h(A)]u'(t) \|_H^2 \, dt + c_3 \sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \times \qquad (19)$$
$$\times \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_H^2 .$$

Окончательная оценка (11) получается теперь из (19) и оценки из [1]:

$$\max_{0 \le t \le T} \| [I - Q_h(A)]u(t) \|_H^2 \le$$
$$\le M \int_0^T (\| [I - Q_h(A)]u(t) \|_H^2 +$$
$$+ \| \{[I - Q_h(A)]u(t)\}' \|_H^2) dt.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2. Пусть решение $u(t)$ задачи (3) такое, что $u'' \in L_p(0,T;H)$, где $1 \le p \le 2$. Тогда оценка погрешности (11) будет следующей*

$$\max_{1 \le k \le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H^2 \le c_1 \tau^{3-2/p} \times$$
$$\times \left(\int_0^T \| u''(t) \|_H^p \, dt \right)^{2/p} +$$
$$+c_2 \int_0^T \| [I - Q_h(A)]u(t) \|_H^2 \, dt + \qquad (20)$$
$$+c_3 \int_0^T \| [I - Q_h(A)]u'(t) \|_H^2 \, dt.$$

Если же решение $u(t)$ задачи (3) такое, что существует $u''' \in L_p(0,T;H)$, где $1 \le p \le 2$, то справедлива следующая оценка погрешности

$$\max_{1 \le k \le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H^2 \le c_1 \tau^{5-2/p} \times$$
$$\times \left(\int_0^T \| u'''(t) \|_H^p \, dt \right)^{2/p} +$$
$$+c_2 \int_0^T \| [I - Q_h(A)]u(t) \|_H^2 \, dt + \qquad (21)$$
$$+c_3 \int_0^T \| [I - Q_h(A)]u'(t) \|_H^2 \, dt.$$

Доказательство. Для обоснования (20) в (11) оценим первое слагаемое следующим образом:

$$\sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}] dt \right\|_H^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \left\| 2^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\int_{t_{k-1}}^{t} u''(s) ds - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_t^{t_k} u''(s) ds \right] dt \right\|_H^2 = \sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \| \times \qquad (22)$$
$$\times \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2t + t_k) u''(t) dt \|_H^2 \le$$
$$\le \tau \left(\int_0^T \| u''(t) \|_H \, dt \right)^2 ,$$

так как $|t_{k-1} - 2t + t_k| \le \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k]$ и $\tau = \max \tau_k$. Теперь (20) следует из (11), (22) и оценки

$$(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \| u''(t) \|_H \, dt)^2 \le$$
$$\le \tau_k^{2-2/p} (\int_{t_{k-1}}^{t_k} \| u''(t) \|_H^p \, dt)^{2/p}. \qquad (23)$$

Для обоснования (21) следует иначе оценить первое слагаемое в правой части (11).

$$\sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_H^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2t + t_k) u''(t) dt \right\|_H^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \left\| 4^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u''(t) d[\tau_k^2 - \right. \qquad (24)$$
$$\left. - (t_{k-1} - 2t + t_k)^2] \right\|_H^2 = \sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \times$$
$$\times \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} ((t_{k-1} - 2t + t_k)^2 - \tau_k^2) u'''(t) dt \right\|_H^2 .$$

Учитывая, что $| (t_{k-1} - 2t + t_k)^2 - \tau_k^2 | \le \tau_k^2$ для $t \in [t_{k-1}, t_k]$, а также оценку (23), продолжим (24)

$$\sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_H^2 \le$$
$$\le \sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} | (t_{k-1} - 2t + t_k)^2 - \right.$$
$$\left. - \tau_k^2 \| u'''(t) \|_H \, dt \right)^2 \le$$
$$\le c_1 \sum_{k=1}^N (\tau_k)^3 \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \| u'''(t) \|_H \, dt \right)^2 \le$$
$$\le c_1 \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \| u'''(t) \|_H^p \, dt \right)^{2/p} .$$

Остальные слагаемые в оценке (21) получаются также, как в лемме 2.

Для получения сходимости погрешности к нулю предположим, что последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$ — предельно плотна в V то, есть $\| (I-Q_h)v \|_V \to 0$ при $h \to 0$ для всех $v \in V$. Тогда из теоремы 2 получим

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть $\{V_h\}$ — предельно плотная в V последовательность подпространств. Тогда при $h \to 0$ и $\tau \to 0$*

$$\max_{1\le k\le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H \to 0.$$

Доказательство. Данный предельный переход следует из оценки (20) или (21), непрерывного вложения $V \subset H$, а также оценки (5).

Далее покажем, как из оценок (20), (21) можно получить скорость сходимости погрешности к нулю и по пространству.

Определим множество

$$D[A] = \{v \in V | Av \in H\}. \qquad (25)$$

Пусть существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $D[A] \subset E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ [1]. Потребуем от оператора A выполнение следующего естественного свойства: существует $\gamma > 0$, что

$$\| u \|_E \le \gamma \| Au \|_H, \, u \in D[A].$$

В приложениях оператором A может быть, например, симметричный равномерно эллиптический оператор второго порядка в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей, порожденный дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле. Тогда $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V' = W_2^{-1}(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задано краевое условие Неймана, то $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega)$. Можно рассматривать и эллиптические операторы произвольного $2m$ порядка, где $m \ge 1$.

Предположим теперь, что семейство конечномерных подпространств $V_h \subset V$ обладает следующим аппроксимационным свойством

$$\| (I-Q_h)v \|_V \le ch \| v \|_E, \qquad (26)$$

где $c > 0$ не зависит от $v \in E$ и h. Заметим, что условие (26) типично для подпространств V_h типа "конечных элементов" [7].

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и решение задачи (3) такое, что $u'' \in L_p(0,T;H)$, где $1 \le p \le 2$, и $u' \in L_2(0,T;V)$. Пусть также выполнено свойство (26). Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{1\le k\le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H^2 \le$$

$$\le c_1 \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \| u''(t) \|_H^p \, dt \right)^{2/p} + c_2 h^2 \times \qquad (27)$$

$$\times \left\{ \int_0^T \| u(t) \|_V^2 \, dt + \int_0^T \| u'(t) \|_V^2 \, dt \right\}.$$

Если же решение задачи (3) такое, что существует $u''' \in L_p(0,T;H)$, где $1 \le p \le 2$, и $u' \in L_2(0,T;V)$, то справедлива следующая оценка погрешности

$$\max_{1\le k\le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H^2 \le c_1 \tau^{5-2/p} \times$$

$$\times \left(\int_0^T \| u'''(t) \|_H^p \, dt \right)^{2/p} + \qquad (28)$$

$$+ c_2 h^2 \left\{ \int_0^T \| u(t) \|_V^2 \, dt + \int_0^T \| u'(t) \|_V^2 \, dt \right\}.$$

Доказательство. Оценки (27), (28) следуют из (20), (21), (26) и оценки

$$\| [I - Q_h(A)] u \|_H \le M_1 \alpha c h \| (I - Q_h) u \|_V$$

для всех $u \in V$, установленной в [8].

Осталось заметить, что автором были получены оценки погрешности и в более сильной норме $C([0,T],V)$, и для случая оператора, зависящего от времени [9].

Автор выражает благодарность В. В. Смагину за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 415 с.

3. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М. : Мир, 1977. — 352 с.

4. *Шепилова Е. В.* О разрешимости вариационной задачи для уравнения типа Шредингера / Е. В. Шепилова // Труды математического факультета. — 2005. — 9. — С. 114—123.

5. *Вайникко Г. М.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11. — 7. — С. 1269—1277.

6. *Смагин В. В.* Оценки погрешности полудискретных приближений по Галеркину для параболи-

ческих уравнений с краевым условием типа Неймана / В. В. Смагин // Известия вузов. Математика. — 1996. — 3(406). — С. 50—57.

7. *Марчук Г. И.* Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

8. *Смагин В. В.* Средне-квадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Журнал вычисл. математики и мат. физики. — 2000. — Т. 40. — 6. — С. 908—919.

9. *Шепилова Е. В.* О приближенном решении уравнения типа Шредингера проекционно-разностным методом с модифицированной схемой Кранка—Николсон по времени / Е. В. Шепилова // Вестник ВГУ. Серия: физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 179—183.

Шепилова Елена Владимировна — кандидат физико-математических наук, преподаватель, Воронежский государственный университет

Тел. 8-903-0303110

E-mail: elena_shepilova@mail.ru

Shepilova Elena Vladimirovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lecturer, Voronezh State University

Tel. 8-903-0303110

E-mail: elena_shepilova@mail.ru