УДК 27 21 00

КЛАССИФИКАЦИЯ И ПОКРЫТИЕ МНОГОГРАННИКОВ КЛАССА D

Т. М. Пуолокайнен

Карельская государственная педагогическая академия

Поступила в редакцию 18.05.2011 г.

Аннотация. Настоящая работа посвящена разбиению выпуклых многогранников класса D на подклассы и покрытию любого многогранника класса D образами этого многогранника при гомотетии с коэффициентами, меньшими единицы. Рассматриваемая задача связана с проблемой Хадвигера о покрытии выпуклых геометрических тел их образами при гомотетии с коэффициентами, меньшими единицы.
Ключевые слова: выпуклые многогранники, классификация, покрытие, гомотетия.

Abstract. The paper is continuation of the author's serious of paper devoted to the solution of Hadwiger's problem of covering convex polyhedrons with body images at homothety. The problem under discussion in this paper can be described as follows: to give the covering of all polyhedrons which surface include special part.
Key words: convex polyhedrons, classification, covering, homothety.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] автора все выпуклые многогранники трехмерного евклидова пространства были разбиты на четыре класса: A, B, C, D. В работе [2] автора была осуществлена классификация многогранников класса A. Работа [3] автора посвящена покрытию многогранников класса A их меньшими копиями при гомотетии в трехмерном евклидовом пространстве. В работе [1] автора к классу B были отнесены выпуклые многогранники, поверхность которых содержит одну или несколько призматических частей. В работе [1] автора к классу C были отнесены выпуклые многогранники, граница которых содержит, по крайней мере, одну поверхность переходного типа и не содержит призматических частей. В работе [4] Хадвигер сформулировал гипотезу, согласно которой для покрытия любого выпуклого тела в n-мерном евклидовом пространстве достаточно 2^n тел меньших размеров, гомотетичных данному телу. В 1960 году В.Г. Болтянский доказал эквивалентность задачи покрытия выпуклых тел их гомотетичными копиями задаче освещенности границы выпуклого тела [5].

Первая часть настоящей статьи посвящена разбиению всех многогранников класса D на подклассы. Классификация многогранников класса D необходима для того, чтобы решить задачу покрытия многогранников этого класса их образами при гомотетии с коэффициентами, меньшими единицы. В завершении статьи сформулирована теорема о покрытии многогранников класса D образами многогранников при гомотетии.

1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе [1] автора дано определение *призматической части поверхности.*

Определение 1. Пусть M — выпуклый многогранник и q — некоторая прямая в пространстве. Пусть имеется n граней многогранника M, параллельных прямой q ($n \geq 3$). Пусть все n граней, параллельных прямой q, образуют одну компоненту связности. Пусть эта компонента связности гомеоморфна кольцу между двумя окружностями. Граница компоненты связности состоит из двух замкнутых непересекающихся ломаных, каждая из которых топологически эквивалентна окружности. В этом случае будем говорить, что граница выпуклого многогранника содержит призматическую часть.

Выпуклый многогранник, граница которого содержит хотя бы одну призматическую часть, отнесем к классу B.

В работе [1] автора введено понятие *поверхности переходного типа.* Пусть на плоскости заданы две окружности w и w_1, центры и радиусы которых различны. Пусть эти окружности касаются внутренним образом в точке

© Пуолокайнен Т. М., 2011

Q. Множество точек плоскости, заключенных между двумя окружностями, включая окружности и точку Q, обозначим W.

Определение 2. Рассмотрим выпуклый многогранник M. Пусть q — некоторая прямая в пространстве. Пусть имеется n граней многогранника M, параллельных прямой q ($n \geq 3$), и образующих одну компоненту связности, гомеоморфную множеству W. Компоненту связности границы многогранника, топологически эквивалентную множеству W, назовем многогранной *поверхностью переходного типа.* Будем говорить, что в этом случае поверхность переходного типа состоит из *одного звена.*

Поверхность переходного типа может состоять из двух и большего количества звеньев. Рассмотрим множество U_m, которое можно получить следующим образом. Пусть имеется окружность w и m окружностей $w_1, w_2, \ldots, w_m$, ($m \geq 2$), каждая из которых касается окружности w внутренним образом. Пусть окружности $w_1, w_2, \ldots, w_m$ таковы, что их пересечение не пусто. Обозначим U_m — множество, являющееся замыканием разности круга с границей w и объединения кругов с границами $w_1, w_2, \ldots, w_m$.

Определение 3. Пусть поверхность многогранника M содержит компоненту связности, топологически эквивалентную множеству U_m, такую, что все грани этой компоненты параллельны некоторой прямой q пространства. Такую поверхность с краем также назовем *поверхностью переходного типа.* В этом случае поверхность переходного типа состоит *из m звеньев.*

Дадим определение *фрагмента* призматической части поверхности.

Определение 4. Рассмотрим все грани выпуклого многогранника, параллельные некоторой прямой m в пространстве. Пусть эти грани образуют одну компоненту связности. Пусть эта компонента связности границы многогранника состоит не менее чем из трех граней и топологически эквивалентна кругу. Такую часть поверхности многогранника назовем *фрагментом призматической части первого вида.*

Замечание 1. Граница фрагмента призматической части первого вида представляет собой простую замкнутую пространственную ломаную.

Рассмотрим множество кругов $w_1, w_2, \ldots, w_n$, где $n \geq 2$. Пусть любые два соседние круга касаются, при этом не соседние круги общих точек не имеют. Обозначим точки касания пар соседних кругов

$$A_1 = w_1 \cap w_2;\ A_2 = w_2 \cap w_3;\ \ldots;\ A_{n-1} = w_{n-1} \cap w_n.$$

Круги w_1 и w_n не имеют общих точек. Обозначим объединение всех таких кругов W.

Определение 5. Пусть имеется выпуклый многогранник. Рассмотрим все его грани, параллельные некоторой прямой m пространства. Пусть эти грани образуют компоненту связности, топологически эквивалентную множеству W. Такое объединение граней многогранника назовем *фрагментом призматической части второго вида.*

Замечание 2. Граница фрагмента призматической части второго вида представляет собой объединение n простых замкнутых ломаных. Каждые две соседние простые замкнутые ломаные имеют одну общую вершину. Граница фрагмента призматической части второго вида содержит n-1 общих вершин.

Дадим определение многогранника класса D.

Определение 6. К классу D отнесем такие выпуклые многогранники, граница которых не содержит призматической части, не содержит поверхности переходного типа, но содержит один или несколько фрагментов призматической части первого или второго вида.

В дальнейшем будет использовано понятие *шапочка.* Дадим определение этого понятия.

Определение 7. Пусть M — выпуклый многогранник, граница которого не содержит призматическую часть, не содержит поверхность переходного типа и не содержит фрагменты призматической части. Прямая q, не параллельная ни одной из граней многогранника M, задает в пространстве направление. Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную прямой q. Пусть центр O единичной сферы S^2 лежит в плоскости α, которая разбивает сферу на две полусферы, условно верхнюю и нижнюю. К каждой грани многогранника проведем единичный вектор внешней нормали. Выполним параллельный перенос всех векторов единичных внешних нормалей так, чтобы начало каждого вектора совпало с точкой O. Так как прямая q не параллельна ни одной из граней многогранника, то ни один из нормальных векторов с началом в точке O не лежит в плоскости α. Рассмотрим только те единичные векторы внешних нормалей, концы которых лежат в верхней полусфере. Геометрический объект, являющийся объединением всех граней многогранника, концы единичных векторов внешних нормалей которых лежат в верхней полусфере, назовем шапочкой.

2. РАЗБИЕНИЕ КЛАССА D НА ПОДКЛАССЫ

Все многогранники класса D разобьем на три подкласса, каждый из которых будем называть классом. Принципом разбиения выбираем количество направлений, параллельно которым расположены фрагменты призматических частей, лежащие на границе многогранника.

К классу D1 отнесем многогранники класса D, граница которых содержит один или несколько фрагментов призматических частей, грани которых параллельны *одному* направлению в пространстве.

Пусть m и q — две не параллельные прямые в пространстве. Пусть границе выпуклого многогранника M класса D принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой m. Пусть границе того же многогранника принадлежит еще один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой q. В этом случае многогранник отнесем к классу D2.

Пусть m, p и q — три попарно не параллельные прямые в пространстве. Пусть границе выпуклого многогранника класса D принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой m. Пусть поверхности многогранника M принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой p. Пусть, кроме того, границе многогранника M принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой q. В этом случае многогранник отнесем к классу D3.

Замечание 3. Фрагменты призматических частей, о которых говорится в описании классов D1, D2, D3, могут быть как *первого*, так и *второго* вида.

Замечание 4. Многогранники класса D могут содержать фрагменты призматических частей, параллельные *четырем и более* направлениям в пространстве. Все такие многогранники класса D также отнесем к классу D3.

Все многогранники класса D разбиты на три класса D1, D2, D3. Принципом классификации является количество направлений, которым параллельны фрагменты призматических частей. Разбиение классов на подклассы осуществляется по величине угла между крайними гранями фрагмента призматической части или объединения фрагментов призматических частей одного направления.

3. О ПОКРЫТИИ МНОГОГРАННИКОВ КЛАССА D

Теорема. *Для покрытия многогранников класса D достаточно от четырех до восьми многогранников меньших размеров, гомотетичных данному многограннику.*

Для доказательства теоремы сначала рассмотрим многогранник класса D1, у которого только один фрагмент призматической части. Идея покрытия многогранника состоит в следующем. Рассмотрим цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна направлению фрагмента призматической части. Эта цилиндрическая поверхность разбивает границу многогранника на две *шапочки* и фрагмент призматической части. В работе [3] автора доказано, что для покрытия внутренних вершин одной шапочки достаточно одного гомотетичного многогранника меньших размеров. Покрытие фрагмента призматической части осуществляется в зависимости от того, какова величина угла φ между векторами внешних нормалей крайних граней этого фрагмента. Если угол φ меньше развернутого, то покрытие многогранника осуществляется аналогично тому, как выполнено покрытие многогранников в работе [3] автора. Если угол φ не меньше развернутого, то фрагмент призматической части разбивается на попарно пересекающиеся шапочки, чем и завершается покрытие.

В данном направлении на поверхности многогранника может находиться не один фрагмент призматической части, а несколько. Многогранник может принадлежать классам D2 или D3. И в этих случаях все рассуждения аналогичны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнена классификация многогранников класса D и намечен план доказательства того, что для покрытия любого многогранника класса D достаточно восьми многогранников меньших размеров, гомотетичных данному многограннику.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуолокайнен Т. М.* Классификация выпуклых многогранников / Т. М. Пуолокайнен // Труды ПетрГУ. Серия: Математика. — Петрозаводск, 2004 — 11 — С. 34—40.

2. *Пуолокайнен Т. М.* Разбиение многогранников класса А на подклассы / Т. М. Пуолокайнен // Альманах современной науки и образования. — Тамбов, 2008 — 7 (14) — С. 151—154.

3. *Пуолокайнен Т. М.* Покрытие многогранников класса А образами многогранников при гомотетии / Т. М. Пуолокайнен // Вестник ВСГТУ. Серия: Естественные науки. — Улан-Удэ, 2008. — 4 — С. 39—44.

4. *Hadwiger G.* Ungeloste Probleme / G. Hadwiger // References Elem. der. Math. — 1957. — № 20. — P. 121.

5. *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии / В. Г. Болтянский // М., Наука, 1965.

Пуолокайнен Татьяна Матвеевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Карельская государственная педагогическая академия

Тел. 8 921-450-04-79

E-mail: puolatm@onego.ru

Puolokainen Tatiana Matveevna — Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Karelian State Pedagogical Academy

Tel. 8 921-450-04-79

E-mail: puolatm@onego.ru