УДК 517.955.8

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Е. А. Свиридова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.01.2011 г.

Аннотация. Работа посвящена изучению начально-краевой задачи, описывающей малые колебания сжимаемой вязкой жидкости с переменной стационарной плотностью. Подробно изучаются образы Лапласа её решения и доказываются некоторые оценки для них. Доказано существование классического решения и построен класс единственности. В статье определён порядок асимптотического убывания скорости движения при $t \to \infty$.
Ключевые слова: малые колебания жидкости, существование решения, асимптотическое поведение.

Abstract. This article is devoted to studying an initial-boundary value problem describing small fluctuations of compressible viscous fluid with variable stationary density. Laplace's images of the solution are investigated in detail and some estimates for them are proved. The existence of the classical solution is proved and the class of uniqueness is constructed in this article. Asymptotic behavior of velocity of this fluid in terms of $t \to \infty$ is defined here.
Key words: small fluctuations fluid, existence of solution, asymptotic behavior.

В работе изучается первая смешанная задача для линеаризованных уравнений, описывающих одномерное движение вязкой сжимаемой жидкости с переменной стационарной плотностью. Для $x > 0$, $t > 0$ рассматриваем задачу *

$$\begin{cases} \rho_0(x)\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial t} - \nu\dfrac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x} = f(t,x), \\ \alpha^2\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial t} + \rho_0'(x)U(t,x) + \rho_0(x)\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$U(t,x)\big|_{t=0} = P(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

$$U(t,x)\big|_{x=0} = 0, U(t,x)\big|_{x=\infty} = 0. \quad (2)$$

В данном случае $U(t,x), P(t,x)$ — соответственно скорость и отклонение от стационарного давления в частице жидкости, находящейся в момент $t > 0$ в точке $x > 0$; ν — динамический коэффициент вязкости среды; $\alpha^2 \neq 0$ — коэффициент сжимаемости жидкости; $\rho_0(x)$ — стационарная плотность.

С целью изучения разрешимости данной задачи и определения асимптотического поведения её решения при $t \to \infty$ в работе исследуются образы Лапласа функций $U(t,x), P(t,x)$, обозначенные соответственно $\hat{v}(\gamma,x)$, $\hat{p}(\gamma, x)$. Рассматриваемая система в образах Лапласа

$$\begin{cases} \rho_0(x)\gamma\hat{v}(\gamma,x) - \nu\dfrac{\partial^2 \hat{v}(\gamma,x)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \hat{p}(\gamma,x)}{\partial x} = f(\gamma,x), \\ \alpha^2\gamma\hat{p}(\gamma,x) + \rho_0'(x)\hat{v}(\gamma,x) + \rho_0(x)\dfrac{\partial \hat{v}(\gamma,x)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

будет нами сведена к одному уравнению, что позволит не только доказать теорему существования классического решения исходной задачи, но и определить порядок убывания по t функции $U(t,x)$ при $t \to \infty$. Существенным отличием рассматриваемой задачи от ранее изученных является наличие переменного коэффициента, а именно переменной плотности $\rho_0(x)$.

Вообще говоря, задачи теоретической гидродинамики изучаются довольно давно. Изучение это началось с исследования потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, а комплексный анализ обеспечил широкие возможности для определения их разрешимости. В них впервые исследовалось движение невязкой вращающейся жидкости. Наибольший интерес при качественном исследовании системы С. Л. Соболева представлял вопрос об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ этого решения. Однако в рамках теории идеальных жидкостей возникало множество парадоксов, что и привело в дальнейшем к появлению математической модели вязкой жидкости, которая описывается основными уравнениями Навье—Стокса. Следует заметить, что большинство результатов в рамках данной теории относятся к изучению линеаризованной системы уравнений Навье—Стокса, для которой ставятся разнообразные краевые задачи. Линеаризация уравнений движения сжимаемой жидкости была проведена в работах В. Н. Масленниковой и А. Н. Гузя. Хотя, конечно, прежде всего, изучались несжимаемые вязкие жидкости, для которых был получен целый ряд законченных результатов. Исследовались как стационарные задачи (работы Олквиста, Лерэ по линейным и нелинейным задачам соответственно), так и нестационарные (работы Хопфа, О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова, А. А. Киселёва др.). Методика изучения стабилизации решений краевых задач для параболических уравнений, развитая в работах В. П. Михайлова, А. К. Гущина, Ф. Х. Мукминова была применена Ф. Х. Мукминовым для изучения свойств решения первой смешанной задачи для системы нестационарных уравнений Навье—Стокса (без учета вращения среды). В этой работе получена равномерная оценка убывания решения со скоростью $t^{-3/4}$. Следует отметить результаты по стабилизации решений задач Коши для параболических уравнений, содержащиеся в работах Ф. О. Порпера и В. Д. Репникова. Важным этапом развития гидродинамики идеальной жидкости стали работы С. Л. Соболева. В них впервые исследовалось движение невязкой вращающейся жидкости. Наибольший интерес при качественном исследовании системы С. Л. Соболева представлял вопрос об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ этого решения. В работах Р. А. Александряна, Т. И. Зеленяка, В. Н. Масленниковой, М. Е. Боговского, В. П. Маслова, В. Г. Лежнева исследовалась асимптотика при $t \to \infty$ решений различных задач. Наряду с идеальной жидкостью В. Н. Масленникова с учениками рассматривали вязкие жидкости, а также сжимаемые жидкости с нулевой вязкостью.

Перейдём к изложению основных результатов работы.

Прежде всего, необходимо сформулировать ряд условий, которые определят в дальнейшем классы принадлежности функций $\rho_0(x), f(t,x)$.

Условие 1. Существуют $\rho_{\min}, \rho_{\max} > 0$ такие, что при $x \in [0,\infty)$ выполнено неравенство $\rho_{\min} \le \rho_0(x) \le \rho_{\max}$, $\rho_0(x) \in C^2[0,\infty)$ Существует такая константа c, что $\left|\rho_0'(x)\right| \le \dot{c}$, $\left|\rho_0''(x)\right| \le c$ при $x \in [0,\infty)$.

Условие 2. Будем говорить, что функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 2, если она непрерывна по совокупности переменных $x \in [0,\infty), t > 0$ и при $\delta > 0 : f(t,x)e^{\delta t} \in L_1(R^2_{++})$.

Условие 3. Будем говорить, что функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 3, если

1. для функции $\dfrac{\partial^k f(t,x)}{\partial t^k}$, где $k = 0{,}1$ выполнено условие 2,
2. $f(t,x)\big|_{t=0} = 0$,
3. $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\partial^k f(t,x)}{\partial t^k}\right|(1+x)e^{\delta t}dt \in L_2([0,\infty))$ где $k = 0{,}1$.

Условие 4. Будем говорить, что функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 4, если

1. для функции $\dfrac{\partial^k f(t,x)}{\partial t^k}$, где $k = 0{,}1{,}2$ выполнено условие 2.
2. $f(t,x)\big|_{t=0} = 0, \left.\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$,
3. $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\partial^k f(t,x)}{\partial t^k}\right|(1+x)e^{\delta t}dt \in L_2([0,\infty))$, где $k = 0{,}1{,}2$.

Определение. Будем говорить, что набор функций $U(t,x)$, $P(t,x)$ принадлежит пространству T_a, если справедливы следующие оценки

$\left|\dfrac{\partial^k U(t,x)}{\partial t^k}\right| \le ce^{at}$, где $k = 0{,}1$;

$\left|\dfrac{\partial^k U(t,x)}{\partial x^k}\right| \le ce^{at}$, где $k = 1{,}2$;

$\left|\dfrac{\partial^k P(t,x)}{\partial t^k}\right| \le ce^{at}$, где $k = 0{,}1$;

$\left|\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}\right| \le ce^{at}$, где $k = 0{,}1$.

Определение. Пусть $\delta_3 > 0$ через $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$ обозначим следующий контур $l_0 \cup l \cup l_1$, где

$l = -\xi^2\alpha_3 + i\xi\beta_3$ при $\xi \in [-\delta_3, \delta_3]$,

$l_0 = -\delta_3{}^2\alpha_3 - i(\delta_3 + \xi)\beta_3$ при $\xi \in [0,\infty)$,

$l_0 = -\delta_3{}^2\alpha_3 + i(\delta_3 + \xi)\beta_3$ при $\xi \in [0,\infty)$, где

$\alpha_3 = \min\left\{\dfrac{\nu}{2\rho_0(0)}; \dfrac{\alpha^2\nu}{4\rho_{\max}}\right\}, \beta_3 = \max\left\{\dfrac{1}{\alpha}; 1\right\}$,

$\delta_3 = \sqrt{\dfrac{\rho_{\min}}{2\alpha^2\nu\alpha_3}}$.

Производя замену $v(\gamma,x) = (\nu + \dfrac{\rho_0(x)}{\alpha^2\gamma})\hat{v}(\gamma,x)$, сведём систему (3) к следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2} - \frac{\alpha^2\rho_0(x)\gamma^2}{\rho_0(x)+\alpha^2\nu\gamma} v(\gamma,x) = -f(\gamma,x)\,. \quad (4)$$

Граничные условия будут иметь вид

$$v(\gamma,x)\big|_{x=0} = 0, v(\gamma,x)\big|_{x=\infty} = 0\,. \quad (5)$$

Изучим разрешимость задачи (4)—(5) при $|\gamma| \geq \varepsilon > 0$.

Производя замену вида $v_1(\gamma,x) = = (\dfrac{\alpha^2\gamma\nu + \rho_0(x)}{\alpha^2})\hat{v}(\gamma,x)$, получим задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2} - \frac{\alpha^2\rho_0(x)\gamma^2}{\rho_0(x)+\alpha^2\nu\gamma} v_1(\gamma,x) = -\gamma f(\gamma,x), \\ v_1(\gamma,x)\big|_{x=0} = 0, v_1(\gamma,x)\big|_{x=\infty} = 0.\end{gathered} \quad (6)$$

Изучим разрешимость задачи (6) при $|\gamma| \leq \varepsilon \leq \dfrac{\rho_{\min}}{2\alpha^2\nu}$.

Заметим, что если положить $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathbb{R}$, то справедливы равенства

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha^2\rho_0(x)\gamma^2}{\rho_0(x)+\alpha^2\nu\gamma}\right] =$$

$$= \frac{\alpha^2\rho_0(x)((\gamma_1^2-\gamma_2^2)\rho_0(x) + \alpha^2\nu\gamma_1^3 + \alpha^2\nu\gamma_1\gamma_2^2)}{(\rho_0(x)+\alpha^2\nu\gamma_1)^2 + \alpha^4\nu^2\gamma_2^2},$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\alpha^2\rho_0(x)\gamma^2}{\rho_0(x)+\alpha^2\nu\gamma}\right] =$$

$$= \frac{\alpha^2\rho_0(x)(2\rho_0(x)\gamma_1\gamma_2 + \alpha^2\nu\gamma_2^3 + \alpha^2\nu\gamma_2\gamma_1^2)}{(\rho_0(x)+\alpha^2\nu\gamma_1)^2 + \alpha^4\nu^2\gamma_2^2}$$

или в тригонометрическом виде

$$\frac{\gamma^2}{\rho_0(x)+\alpha^2\nu\gamma} =$$

$$= \frac{|\gamma|^2 \begin{pmatrix}\rho_0(x)\cos 2\varphi + \alpha^2\nu|\gamma|\cos\varphi + \\ +i(\rho_0(x)\sin 2\varphi + \alpha^2\nu|\gamma|\sin\varphi)\end{pmatrix}}{\left|\rho_0(x)+\alpha^2\nu\gamma\right|^2}. \quad (7)$$

Умножив уравнение (4) на сопряжённую к $v(\gamma,x)$ функцию $\bar{v}(\gamma,x)$ и проинтегрировав по x от 0 до ∞, получим, что

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right|^2 dx + \int_0^\infty \frac{\rho_0(x)\alpha^2\gamma^2}{\rho_0(x)+\alpha^2\nu\gamma}\left|v(\gamma,x)\right|^2 dx = . \\ = -(f(\gamma,x), \bar{v}(\gamma,x)).$$

Выделив действительную и мнимую части последнего равенства и рассматривая различные промежутки принадлежности φ, а именно изучая отдельно случаи $|\varphi| \leq \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6} \leq |\varphi| \leq \dfrac{\pi}{2} - \psi$, $\dfrac{\pi}{2} - \psi \leq |\varphi| \leq \dfrac{\pi}{2} + \psi$ (ψ — достаточно маленький) и производя элементарные оценки, можем установить справедливость следующего утверждения для $\gamma : \mathrm{Re}\,\gamma \geq -\dfrac{\rho_{\min}}{2\alpha^2\nu}$.

Утверждение 1. Пусть функции $f(\gamma,x), v(\gamma,x), \dfrac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma \in D$, где D это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи (4)—(5), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\psi > \dfrac{\pi}{2}$ такое, что при $\gamma \in (D \cap (|\gamma| \geq \varepsilon) \cap (|\arg\gamma| \leq \psi))$ будет справедлива следующая оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + |\gamma|\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2\left\|v(\gamma,x)\right\|^2 \leq c\left\|f(\gamma,x)\right\|^2,$$

где c — некоторая положительная константа.

Из аналогичных рассуждения относительно задачи (6) в случаях $|\varphi| \leq \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6} \leq |\varphi| \leq \dfrac{\pi}{2} - \psi$ (ψ —достаточно маленький) следует справедливость второго утверждения.

Утверждение 2. Пусть функции $f(\gamma,x), v_1(\gamma,x), \dfrac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma \in D$, где D это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v_1(\gamma,x)$ является решением задачи (6), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \psi < \dfrac{\pi}{2}$ такое, что при $\gamma \in (D \cap (|\gamma| \leq \varepsilon) \cap (|\arg\gamma| \leq \psi))$ будет справедлива следующая оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + |\gamma|\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2\left\|v_1(\gamma,x)\right\|^2 \leq$$

$\leq c_1\left\|f(\gamma,x)\right\|^2$, где $c_1 > 0$.

Перейдем к случаю $\dfrac{\pi}{2} - \psi \leq |\varphi| \leq \dfrac{\pi}{2} + \psi$. Докажем следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть функции $f(\gamma,x), v_1(\gamma,x)$, $\dfrac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma\in D$, где D это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v_1(\gamma,x)$ является решением задачи (6), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда для достаточно малых γ, лежащих между контуром $l(\xi)=-\dfrac{\alpha^2\nu}{4\rho_{\max}}\xi^2+i\xi$, $\xi\in[-\delta,\delta]$, и мнимой осью (включая точки, лежащие на контуре l и мнимой оси) будет верна оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+|\gamma|^2\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+ \\ +|\gamma|^4\|v_1(\gamma,x)\|^2\le c_1'\|f(\gamma,x)\|^2. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\gamma=\gamma_1+i\gamma_2$, если справедливо неравенство $2\rho_0(x)\gamma_1+\alpha^2\nu|\gamma|^2\ge\dfrac{\alpha^2\nu}{2}|\gamma|^2$, то из представления (7) получаем

$$\int_0^\infty\frac{\alpha^4\nu|\gamma|^2\rho_0(x)\sin\varphi}{2\left|\alpha^2\nu\gamma+\rho_0(x)\right|^2}|v_1(\gamma,x)|^2\,dx\le \\ \le\left|\int_0^\infty f(\gamma,x)\overline{v}_1(\gamma,x)dx\right|. \tag{8'}$$

Далее заметим, что неравенство $2\rho_0(x)\gamma_1+\alpha^2\nu|\gamma|^2\ge\dfrac{\alpha^2\nu}{2}|\gamma|^2$ эквивалентно $\left(\gamma_1+\dfrac{2\rho_0(x)}{\alpha^2\nu}\right)^2+\gamma_2^2\ge\left(\dfrac{2\rho_0(x)}{\alpha^2\nu}\right)^2$. То есть для достаточно малых γ, лежащих во «внешности» круга $\left(\gamma_1+\dfrac{2\rho_{\max}}{\alpha^2\nu}\right)^2+\gamma_2^2=\left(\dfrac{2\rho_{\max}}{\alpha^2\nu}\right)^2$ справедливо неравенство (8'). Из (8'), (7), (6) следует справедливость (8). Остаётся заметить, что для γ, лежащих на круге $\left(\gamma_1+\dfrac{2\rho_{\max}}{\alpha^2\nu}\right)^2+\gamma_2^2=\left(\dfrac{2\rho_{\max}}{\alpha^2\nu}\right)^2$ справедливо $\gamma_1=-\dfrac{\alpha^2\nu|\gamma|^2}{4\rho_{\max}}, |\gamma_2|=$ $=\sqrt{|\gamma|^2-\dfrac{\alpha^4\nu^2|\gamma|^4}{16\rho^2_{\max}}}\le|\gamma|$. Таким образом, для достаточно малых γ, лежащих между контуром $l(\xi)=-\dfrac{\alpha^2\nu}{4\rho_{\max}}\xi^2+i\xi$, $\xi\in[-\delta,\delta]$, и мнимой осью (включая точки, лежащие на контуре l и мнимой оси), будет верна оценка (8). Утверждение доказано.

Для определения асимптотического поведения решения задачи (1), (2) необходимо получить еще ряд априорных оценок решения задачи (6).

Утверждение 4. Пусть функции $(1+x)f(\gamma,x), v_1(\gamma,x), \dfrac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma\in D$, где D это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v_1(\gamma,x)$ является решением задачи (6), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда для достаточно малых $\gamma\in D$, таких, что $\varphi=\arg\gamma\in\left([\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}]\cup[-\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{6}]\right)$ верны оценки

$$\cos\varphi\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+\cos\varphi|\gamma|^2\|v_1(\gamma,x)\|^2\le \\ \le c_6\sqrt{|\gamma|}\,\|f(\gamma,x)x\|^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+|\gamma|^2\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+ \\ +|\gamma|^4\|v_1(\gamma,x)\|^2\le c_6'\|f(\gamma,x)\|^2.$$

Доказательство. Пусть $\varphi\in[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}]$, умножив уравнение из (6) на сопряжённую к $v_1(\gamma,x)$ функцию $\overline{v_1}(\gamma,x)$, проинтегрировав по x от 0 до ∞ и выделив действительную и мнимые части полученного выражения, получим

$$\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+ \\ +\int_0^\infty\frac{|\gamma|^2\left(\rho_0(x)\cos2\varphi+\alpha^2\nu|\gamma|\cos\varphi\right)|v_1(\gamma,x)|^2}{\left|\alpha^2\nu\gamma+\rho_0(x)\right|^2}dx= \\ =-\operatorname{Re}(f(\gamma,x),\gamma\overline{v}_1(\gamma,x)),$$

$$\int_0^\infty\frac{|\gamma|^2\alpha^2\rho_0(x)\left(\rho_0(x)\sin2\varphi+\alpha^2\nu|\gamma|\sin\varphi\right)|v_1(\gamma,x)|^2}{\left|\alpha^2\nu\gamma+\rho_0(x)\right|^2}dx= \\ =-\operatorname{Im}(f(\gamma,x),\gamma\overline{v}_1(\gamma,x)). \tag{9}$$

Так как $\sin\varphi\ge1/2, 2\rho_0(x)\cos\varphi+\alpha^2\nu|\gamma|\ge$ $\ge2\alpha\sqrt{2\rho_{\min}(x)\nu}\cos^{\frac12}\varphi|\gamma|^{\frac12}$, $2\rho_0(x)\cos\varphi+\alpha^2\nu|\gamma|\ge$ $\ge\alpha^2\nu|\gamma|$, то получаем оценки $\cos^{1/2}\varphi|\gamma|^{3/2}\|v_1(\gamma,x)\|^2\le c'\left|(f(\gamma,x),\overline{v}_1(\gamma,x))\right|$, $|\gamma|^2\|v_1(\gamma,x)\|^2\le d'\left|(f(\gamma,x),\overline{v}_1(\gamma,x))\right|$. Из последнего неравенства, (7), (6) получаем справедливость второго из доказываемых неравенств. Также справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 \le \int\limits_0^\infty \frac{\left(\rho_{\max}+\alpha^2\nu|\gamma|\right)|\gamma|^2}{\left|\alpha^2\nu\gamma+\rho_0(x)\right|^2}\left|v_1(\gamma,x)\right|^2 dx + \\ +\left|(f(\gamma,x),\gamma\bar{v}_1(\gamma,x))\right|,$$

откуда получаем $\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 \le$ $\le c''\sqrt{|\gamma|}\left|(f(\gamma,x),\bar{v}_1(\gamma,x))\right|$.

Таким образом, при малых γ справедливо неравенство

$$\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+\cos^{\frac{1}{2}}\varphi|\gamma|^2\left\|v_1(\gamma,x)\right\|^2 \le \\ \le c_3\sqrt{|\gamma|}\left|(f(\gamma,x),\bar{v}_1(\gamma,x))\right|. \tag{10}$$

Из неравенства Харди $\int\limits_0^\infty t^{-p}\left|f(t)-f(0)\right|dt \le (\frac{p}{p-1})^p\int\limits_0^\infty\left|f'(t)\right|dt$ при $p=2$ получаем $\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty\frac{|v(\gamma,x)|^2}{x^2}dx \le \left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2$. Тогда из (10) вытекает оценка $\cos\varphi\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+$ $+\cos\varphi|\gamma|^2\left\|v_1(\gamma,x)\right\|^2 \le 8c_5\sqrt{|\gamma|}\left\|f(\gamma,x)x\right\|^2$. Аналогичная оценка может быть получена для $\varphi\in[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{6}]$, что и завершит доказательство.

Применение неравенства Харди позволяет переформулировать утверждение 3.

Утверждение 5. Пусть функции $(1+x)f(\gamma,x), v_1(\gamma,x), \frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma\in D$, где D это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v_1(\gamma,x)$ является решением задачи (6), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда для достаточно малых γ, лежащих между контуром l и мнимой осью (включая точки, лежащие на контуре l и мнимой оси) будет верна оценка $\left\|\frac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+$ $+|\gamma|^2\left\|v_1(\gamma,x)\right\|^2 \le c_1\left\|(1+x)f(\gamma,x)\right\|^2$.

Доказательство существования решения задач (4), (5) и (6)

Лемма 1. Пусть $\sigma\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}\sigma>0$ и $h(x)\in L_2([0,\infty))$. Тогда у задачи $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial^2 x}-$ $-\sigma^2 u(x)=-h(x),\ u(x)\big|_{x=0}=u(x)\big|_{x=\infty}=0$ существует единственное решение $u(x)\in H^2([0,\infty))$.

Лемма 1 позволяет изучить разрешимость задачи с постоянным коэффициентом $\sigma\in\mathbb{C}$, поэтому будем рассматривать (4), (5), заменив в (4) $\rho_0(x)$ на $\rho_0(0)$. Необходимо определить те γ, для которых $\frac{\alpha^2\gamma^2\rho_0(0)}{\alpha^2\nu\gamma+\rho_0(0)}=-\xi^2$. Относительно корней $\gamma_1(\xi),\gamma_2(\xi)$ уравнения $\gamma^2\rho_0(0)\alpha^2+\nu\alpha^2\xi^2\gamma+\rho_0(0)\xi^2=0$, могут быть доказаны следующие утверждения.

Лемма 2. Для $\gamma_1(\xi)$ и $\gamma_2(\xi)$ справедливо $\mathrm{Re}\,\gamma_1(\xi)\le 0$, $\mathrm{Re}\,\gamma_2(\xi)\le 0\ \forall\xi\in[0,\infty)$, при $\xi<\frac{2\rho_0^2(0)}{\alpha\nu}$ $\mathrm{Im}\,\gamma_1(\xi)\le\frac{\xi}{\alpha}$ а $\mathrm{Im}\,\gamma_2(\xi)\ge-\frac{\xi}{\alpha}$.

Лемма 3. $\gamma_1(\xi)$ и $\gamma_2(\xi)$ принадлежат мнимой оси только при $\xi=0$ при этом $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=0$.

Замечание 1. Из лемм 2 и 3 следует, что существует такой контур $l_{\delta_2}^{\alpha_2,\beta_2}=l_0\cup l\cup l_1$, где $l=-\xi^2\alpha_2+i\xi\beta_2$ при $\xi\in[-\delta_2,\delta_2]$, $l_0=-\delta_2{}^2\alpha_2-$ $-i(\delta_2+\xi)\beta_2$ при $\zeta\in[0,\infty)$, $l_1=-\delta_2{}^2\alpha_2+$ $+i(\delta_2+\xi)\beta_2$ при $\zeta\in[0,\infty)$ ($\alpha_2=\frac{\nu}{2\rho_0(0)},\beta_2=\frac{1}{\alpha}$), такой, что $\forall\xi\in[0,\infty)$ контуры $\gamma_1(\xi)$ и $\gamma_2(\xi)$ лежат левее контура $l_{\delta_2}^{\alpha_2,\beta_2}$.

Применение последних лемм позволяет доказать теорему существования решения задачи (4), (5).

Утверждение 6. Пусть функция $f(\gamma,x)$ принадлежит пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x при $\mathrm{Re}\,\gamma\ge-\varepsilon$, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда при каждом фиксированном γ лежащем правее некоторого контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$, для которых $|\gamma|\ge\varepsilon$, у задачи (4), (5) существует единственное решение из $H^2\left([0,\infty)\right)$, а при $|\gamma|\le\varepsilon\le\frac{\rho_{\min}}{2\alpha^2\nu}$ существует единственное решение у задачи (6).

Доказательство основано на рассмотрении параметризованных задач вида

$$\frac{\partial^2 v_{\varepsilon_1}(\gamma,x)}{\partial x^2}-\varepsilon_1\frac{\alpha^2\rho_0(x)\gamma^2}{\alpha^2\nu\gamma+\rho_0(x)}v_{\varepsilon_1}(\gamma,x)- \\ -(1-\varepsilon_1)\frac{\alpha^2\rho_0(0)\gamma^2}{\alpha^2\nu\gamma+\rho_0(0)}v_{\varepsilon_1}(\gamma,x)=-f(\gamma,x), \\ v_{\varepsilon_1}(\gamma,x)\big|_{x=0}=v_{\varepsilon_1}(\gamma,x)\big|_{x=\infty}=0.$$

При $\varepsilon_1=0$ получаем уравнение с постоянными коэффициентами. Существование решения такой задачи при соответствующих значениях γ следует из леммы 1. Метод продолжения по параметру позволяет доказать существование решения параметризованной задачи и в случае $\varepsilon_1 = 1$.

Аналитичность решения задач (4), (5) и (6.)

Стандартными методами может быть доказано следующее утверждение.

Утверждение 7. Пусть для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, $f(\gamma,x)$ аналитична по γ равномерно по $x\in[0,\infty)$, функции $f(\gamma,x), v(\gamma,x), \dfrac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x при каждом фиксированном γ ($|\gamma|\ge\varepsilon$), лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$, функции $f(\gamma,x), v_1(\gamma,x), \dfrac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат $L_2([0,\infty))$ по переменной x при каждом фиксированном γ ($|\gamma|\le\varepsilon\le\dfrac{\rho_{\min}}{2\alpha^2\nu}$), лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$, функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи (4), (5), $v_1(\gamma,x)$ — задачи (6), тогда при γ лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$, для которого $|\gamma|\ge\varepsilon$, функции $v(\gamma,x), \dfrac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}$ будут аналитичны по γ равномерно по $x\in[0,\infty)$, а при γ лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$, для которого $|\gamma|\le\varepsilon\le\dfrac{\rho_{\min}}{2\alpha^2\nu}$ (за исключением $\gamma=0$), функции $v_1(\gamma,x), \dfrac{\partial v_1(\gamma,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 v_1(\gamma,x)}{\partial x^2}$ будут аналитичны по γ равномерно по $x\in[0,\infty)$.

Построение асимптотики по времени решений задачи (1)—(3)

Прежде всего, необходимо сделать ряд замечаний.

Замечание 2. Пусть функции $f(\gamma,x), v(\gamma,x), \dfrac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0,\infty))$ по переменной x при каждом фиксированном γ таком, что $\operatorname{Re}\gamma\ge a>0$, функция $v(\gamma,x)$ является решением задачи (4), (5), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда будет справедлива следующая оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+(1+|\gamma|)\left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+ +(1+|\gamma|)^2\left\|v(\gamma,x)\right\|^2\le c\left\|f(\gamma,x)\right\|^2.$$

Замечание 3. Применение неравенства, полученного в работе [1] $\sup\limits_{x\in[0,\infty)}(\left|\dfrac{\partial^r v(\gamma,x)}{\partial x^r}\right|)^2\le$ $\le\varepsilon^{2s-2r-1}\left\|\dfrac{\partial^s v(\gamma,x)}{\partial x^s}\right\|^2+c\varepsilon^{-2r-1}\left\|v(\gamma,x)\right\|^2$, позволяет утверждать, что при $A>0$

1) если для функции $v(\gamma,x)$ выполнена априорная оценка $\left\|\dfrac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+A\left\|\dfrac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+$ $+A^2\left\|v(\gamma,x)\right\|^2\le c_1\left\|f(\gamma,x)\right\|^2$, тогда будет справедливо неравенство $\left|v(\gamma,x)\right|\le\dfrac{c\left\|f(\gamma,x)\right\|}{A^{3/4}}$ равномерно по $x\in\left[0,\infty\right)$;

2) если $\left\|\dfrac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2+A^2\left\|v(\gamma,x)\right\|^2\le c_1\left\|f(\gamma,x)\right\|^2$, то $\left|\dfrac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right|\le\dfrac{c\left\|f(\gamma,x)\right\|}{A^{1/4}}$;

3) если $\left\|\dfrac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2+A^2\left\|v(\gamma,x)\right\|^2\le c_1\left\|f(\gamma,x)\right\|^2$, то $\left|v(\gamma,x)\right|\le\dfrac{c\left\|f(\gamma,x)\right\|}{A^{1/2}}$.

Справедливость данных утверждений доказана в работах [2],[3].

Замечание 4. Если функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 2, тогда функция $f(\gamma,x)=$ $=L_{t\to\gamma}\left[f(t,x)\right]$ аналитична по γ при $\operatorname{Re}\gamma\ge-\varepsilon_1$, где $\varepsilon_1<\delta$. Если функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 3, то при $\operatorname{Re}\gamma\ge-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) будет справедлива оценка $\left\|(1+x)f(\gamma,x)\right\|\le\dfrac{c}{1+|\gamma|}$, а если функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 4, то при $\operatorname{Re}\gamma\ge-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) будет справедлива следующая оценка $\left\|(1+x)f(\gamma,x)\right\|\le\dfrac{c}{(1+|\gamma|)^2}$.

Непосредственным следствием замечания 3 и полученных ранее априорных оценок является следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 3, функция $\rho_0(x)$ удовлетворяет условию 1, тогда при $\operatorname{Re}\gamma\ge a>0$ справедливы следующие оценки $\left|\hat{v}(\gamma,x)\right|\le\dfrac{c\left\|f(\gamma,x)\right\|}{(1+|\gamma|)^{3/4}}$, $\left|\hat{p}(\gamma,x)\right|\le\dfrac{c\left\|f(\gamma,x)\right\|}{(1+|\gamma|)^{5/4}}$.

Из леммы 4 получаем утверждение 8.

Утверждение 8. Пусть функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$

выполнено условие 1, тогда существуют непрерывные по совокупности аргументов функции $U(t,x)=L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\hat{v}(\gamma,x)\right]$, и $P(t,x)=L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\hat{p}(\gamma,x)\right]$.

Доказательство. Заметим, что если функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 3, функция $\rho_0(x)$ удовлетворяет условию 1, то функции $\hat{p}(\gamma,x)$ и $\hat{v}(\gamma,x)$ аналитичны по γ при $\operatorname{Re}\gamma \ge a > 0$ и каждом фиксированном $x\in[0,\infty)$. Из леммы 4, замечания 4 и теоремы об обращении преобразования Лапласа мы получаем, что существуют функции $U(t,x)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)\,d\gamma$,

$P(t,x)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\gamma t}\hat{p}(\gamma,x)\,d\gamma$, где $a>0$, что и доказывает справедливость утверждения 8.

Лемма 5. Пусть функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда справедливы следующие равенства $\lim\limits_{t\to+0}U(t,x)=0,\ \lim\limits_{t\to+0}P(t,x)=0$.

Данное утверждение является следствием предельной теоремы о преобразовании Лапласа, согласно которой

$$\lim_{t\to+0}U(t,x)=\lim_{|\gamma|\to\infty}\left|\gamma\hat{v}(\gamma,x)\right|=$$
$$\lim_{t\to+0}P(t,x)=\lim_{|\gamma|\to\infty}\left|\gamma\hat{p}(\gamma,x)\right|=0.$$

Стандартным методом может быть доказано и следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда будут справедливы следующие равенства $U(t,x)\big|_{x=0}=U(t,x)\big|_{x=\infty}=0$.

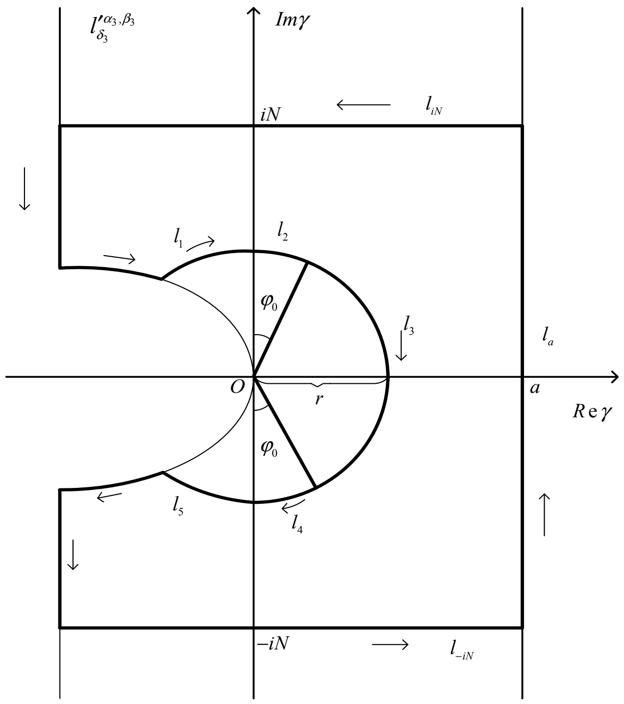
Утверждение 9. Пусть функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 4, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда функции $U(t,x),P(t,x)$ являются классическим решением задачи (1)—(3).

Данное утверждение является очевидным следствием доказанных ранее утверждений, остаётся заметить, что если функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 4, то из леммы 4 и замечания 4 следует существование непрерывных производных $\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial x},\dfrac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2},\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x},\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial t},\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial t}$.

Лемма 7. Пусть функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условия 1, тогда функцию $U(t,x)$ можно записать в следующем виде $U(t,x)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$, где $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$ – это контур, существование которого было доказано ранее.

Доказательство.

Рассмотрим контур $l=l_a\cup l_{iN}\cup l'^{\alpha_3,\beta_3}_{\delta_3}\cup$ $\cup\, l_1\cup l_2\cup l_3\cup l_4\cup l_5\cup l_{-iN}$.



При каждом фиксированном t,x по интегральной теореме Коши следующий интеграл будет равен нулю.

$$\int_l e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma=\int_{l_a} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma+$$
$$+\int_{l'^{\alpha_3,\beta_3}_{\delta_3}} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma+\int_{l_{iN}} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma+ \qquad (11)$$
$$+\int_{l_{-iN}} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma+\sum_{n=1}^{5}\int_{l_n} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma=0.$$

Из ранее доказанных утверждений, получаем, что при достаточно больших N для γ лежащих на контура l_a,l_{iN},l_{-iN},l_5 будет справедлива оценка $\left|v(\gamma,x)\right|\le\dfrac{c}{(1+|\gamma|)^{7/4}}$, на контурах l_1,l_5 выполняется неравенство $\left|\hat{v}(\gamma,x)\right|\le$ $\le\left|\dfrac{\alpha^2 v_1(\gamma,x)}{\alpha^2\nu\gamma+\rho_0(x)}\right|\le\dfrac{c}{|\gamma|^{1/2}(1+|\gamma|)}$, на контуре l_3 $\left|v(\gamma,x)\right|\le\dfrac{c}{(1+|\gamma|)^{7/4}}$, а на контурах l_2,l_4

$\left|\hat{v}(\gamma,x)\right| \le \left|\dfrac{\alpha^2 v_1(\gamma,x)}{\alpha^2\nu\gamma+\rho_0(x)}\right| \le \dfrac{c\left|\gamma\right|^{1/4}}{\left|\gamma\right|^{1/2}(\cos\varphi)^{1/2}(1+\left|\gamma\right|)}$.

Из построения контура следует, что при $N\to\infty, r\to 0$ интегралы $\int\limits_{l_a} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$ и $\int\limits_{l'^{\alpha_3,\beta_3}_{\delta_3}} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$ стремятся соответственно к $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)\,d\gamma$ и $-\int\limits_{l_{\delta_3}} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$, интегралы $\int\limits_{l_{iN}} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$ и $\int\limits_{l_{-iN}} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$ стремятся к нулю. Также при $N\to\infty, r\to 0$ интегралы $\int\limits_{l_2} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$ и $\int\limits_{l_4} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$ стремятся к нулю, так как $\left|\int\limits_{l_k} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma\right| \le$ $\le \int\limits_0^{\varphi_0} \dfrac{e^{rt}cr}{r^{1/4}(\sin\varphi)^{1/2}}d\varphi \le ce^{rt}r^{3/4} \xrightarrow[r\to 0, N\to\infty]{} 0$, где $k=2,4$. А интегралы $\int\limits_{l_1} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$ и $\int\limits_{l_5} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$ стремятся к нулю, так как

$$\left|\int\limits_{l_k} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma\right| \le e^{rt}c\int\limits_0^{\varphi_1}\frac{r}{r^{1/2}}d\varphi \le \le ce^{rt}r^{1/2} \xrightarrow[r\to 0, N\to\infty]{} 0, \text{ где } k=1,5.$$

Перейдём в равенстве (11) к пределу при $N\to\infty, r\to 0$, с учетом выше изложенного получаем, что $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)\,d\gamma = \int\limits_{l^{\alpha_3,b_3}_{\delta_3}} e^{\gamma t}\hat{v}(\gamma,x)d\gamma$. Лемма доказана.

Из представления $\hat{v}(\gamma,x) = L_{t\to\gamma}\left[U(t,x)\right]$, утверждения 5, замечания 3 и леммы 7 следует, что справедлива оценка $\left|U(t,x)\right| \le$ $\le c(\int\limits_0^{\delta}\dfrac{e^{-a\xi^2 t}}{\xi^{1/2}}d\xi + O(e^{-\varepsilon t})) \le c_1 t^{-1/4}$.

Утверждение 10. Пусть функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условия 1, тогда для функции $U(t,x)$ равномерно по $x\in[0,\infty)$ справедлива следующая оценка $\left|U(t,x)\right| \le c_1 t^{-1/4}$.

В завершении определим класс единственности решения задачи (1),(2).

Утверждение 11. При выполнении условий 1,4 существует единственное решение задачи (1)—(3), принадлежащее классу T_a при любом $a>0$.

Доказательство. Пусть наборы функций $U_1(t,x), P_1(t,x)$ и $U_2(t,x), P_2(t,x)$ являются решениями задачи (1),(2) и принадлежат классу T_a, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Так как функции $U_3(t,x)=U_1(t,x)-U_2(t,x)$, $P_3(t,x)=P_1(t,x)-P_2(t,x)$ являются решением однородной системы уравнений (то есть при $f(t,x)\equiv 0$), то применение априорной оценки $\left\|\dfrac{\partial^2 v_3(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + (1+\left|\gamma\right|)\left\|\dfrac{\partial v_3(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 +$ $+(1+\left|\gamma\right|)^2\left\|v_3(\gamma,x)\right\|^2 \le 0$ позволяет утверждать, что при $t>0$ и $x\in[0,\infty)$ будут справедливы равенства $U_1(t,x)=U_2(t,x), P_1(t,x)=P_2(t,x)$,

Так как $U(t,x)=O(e^{at}), P(t,x)=O(e^{at})$, причем эти оценки равномерны по x, то существует $c>0$ такое, что $\left|U(t,x)\right| \le ce^{at}, \left|P(t,x)\right| \le ce^{at}$. Аналогичные оценки справедливы и для соответствующих производных решения задачи (1), (2) $U(t,x), P(t,x)$. Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушко В. П., Крейн С. Г.* Неравенства для норм производных в пространствах L_p с весом. Сибирский математический журнал, 1960 т. 1, № 3, С. 342—382.

2. *Глушко А. В., Рябенко А. С.* О малых одномерных акустических колебаниях стратифицированной жидкости в полупространстве. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2008. – № 1. — С. 226—231.

3. *Рябенко А. С.* Оценка компонентов решения задачи, описывающей колебания в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости. Вестник СамГУ. — Естественнонаучная серия. — 2008. — № 6. — С. 185—192.

Свиридова Евгения Александровна — аспирант, Воронежский государственный университет

Тел. 8-919-233-37-54, 8(473) 220-86-18

E-mail: formytravel@yandex.ru

Sviridova Evgenia A. — Post-graduate student, Voronezh State University

Tel. 8-919-233-37-54, 8(473) 220-86-18

E-mail: formytravel@yandex.ru