УДК 517.986

ОБ ОБРАТИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦА ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ПУЧКОМ УМЕРЕННОГО РОСТА*

А. В. Печкуров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию: 27.06.2011

Аннотация. Рассматривается уравнение $Fu' - Gu = f$. Доказано, что для любой $f \in \mathcal{S}'$ уравнение имеет единственное решение $u \in \mathcal{S}'$ при условии, что $i\omega F - G$ обратим при всех $\omega \in \mathbb{R}$ и $\left\|(i\omega F - G)^{-1}\right\| \le M(1+|\omega|)^m$, $\omega \in \mathbb{R}$, для некоторых m и M.
Ключевые слова: операторный пучок, обобщенная функция умеренного роста, задача об ограниченных решениях.

Annotation. The equation $Fu' - Gu = f$ is considered. It is proved that for any $f \in \mathcal{S}'$ the equation has a unique solution $u \in \mathcal{S}'$ provided $i\omega F - G$ is invertible for all $\omega \in \mathbb{R}$ and $\left\|(i\omega F - G)^{-1}\right\| \le M(1+|\omega|)^m$, $\omega \in \mathbb{R}$, for some m and M.
Key words: operator pencil, tempered distribution, bounded solutions problem.

ВВЕДЕНИЕ

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известно [1—5], что существование единственного ограниченного на оси решения неоднородного уравнения $x' - Gx = f$ при любой ограниченной правой части f равносильно тому, что спектр коэффициента G не пересекает мнимую ось.

Случай неограниченного коэффициента G начали изучать сравнительно недавно. С этой целью в [6] было введено понятие бисекториального пучка (в терминологии оригинала — биполугруппы) $\lambda \mapsto \lambda\mathbf{1} - G$ ($\mathbf{1}$ — тождественный оператор), порожденного одним неограниченным оператором G, означающее, что резольвента пучка является аналитической функцией в объединении двух секторов, содержащих мнимую ось. В дальнейшем оно исследовалось в [7].

В настоящей статье рассматривается более общий линейный пучок $\lambda \mapsto \lambda F - G$, а понятие бисекториальности заменено более общим понятием умеренного роста. Операторы F и G предполагаются ограниченными; во многих ситуациях случай неограниченных F и G сводится [8] к случаю ограниченных. Роль пространства ограниченных функций играет пространство Шварца $\mathcal{S}'$ [9—10] обобщенных вектор-функций умеренного роста.

В § 1 напоминается определение векторной [10] версии пространства Шварца $\mathcal{S}'$. По сравнению со скалярным вариантом [9] векторная версия оказывается более сложной. В частности, основной технической проблемой, решенной в статье, является корректное определение операции умножения обобщенной вектор-функции на бесконечно дифференцируемую оператор-функцию (теорема 10). В § 2 дается определение пучка умеренного роста: пучком умеренного роста мы называем пучок, резольвента которого определена на мнимой оси и имеет на ней полиномиальный рост. Здесь же доказывается основной результат (теорема 17): уравнение $Fu' - Gu = f$ при любой $f \in \mathcal{S}'$ имеет единственное решение $u \in \mathcal{S}'$ при условии, что пучок имеет умеренный рост.

1. ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ШВАРЦА $\mathcal{S}'$

Пусть $\mathbb{E}$ — произвольное комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{E}}$.

Обозначим через $C_0^{0,m} = C_0^{0,m}(\mathbb{R},\mathbb{E})$, $m \in \mathbb{Z}$, линейное пространство всех непрерывных функций $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$, ограниченных по норме

$$\|\psi\|_{C_0^{0,m}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|(1+|t|)^m \psi(t)\right\|$$

или по эквивалентной норме

$$\|\psi\|_{C_0^{0,m}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(1+t^2)^{\frac{m}{2}} \psi(t)\|$$

* Работа поддержана грантом РФФИ 10-01000276.

и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t\to\infty}(1+|t|)^m\psi(t)=0$.

Обозначим через $C_0^{k,m}=C_0^{k,m}(\mathbb{R},\mathbb{E})$, $k=0,1,2,\dots$, $m\in\mathbb{Z}$, линейное пространство всех k раз непрерывно дифференцируемых функций $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{E}$, для которых $\psi,\psi',\dots,\psi^{(k)}\in C_0^{0,m}$, с нормой

$$\|\psi\|_{C_0^{k,m}}=\|\psi\|_{C_0^{0,m}}+\|\psi'\|_{C_0^{0,m}}+\dots+\|\psi^{(k)}\|_{C_0^{k,m}}.$$

Предложение 1. *Пространство $C_0^{k,m}$, $k=0,1,2,\dots$, $m\in\mathbb{Z}$, является полным, т. е. банаховым.*

Доказательство. Вытекает из правила [12] дифференцирования равномерно сходящейся последовательности.

Обозначим через $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ пересечение пространств $C_0^{k,m}$ по всем $k,m=0,1,2,\dots$ (подробнее см., например, [9]). Определим топологию на $\mathcal{S}$ как объединение топологий, индуцированных пространствами $C_0^{k,m}$, $k,m=0,1,2,\dots$. Очевидно, база окрестностей нуля в такой топологии счетна. Поэтому обычная и секвенциальная непрерывности совпадают.

Предложение 2. *Пространство $\mathcal{S}$ является является пространством Фреше, т. е. полным локально выпуклым пространством, топология которого порождается счетным числом полунорм.*

Доказательство. Вытекает из предложения 1.

Предложение 3. Оператор дифференцирования $\psi\mapsto\psi'$ непрерывно действует из $C_0^{k,m}$ в $C_0^{k-1,m}$, $k=1,2,\dots$, и следовательно, непрерывно действует из $\mathcal{S}$ в себя (но не обратим).

Доказательство. Очевидно.

Предложение 4. Оператор умножения на функцию $\rho_n(t)=(1+t^2)^{\frac{n}{2}}$, $n\in\mathbb{Z}$, является изоморфизмом из $C_0^{k,m}$ в $C_0^{k,m-n}$, $k=0,1,2,\dots$, $m\in\mathbb{Z}$, и следовательно, изоморфизмом $\mathcal{S}$ на себя.

Доказательство. Заметим, что $(2i-1)$-ая производная функции ρ_n является линейной комбинацией функций

$$t\mapsto t^{2i-1}(1+t^2)^{\frac{n}{2}-2i},\, t\mapsto t^{2i-3}(1+t^2)^{\frac{n}{2}-(2i-2)},\dots,$$

$$t\mapsto t^1(1+t^2)^{\frac{n}{2}-i},$$

а $2i$-ая производная функции ρ_n — линейной комбинацией функций

$$t\mapsto t^{2i}(1+t^2)^{\frac{n}{2}-2i}, t\mapsto t^{2i-2}(1+t^2)^{\frac{n}{2}-(2i-1)},\dots,$$

$$t\mapsto t^0(1+t^2)^{\frac{n}{2}-i}.$$

Таким образом, функция $t\mapsto\rho^{(i)}(t)$ эквивалентна $t\mapsto t^{n-i}$ при $t\to\infty$.

Пусть $\psi\in C_0^{k,m}$. Тогда

$$(\rho_n\psi)^{(j)}=\sum_{i=0}^{j}\mathfrak{C}_j^i\rho_n^{(i)}\psi^{(j-i)},$$

где $\mathfrak{C}_j^i$ — биномиальные коэффициенты. Отсюда видно, что $(\rho_n\psi)^{(j)}\in C_0^{0,m-n}$, $j=0,\dots,k$. Следовательно, оператор умножения на функцию ρ_n действует из $C_0^{k,m}$ в $C_0^{k,m-n}$, причем действует непрерывно.

Аналогичный факт верен для умножения на ρ_{-n}. $\square$

Символом $\mathbf{B}(X,Y)$, где X и Y — банаховы пространства, будем обозначать пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y.

Следствие 5. *Пусть X, Y и Z — банаховы пространства. Тогда билинейная операция поточечного умножения $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\beta$, где $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbf{B}(Y,Z)$, а $\beta\mathbb{R}\to\mathbf{B}(X,Y)$ непрерывно** действует из $C_0^{k,m}(\mathbb{R},\mathbf{B}(Y,Z))\times C_0^{k,n}(\mathbb{R}\to\mathbf{B}(X,Y))$ в $C_0^{k,m+n}(\mathbb{R}\to\mathbf{B}(X,Z))$, $m,n\in\mathbb{Z}$, $k=0,1,2,\dots$.*

Доказательство. Случай $m=n=0$ разбирается непосредственно. Остальные случаи сводятся к нему с помощью предложения 4. $\square$

Предложение 6. Для любых $k=0,1,2,\dots$ и $m\in\mathbb{Z}$, подпространство вектор-функций вида

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^{l}e_i\varphi_i(t),\tag{1}$$

где $e_i\in\mathbb{E}$, а $\varphi_i\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, всюду плотно в $C_0^{k,m}(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

Доказательство. Случай $m=0$ и произвольного k разобран, например, в [13]. Случай $m\neq0$ вытекает из предложения 4. $\square$

Всякий непрерывный линейный (векторнозначный) функционал $f:\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})\to\mathbb{E}$ называют [10, 11], [9] *обобщенной функцией* или *распределением умеренного роста* со значениями в $\mathbb{E}$. Обозначим символом $\mathcal{S}'=\mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E})$ пространство всех обобщенных функций f умеренного роста. Значение $f\in\mathcal{S}'$ на $\psi\in\mathcal{S}$ будем обозначать символом $\langle\psi,f\rangle$.

Говорят, что последовательность $f_k\in\mathcal{S}'$ *сходится* к $f\in\mathcal{S}'$, если $\langle\psi,f_k\rangle\to\langle\psi,f\rangle$ для всех

* Напомним, что билинейное отображение $\mu:X\times Y\to Z$ является непрерывным, если существует такое $M<\infty$, что $\|\mu(x,y)\|\le M\|x\|\cdot\|y\|$ для всех $x\in X$ и $y\in Y$.

$\psi \in \mathcal{S}$. Такую сходимость в $\mathcal{S}'$ называют *поточечной.* Она порождается полунормами

$$\| f \|_{\psi} = \| \langle \psi, f \rangle \|, \;\; \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}),$$

и следовательно, локально выпукла.

Предложение 7. *Множество $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E})$ является локально выпуклым пространством, секвенциально полным относительно поточечной сходимости.*

Доказательство. Это известное свойство [14] пространства линейных операторов, определенных на пространстве Фреше (или, более общим образом, на бочечном пространстве), наделенного топологией поточечной сходимости. □

Предложение 8. *Для того чтобы вектор-функционал $f : \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{E}$ был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $k, m = 0,1,2,\ldots$, что f непрерывен относительно нормы $\| \cdot \|_{C_0^{k,m}}$.*

Доказательство. Вытекает из монотонности семейства норм $\| \cdot \|_{C_0^{k,m}}$. □

E*-сопряженным* к линейному оператору $A : \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ назовем линейный оператор $A' : \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E})$, обладающий свойством

$$\langle \psi, A' f \rangle = \langle A\psi, f \rangle,$$

для любых $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ и $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

Предложение 9. *Всякий непрерывный линейный оператор $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ имеет единственный E-сопряженный оператор $A' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, который непрерывен относительно поточечной сходимости.*

Доказательство. Чтобы убедиться, что правило $\langle \psi, A' f \rangle = \langle A\psi, f \rangle$ действительно определяет оператор $A' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, надо проверить, что для любого $f \in \mathcal{S}'$ правило $\psi \mapsto \langle A\psi, f \rangle$ определяет линейный непрерывный вектор-функционал. В самом деле, это правило является суперпозицией линейного непрерывного оператора $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ и линейного непрерывного вектор-функционала $f : \mathcal{S} \to \mathbb{E}$.

Очевидно, для проверки непрерывности оператора $A' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ достаточно проверить, что оператор $A' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ непрерывен в нуле, т.е. для любого элемента V некоторой предбазы окрестностей нуля пространства $\mathcal{S}'$ существует такой элемент U некоторой базы окрестностей нуля пространства $\mathcal{S}'$, что $A' U$.

В качестве предбазы окрестностей нуля в $\mathcal{S}'$ возьмем множества вида $V =: \{ f \in \mathcal{S}' : \| \langle \psi, f \rangle \| < \varepsilon \}$, где $\psi \in \mathcal{S}$, а $\varepsilon > 0$. Рассмотрим также окрестность $U = \{ f \in \mathcal{S}' : \| \langle A\psi, f \rangle \| < \varepsilon \}$. Очевидно, $A' U$. □

Пусть $f \in \mathcal{S}'$. Вектор-функционал f' , определенный правилом

$$\langle \psi, f' \rangle = -\langle \psi', f \rangle,$$

называют *производной* функционала f . Нетрудно проверить, что f' — действительно линейный и непрерывный функционал и, таким образом, принадлежит $\mathcal{S}'$. Из предложений 3 и 9 вытекает, что операция дифференцирования переводит $\mathcal{S}'$ в себя и непрерывна относительно поточечной сходимости.

Пусть X и Y — банаховы пространства, а $B \in \mathbf{B}(X,Y)$. Нетрудно видеть, что правило

$$\langle \psi, Bf \rangle = B \langle \psi, f \rangle$$

порождает линейный непрерывный оператор (обозначаемый той же буквой B) $f \mapsto Bf$, действующий из $\mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R},Y)$.

Обозначим через $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ множество $\cap_k \cup_{m \in \mathbb{Z}} C_0^{k,m}(\mathbb{R},\mathbb{E})$. Иными словами, $\mathcal{A}$ состоит бесконечно дифференцируемых функций, все производные которых растут не быстрее, чем многочлен.

Произведением функции $\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ на обобщенную функцию $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E})$ называют обобщенную функцию αf , определенную по правилу

$$\langle \psi, \alpha f \rangle = \langle \alpha\psi, f \rangle.$$

В силу следствия 5 (очевидным образом модифицированного) и предложения 9 умножение на α является непрерывным оператором из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$.

Обсудим более общую конструкцию. Пусть X и Y — банаховы пространства и пусть $\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Y))$. Наша задача — определить обобщенную функцию αf . Предположим сначала, что функция α имеет вид

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{l} B_i \alpha_i(t), \tag{2}$$

где $B_i \in \mathbf{B}(X,Y)$, а $\alpha_i \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Для такой функции α определим *произведение αf на обобщенную функцию* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{X})$ по правилу

$$\langle \psi, \alpha f \rangle = \sum_{i=1}^{l} B_i \langle \alpha_i \psi, f \rangle, \;\; \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}). \tag{3}$$

Теорема 10. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Для любых $k, m = 0,1,2,\ldots$ и $n \in \mathbb{Z}$ билинейное отображение $(\alpha, f) \mapsto \alpha f$*

допускает единственное продолжение с пространства функций вида (2), где $B_i \in \mathbf{B}(X,Y)$, *а* $\alpha_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, *декартово умноженного на пространство вектор-функционалов* $f \in \mathbf{B}(C_0^{k,m}(\mathbb{R},\mathbb{C}),X)$ *(см. предложение 8), до непрерывного билинейного отображения*

$$C_0^{k+1,-n}(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Y))\times\mathbf{B}(C_0^{k,m}(\mathbb{R},\mathbb{C}),X)\to$$

$$\to\mathbf{B}(C_0^{k,m+n+2}(\mathbb{R},\mathbb{C}),Y).$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathbf{B}(C_0^{k,m}(\mathbb{R},\mathbb{C}),X)$, $\psi \in C_0^{k,m+n+2}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, а $\alpha \in C_0^{k+1,-n}(\mathbb{R},B(X,Y))$. Покажем, что произведение

$$\langle\psi,\alpha f\rangle=\langle\alpha\psi,f\rangle,$$

можно определить так, чтобы оно непрерывно по норме зависело от f, ψ и α, а на функциях вида (2) совпадало с определением (3).

Преобразование $\psi\mapsto\alpha\psi$ представим в виде суперпозиции двух преобразований: сначала умножения функции ψ на функцию $t\mapsto(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}$, а затем умножения на функцию β, где $\beta(t)=(1+t^2)^{-\frac{n}{2}-1}\alpha(t)$. В силу предложения 4 $\beta\in C_0^{k+1,2}$. Заметим, что $C_0^{k+1,2}$ вложено в пространство Соболева W_1^{k+1}, причем

$$\|\gamma\|_{W_1^{k+1}}\le K\|\gamma\|_{C_0^{k+1,2}},\quad \gamma\in C_0^{k+1,2},\qquad(4)$$

для некоторой константы K. Тем самым, $\beta\in W_1^{k+1}(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Y))$.

Как известно, преобразование $\left(\frac{d}{dt}+\mathbf{1}\right)^{k+1}$ осуществляет (не изометрический) изоморфизм пространства W_1^{k+1} на пространство Лебега L_1, причем этот изоморфизм (и обратный к нему) переводит функции вида (2) в функции вида (2). Перенесем на W_1^{k+1} с помощью этого изоморфизма естественную норму, имеющуюся на пространстве L_1. Известно [15], что естественная норма на $L_1=L_1(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Y))$ обладает свойством

$$\|\beta\|=\inf\sum_{i=1}^{\infty}\|B_i\|\cdot\|\beta_i\|,$$

где $B_i\in\mathbf{B}(X,Y)$, $\beta_i\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, а инфимум берется по всем представлениям функции β в виде абсолютно сходящегося ряда

$$\beta(t)=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\beta_i(t),\qquad(5)$$

причем у любой функции $\beta\in L_1(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Y))$ такие представления имеются. Значит, этим свойством обладает и рассматриваемая норма в W_1^{k+1}.

Нетрудно видеть, что $W_1^{k+1}\subset C_0^{k,0}$, причем

$$\|\gamma\|_{C_0^{k,0}}\le N\|\gamma\|_{W_1^{k+1}},\quad\gamma\in W_1^{k+1},$$

для некоторой константы N. Поэтому в силу следствия 5 для любых $\gamma\in W_1^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ и $\tilde\psi\in C_0^{k,m}$ функция $\gamma\tilde\psi$ также принадлежит $C_0^{k,m}$, причем для некоторой константы M выполняется неравенство

$$\|\gamma\tilde\psi\|_{C_0^{k,m}}\le M\|\gamma\|_{W_1^{k+1}}\cdot\|\tilde\psi\|_{C_0^{k,m}}.\qquad(6)$$

Представим функцию β в виде (5). Положим

$$\langle\alpha\psi,f\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\langle\beta_i\tilde\psi,f\rangle,\qquad(7)$$

где

$$\tilde\psi(t)=(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}\psi(t).$$

Из оценки (получаемой с учетом неравенства (6))

$$\|\sum_{i=1}^{\infty}B_i\langle\beta_i(t)\tilde\psi,f\rangle\|\le M\|\tilde\psi\|_{C_0^{k,m}}\times$$

$$\times\|f:C_0^{k,m}\to X\|\sum_{i=1}^{\infty}\|B_i\|\cdot\|\beta_i\|_{W_1^{k+1}}$$

видно, что ряд (7), определяющий $\langle\alpha\psi,f\rangle$, сходится абсолютно. Нетрудно показать, что определение (7) не зависит от выбора представления (5). Более того, с учетом описанного выше свойства выбранной нормы в W_1^{k+1} из последнего неравенства вытекает, что

$$\|\langle\alpha\psi,f\rangle\|\le M\|\beta\|_{W_1^{k+1}}\times$$

$$\times\|\tilde\psi\|_{C_0^{k,m}}\cdot\|f:C_0^{k,m}\to X\|.$$

Отсюда и из неравенства (4) имеем (напомним, что $\beta\in C_0^{k+1,2}$)

$$\|\langle\alpha\psi,f\rangle\|\le M'\|\beta\|_{C_0^{k+1,2}}\times$$

$$\times\|\tilde\psi\|_{C_0^{k,m}}\cdot\|f:C_0^{k,m}\to X\|$$

для некоторой константы M'. Возвращаясь с помощью предложения 4 от β к α, последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|\langle\alpha\psi,f\rangle\|\le M''\|\alpha\|_{C_0^{k+1,-n}}\times$$

$$\times\|\psi\|_{C_0^{k,m+n+2}}\cdot\|f:C_0^{k,m}\to X\|.$$

Полагая $\langle\psi,\alpha f\rangle=\langle\alpha\psi,f\rangle$, получаем продолжение из утверждения теоремы.

Осталось сделать несколько замечаний. В силу формулы (7) рассматриваемое определение $\langle\psi,\alpha f\rangle$ равносильно определению

$$\langle \alpha\psi, f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \alpha_i \psi, f\rangle,$$

где

$$\alpha_i(t) = (1+t^2)^{\frac{n}{2}+1} \beta_i(t).$$

Поэтому рассматриваемое определение $\langle \psi, \alpha f\rangle$ совпадает с определением (3) при условии, что сумма конечна, а $\beta_i \in W_1^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ и тем более при условии, что $\beta_i \in C_0^{k+1,2}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset W_1^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, что в силу предложения 4 равносильно тому, что $\alpha_i \in C_0^{k+1,-n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Напомним, что в силу предложения 6 суммы вида (2) с $\alpha_i \in C_0^{k+1,-n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ и даже с $\alpha_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ образуют всюду плотное подмножество пространства $C_0^{k+1,-n}(\mathbb{R}, B(X,Y))$. Поэтому непрерывное продолжение единственно. $\square$

Для произвольных $\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Y))$ и $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ определим *произведение* $\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},Y)$ в соответствии с теоремой 10. Очевидно, при увеличении k, m и n получается то же самое αf. Следовательно, определение αf от k, m и n не зависит.

Следствие 11. *Имеет место включение*

$$\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{E}) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E}).$$

Доказательство. Возьмем в качестве X пространство $\mathbb{C}$, в качестве Y — пространство $\mathbb{E}$, а в качестве f функцию, тождественно равную 1. Отождествим $\mathbf{B}(X,Y) = \mathbf{B}(\mathbb{C},\mathbb{E})$ с $\mathbb{E}$, задавая оператор $A \in \mathbf{B}(\mathbb{C},\mathbb{E})$ посредством его значения в точке $1 \in \mathbb{C}$. Остается применить теорему 10 к произведению $\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ на f. $\square$

Следствие 12. *Пусть X, Y и Z — банаховы пространства. Для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ и для любых $\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbf{B}(Y,Z))$ и $\beta \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Y))$ имеем*

$$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f.$$

Доказательство. Возьмем произвольные $f \in \mathbf{B}(C_0^{k,m}(\mathbb{R},\mathbb{C}),X)$ и $\beta \in C_0^{k+1,-n}(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Y))$. Согласно теореме 10 в этом случае $\beta f \in \mathbf{B}(C_0^{k,m+n+2}(\mathbb{R},\mathbb{C}),Y)$. Пусть $\alpha \in C_0^{k+1,-n'}(\mathbb{R},\mathbf{B}(Y,Z))$. Снова согласно теореме 10 $\alpha(\beta f) \in \mathbf{B}(C_0^{k,m+n+n'+4}(\mathbb{R},\mathbb{C}),Z)$.

С другой стороны, в рассматриваемых предположениях $\alpha\beta \in C_0^{k+1,-n-n'}(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Z))$. Поэтому согласно теореме 10 $(\alpha\beta) f \in \mathbf{B}(C_0^{k,m+n+n'+2}(\mathbb{R},\mathbb{C}),Z)$.

Возьмем (предложение 6) последовательности

$$\alpha_l(t) = \sum_{i=1}^{l} A_{li}\alpha_{li}(t), \quad \beta_l(t) = \sum_{i=1}^{l} B_{li}\beta_{li}(t),$$

где $A_{li} \in \mathbf{B}(Y,Z)$, $\alpha_{li} \in C_0^{k+1,-n'}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $B_{li} \in \mathbf{B}(X,Y)$, $\beta_{li} \in C_0^{k+1,-n}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, сходящиеся к α и β по нормам пространств $C_0^{k+1,-n'}(\mathbb{R},\mathbf{B}(Y,Z))$ и $C_0^{k+1,-n}(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Y))$ соответственно. В силу следствия 5 последовательность $\alpha_l\beta_l$ сходится к $\alpha\beta$ по норме пространства $C_0^{k+1,-n-n'}(\mathbb{R},\mathbf{B}(X,Z))$.

Перейдем к пределу в тождестве

$$\alpha_l(\beta_l f) = (\alpha_l\beta_l) f.$$

Левая часть сходится к $\alpha(\beta f)$ в $\mathbf{B}(C_0^{k,m+n+n'+4}(\mathbb{R},\mathbb{C}),Z)$, правая часть сходится к $(\alpha\beta) f$ в $\mathbf{B}(C_0^{k,m+n+n'+2}(\mathbb{R},\mathbb{C}),Z)$. Поскольку из сходимости в одном из этих пространств вытекает сходимость в другом, получаем доказываемое равенство. $\square$

На функциях $\psi \in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ определим *преобразование Фурье* по правилу

$$(\mathcal{F}\psi)(\omega) = \hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\psi(t)dt.$$

Поскольку $\mathcal{S} \subset L_1$, преобразование Фурье определено и на функциях $\psi \in \mathcal{S}$. Нетрудно показать, что преобразование Фурье $\mathcal{F}$ переводит $\mathcal{S}$ в себя и является [9] непрерывным оператором. Более того, оператор $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ обратим, при этом *обратное преобразование Фурье* задается правилом

$$(\mathcal{F}^{-1}\psi)(\omega) = \check{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\psi(\omega)d\omega.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}f = \hat{f}$ функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E})$ определяют [10] в соответствии с правилом

$$\langle \psi, \hat{f}\rangle = \langle \hat{\psi}, f\rangle, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

В силу предложения 9 преобразование Фурье $\mathcal{F}$ в $\mathcal{S}'$ корректно определено и является непрерывным оператором. Нетрудно показать [9], что $\mathcal{F}$ обратим в $\mathcal{S}'$, причем обратным является E-сопряженный оператор к $\mathcal{F}^{-1}$ в $\mathcal{S}$.

В $\mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{E})$ справедливы обычные [9] свойства преобразования Фурье.

2. ЗАДАЧА ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦА $\mathcal{S}'$

Пусть X и Y — банаховы пространства, а $F,G \in \mathbf{B}(X,Y)$. (*Линейным*) *пучком* называют [16—19] функцию

$$\lambda \mapsto \lambda F - G, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Резольвентным множеством пучка называют множество $\rho(F,G)$, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda F - G$ обратим, а *резольвентой* пучка — функцию (семейство)

$$R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}, \ \lambda \in \rho(F,G).$$

Дополнение $\sigma(F,G) = \mathbb{C} \setminus \rho(F,G)$ к резольвентному множеству называют *спектром* пучка.

Пример 1. Пусть Y — банахово пространство, $G : Y \to Y$ — линейный замкнутый оператор с областью определения $X \subseteq Y$, а $\mathbf{1} : Y \to Y$ — тождественный оператор. Введем на X норму графика $\| x \|_X = \| x \|_Y + \| Gx \|_Y$. Относительно этой нормы оба оператора $\mathbf{1}, G : X \to Y$ являются ограниченными. Тем самым обсуждение пучка $\lambda \mapsto \lambda \mathbf{1} - G$ укладывается в рассматриваемую схему.

Предложение 13. (см., например, [8, предложение 5]) *Резольвента пучка удовлетворяет F-тождеству Гильберта*

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda - \mu) R_\lambda F R_\mu, \quad \lambda, \mu \in \rho(F,G). \tag{8}$$

Зафиксируем пучок $\lambda \mapsto \lambda F - G : X \to Y$ и рассмотрим его резольвенту R_λ, $\lambda \in \rho(F,G)$. Обозначим через $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y,X)$ замыкание по норме пространства $\mathbf{B}(Y,X)$ линейной оболочки всех операторов R_λ, $\lambda \in \rho(F,G)$. Введем на $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y,X)$ операцию *F-умножения* по формуле

$$A \odot B = AFB.$$

В силу тождества Гильберта (8) F-умножение не выводит из $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y,X)$. Степени относительно F-умножения будем обозначать символами типа $A^{n\odot}$ и $A^{-1\odot}$.

Теорема 14. ([8, теорема 8]) *Относительно F-умножения пространство $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y,X)$ является коммутативной банаховой алгеброй.*

Предложение 15. *Резольвентное множество $\rho(F,G)$ пучка открыто, а резольвента на нем является аналитической функцией со значениями в алгебре $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y,X)$. При этом в окрестности любой точки $\mu \in \rho(F,G)$ резольвента пучка раскладывается в степенной ряд*

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R_\mu^{n+1\odot},$$

где $R_\mu^{n+1\odot}$ — $(n+1)$-ая степень относительно F-умножения.

Доказательство. Непосредственно вытекает из [8] и [20]. □

Пучок $\lambda \mapsto \lambda F - G$ назовем *пучком умеренного роста*, если мнимая ось содержится в резольвентном множестве $\rho(F,G)$, причем существуют такие $m \in \mathbb{Z}$ и $M > 0$, что

$$\| (i\omega F - G)^{-1} : Y \to X \| \le M(1 + | \omega |)^m, \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Предложение 15. *Пусть пучок $\lambda \mapsto \lambda F - G$ имеет умеренный рост. Тогда функция $\omega \mapsto (i\omega F - G)^{-1}$ принадлежит $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Заметим, что в силу предложения 15

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} (\lambda F - G)^{-1} = = k!(-1)^k [(\lambda F - G)^{-1}]^{(k+1)\odot}.$$

Остается воспользоваться оценкой (9).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(Fu')(t) - (Gu)(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение соответствующий ему оператор

$$\mathcal{L}u = Fu' - Gu. \tag{11}$$

Очевидно, $\mathcal{L}$ непрерывно действует из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, Y)$.

Теорема 17. *Пусть пучок имеет умеренный рост. Тогда для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, Y)$ уравнение (10) имеет единственное решение $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$. При этом преобразование Фурье решения u задается формулой*

$$\hat{u}(\omega) = (i\omega F - G)^{-1} \hat{f}(\omega). \tag{12}$$

Доказательство. Перейдем от оператора (11) к его преобразованию Фурье

$$\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{F} \mathcal{L} \mathcal{F}^{-1}.$$

При этом уравнение (10) равносильным образом перепишется в виде

$$(i\omega F - G)\hat{u}(\omega) = \hat{f}(\omega), \ \omega \in \mathbb{R}.$$

В силу предложения 16 функция $\omega \mapsto (i\omega F - G)^{-1}$ принадлежит $\mathcal{A}$. Поэтому в силу теоремы 10 формула (12) определяет функцию $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$. В силу следствия 12 функция (12) является решением уравнения (10). Единственность решения также очевидна. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

2. *Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения / В. В. Жиков, Б. М. Левитан. — М. : Издательство МГУ, 1978. — 205 с.

3. *Массера Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х. Массера, Х. Шеффер. — М. : Мир, 1970. — 456 с.

4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

5. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Math. Z. 1930. Bd. 32, 5. S. 703—728.

6. *Bart H.* Wiener—Hopf factorization, inverse Fourier transforms and exponentially dichotomous operators / H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek // J. Funct. Anal. 1986. Vol. 68. P. 1—42.

7. *Mee C. V. M. van der,* Exponentially dichotomous operators and applications / C. V. M. van der Mee. — Birkhäuser: Basel—Boston—Berlin, 2008. — xv+224 p.

8. *Курбатова И. В.* Банахова алгебра, связанная с линейным операторным пучком / И. В. Курбатова // Математические заметки. — Т. 86. — 3. — 2009. — С. 394—401.

9. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 528 с.

10. *Schwartz L.* Distributions á valeurs vectorielles / L. Schwartz // Ann. Inst. Fourier. — 1957. — Vol. 7 — P. 1—141; II. — 1957. — Vol. 8. — P. 1—209.

11. *Schwartz L.* Théorie des distributions / L. Schwartz. — Vol. I, II. — Paris: Hermann. — 1950, 1951. — 150 p., 172 p.

12. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Наука, 1989. — 735 с.

13. *Treves F.* Topological vector spaces, distributions and kernels / F. Treves. — London: Academic Press, 1967. — vi + 565 p.

14. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства / Н. Бурбаки. — М. : ИЛ, 1959. — 410 с.

15. *Schatten H. H.* A theory of cross-spaces / H. H. Schatten. — New York: Princeton Univ. Press, 1950. — 162 p.

16. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

17. *Глазман И. М.* Конечномерный линейный анализ / И. М. Глазман, Ю. И. Любич. — М.: Наука, 1969. — 476 с.

18. *Икрамов Х. Д.* Матричные пучки — теория, приложения, численные методы / Х. Д. Икрамов // Итоги науки и техн. сер. мат. анал. — М.: ВИНИТИ. — Т. 29. — 1991. — С. 3—106.

19. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.

20. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле. — М.: ИЛ, 1962. — 829 с.

Печкуров Андрей Викторович — аспирант, Воронежский государственный университет
Тел. (473) 2208-282
E-mail: apechkurov@gmail.com.

Pechkurov Andrey Victorovich — Post graduate student, Voronezh State University
Tel. (473) 2208-282
E-mail: apechkurov@gmail.com