

# ЛОКАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ ДИСКРИМИНАНТНОГО МНОЖЕСТВА СЛАБО НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ В УСЛОВИЯХ НАРУШЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

М. А. Малюгина

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 21.02.2011 г.

**Аннотация.** В данной работе описана методика локального изучения дискриминантного множества уравнения Кармана с параметрами в условиях 2-модового вырождения и нарушения потенциальности. Представленные результаты, полученные с помощью сведения (редукции) к дискриминантному анализу ветвления решений двумерного алгебраического уравнения, позволили построить параметризацию дискриминантного множества и графически изобразить его характерные 2D- и 3D-сечения при различных значениях параметров.

**Ключевые слова:** Уравнение Кармана, бифуркация, дискриминантное множество, метод Ляпунова—Шмидта, ключевое отображение.

**Abstract.** In this paper the methods of local studying of discriminant set for Karman's equation with parameters in the case of two-mode extinction and non-potentiality is described. The results which were obtained by using reduction to discriminant analysis of bifurcation of two-dimensional algebraic equation's solutions let us to describe discriminant set parametrization and to plot the local 2D- and 3D-section with different means of parameters.

**Key words:** Karman's equation, bifurcation, discriminant set, Lyapunov—Schmidt method, key mapping

**Введение.** Типичные краевые задачи теории упругих систем являются, как правило, консервативными и поэтому они допускают применение вариационных методов [1]—[4]. Иногда приходится рассматривать упругие системы под воздействием неконсервативных сил [15]. В таких случаях соответствующие модельные краевые задачи не являются вариационными и для их исследования можно применять лишь методы анализа «общих» (непотенциальных) уравнений.

В данной работе предложена методика локального изучения уравнения Кармана при условии нарушения потенциальности, означающего малость неконсервативных сил. В этой ситуации можно использовать конструкции общей теории возмущений нелинейных систем, предположив, что порождающая (невозмущенная) система является консервативной. Такой подход позволяет частично использовать вычислительные алгоритмы, разработанные для потенциальных уравнений.

В работах Д. В. Костина [5], [6] предложен алгоритм вычисления равновесных конфигу-

раций слабо неоднородной упругой балки на упругом основании, находящейся вблизи равновесного состояния с двухмодовым вырождением. В итоге ему удалось описать строение каустики (дискриминантного множества) и проанализировать влияние характера неоднородности балки на форму ее прогиба.

В статье [9] рассмотрен другой тип возмущения уравнения конфигураций упругой балки на упругом основании, связанный с нарушением потенциальности уравнения (в условиях двухмодового вырождения). Затем в статьях [10], [11] было рассмотрено уравнение, сочетающее оба типа возмущений.

Предложенный в этих статьях вычислительный алгоритм использует элементы вычислительного алгоритма Д. В. Костина и фактически является его обобщением.

Заметим также, что количество «управляющих» параметров в задаче, рассмотренной в [11], на единицу больше, чем в задачах, рассмотренных Д. В. Костиным.

В настоящей статье представлен результат, аналогичный случаю балки [11], для упругой пластины.

# 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ДВУХМОДОВЫХ ПРОГИБОВ СЛАБО НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ КАРМАНА

Перед изложением основных результатов статьи обратимся сначала к схеме исследования равновесных состояний упругой прямоугольной пластины, продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае. Равновесные состояния описываются уравнениями Кармана (промасштабированными) [1]

$$\Delta^2 w - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta \varphi + \frac{1}{2} [w, w] = 0, \quad (1)$$

$$x, y \in \Omega_a,$$

при краевых условиях

$$w = \Delta w = \varphi = \Delta \varphi = 0 \Big|_{\Omega_a}, \quad \Omega_a = [0, a] \times [0, 1]. \quad (2)$$

Через  $w$  и  $\varphi$  в этих уравнениях обозначены функции прогиба и напряжения пластины длины  $a$  и ширины единица,  $\Delta$  — гармонический оператор Лапласа,  $[w, \varphi] := w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$ ,  $\lambda$  — параметр нагрузки.

Локальный анализ прогибов пластины Кармана успешно осуществляется благодаря тому, что соответствующая ключевая функция допускает следующее представление:

$$W(\xi, \lambda, a) = \frac{1}{2} (\alpha_1(\lambda, a)\xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, a)\xi_2^2) + \sum_{i,j=1}^2 h_{i,j}\xi_1^2\xi_2^2 + o(|\xi|^4),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — собственные значения оператора  $\Delta^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , отвечающие собственным векторам  $e_1, e_2$  (при критических значениях параметров, отвечающих случаю 2-мерного вырождения),

$$h_{j,j} = \frac{1}{8} |\Delta^{-1} [e_j, e_j]|^2,$$

$$h_{1,2} = h_{2,1} = \frac{1}{8} (\langle \Delta^{-1} [e_1, e_1], \Delta^{-1} [e_2, e_2] \rangle + 2 |\Delta^{-1} [e_1, e_2]|^2).$$

Через  $\Delta^{-1}$  выше и далее обозначен оператор Грина  $\psi \rightarrow \varphi$ , где  $\varphi$  — решение задачи Пуассона:

$$\Delta \varphi = \psi, \quad \varphi|_{\partial\Omega_a} = 0.$$

Справедливость данного представления является следствием общих утверждений Ю. И. Сапронова о строении главной части ключевой функции [8].

В случае прямоугольной и слабо неоднородной пластины, продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае, равновесные конфигурации описываются обобщенными уравнениями Кармана

$$\Delta(q\Delta w) - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta \varphi + \frac{1}{2} [w, w] = 0, \quad (3)$$

$$x, y \in \Omega_a,$$

при краевых условиях (2). Здесь  $q$  — коэффициент, отвечающий за неоднородность материала, из которого сделана пластина,  $q = 1 + \delta\gamma$ ,  $\delta$  — малый параметр,  $\gamma(x, y)$  — достаточно гладкая функция неоднородности,  $[w, \varphi] := w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$ ,  $\lambda$  — параметр нагрузки.

Краевую задачу (2)–(3) будем называть основной. Эта задача является потенциальной с потенциалом

$$V(w, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2} (q|\Delta w|^2 - \lambda|w_x|^2 - |\Delta \varphi|^2 - \langle [w, w], \varphi \rangle)$$

на  $H^4 \times H^4$  ( $H^4$  — соболевские функций класса  $W_2^4$  четвертого порядка — функции пространства Лебега, суммируемых со степенью 2, см. [8]). Здесь

$$|\varphi|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle := \int_{\Omega_a} \varphi^2(x, y) dx dy.$$

Исследование функционала  $V$  проводится посредством редукции к функционалу  $V$ :

$$V = \sup_{\varphi: \varphi \in H^4} V(w, \varphi, \lambda),$$

для которого имеет место представление [8]

$$V(w, \lambda, q) = \frac{1}{2} (q|\Delta w|^2 - \lambda|w_x|^2) + \frac{1}{8} |\Delta^{-1} [w, w]|^2.$$

Отметим, что в [15] установлена изоморфность оператора  $\Delta$  действующего, из пространства функций гильбертовского класса  $C^{2+\alpha}(\Omega_a)$ , удовлетворяющих нулевому условию Дирихле, на пространство функций гильбертовского класса  $C^{0+\alpha}(\Omega_a)$ , удовлетворяющих условию согласования  $\psi(0, 0) = \psi(a, 0) = \psi(0, 1) = \psi(a, 1) = 0$ .

Следуя [8], будем далее использовать в качестве пространства состояний банахово пространство  $E := \{w \in H^4 : \Delta^2 w \in F\}$  с нормой  $\|w\|_E = \|\Delta^2 w\|_{C^{0+\alpha}(\Omega_a)}$ .

В [6] установлено, что для обобщенных уравнений Кармана (3), при краевых условиях (2) подмножество  ${}^3 \setminus \Sigma(f)$  ( $\Sigma(f)$  — дискриминантное множество [8]), в достаточно малой

окрестности нуля состоит из четырех связанных открытых подмножеств  $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_9$  (ячеек регулярности). Подмножеству  $\Omega_k$  соответствует расклад из  $k$  бифурцирующих конфигураций.

Доказательство проводится посредством анализа ключевой функции

$$W(\xi, \lambda, a, q) := \inf_{v: v \in O_*} V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + v, \lambda, q),$$

$$\xi \in O^2.$$

Здесь  $O^2$  и  $O_*$  — достаточно малые окрестности нулей соответственно в  $R^2$  и

$$E_* = \{v \in E : \langle v, e_1 \rangle = \langle v, e_2 \rangle = 0\}.$$

Функция  $W$  допускает представление

$$W = \frac{1}{2}(\alpha_1(\lambda, \varepsilon, a)\xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, \varepsilon, a)\xi_2^2 + \alpha_3(\varepsilon, a)\xi_1\xi_2) +$$

$$+ \sum_{i,j=1,2}^2 \delta_{ij}\xi_i^2\xi_j^2 + \dots,$$

где

$$\delta_{j,j} = |\Delta^{-1}[e_j, e_j]|^2,$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} =$$

$$= \frac{1}{8}(\langle \Delta^{-1}[e_1, e_1], \Delta^{-1}[e_2, e_2] \rangle + 2|\Delta^{-1}[e_1, e_2]|^2),$$

$$\alpha_1(\lambda, a, \varepsilon) = \int_0^a q(\Delta e_1)^2 - \lambda(e'_1)^2 dx,$$

$$\alpha_2(\lambda, a, \varepsilon) = \int_0^a q(\Delta e_2)^2 - \lambda(e'_2)^2 dx,$$

$$\alpha_3(a, \varepsilon) = 2 \int_0^a q \Delta e_1 \Delta e_2 dx.$$

В качестве  $e_1, e_2$ , используются возмущенные моды бифуркации (возмущенные корневые векторы), для которых имеет место представление в виде  $e_k = e_k - \varepsilon h_k + o(\varepsilon)$ , где  $h_k$  определяются соотношениями  $h_k = P e_k$ ,

$$P := \frac{1}{2\pi i} \int (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz,$$

$$\mathcal{A}u = \Delta^2 u + \lambda u_{xx}, \quad \mathcal{B}u = \Delta(\gamma \Delta u).$$

Соответствующие точные вычислительные формулы опубликованы в [5], [6]. В этих же работах показано, что существует система ключевых координат, в которой ключевая функция выглядит следующим образом:

$$W_q(\xi, \nu) = \frac{1}{2}(\nu_1 \xi_1^2 + \nu_2 \xi_2^2 + 2\nu_3 \xi_1 \xi_2) +$$

$$+ \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 2b \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4) +$$

$$+ o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4) O(\nu, \varepsilon) + o(\nu, \varepsilon), 1 < b < 3. \quad (4)$$

При этом  $\nu_j$  допускают явные выражения через исходные параметры. Здесь, как и в случае балки, появилось дополнительное слагаемое  $\nu_3 \xi_1 \xi_2$ , понижающее симметрию прямоугольного параллелограмма до симметрии четности.

Из теорем Дж. Мазера о конечной определенности ростков гладкой функции [13], [14] следует утверждение о том, что локальный топологический тип каустики, набор *bif*-раскладов ключевой функции и асимптотики бифурцирующих ветвей полностью определяются главной частью ключевой функции (полученной после отбрасывания “хвоста” в асимптотической формуле (4)).

Алгебраическая структура главной части ключевой функции для пластины Кармана оказалась идентичной той, которую имеет главная часть ключевой функции, полученной при рассмотрении уравнения упругой балки. Таким образом, каустика пластины имеет (локальное) строение, аналогичное строению каустики балки. Список раскладов бифурцирующих экстремалей также аналогичен.

## 2. СЛУЧАЙ НАРУШЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

Введем в рассмотренное выше уравнение (из основной краевой задачи) слагаемое  $\varepsilon \frac{dw}{dx}$ , нарушающее его потенциальность [2]. Наличие этого слагаемого приводит к невозможности использования метода ключевой функции. В данной ситуации нужно использовать ключевое уравнение (на координатной плоскости) [8] (в потенциальном случае ключевое отображение является градиентом ключевой функции).

**Теорема 1.** Для ключевого отображения, соответствующего основной краевой задаче при  $\delta = 0$  с непотенциальным слагаемым  $\varepsilon \frac{dw}{dx}$ , имеет место следующее представление:

$$\theta(\xi) := \text{grad } W(\xi) + \varepsilon B\xi + o(\varepsilon), \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где  $W(\xi)$  — ключевая функция для основной краевой задачи при  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon B\xi = -\frac{8}{3\pi} \varepsilon (\xi_2 e_1 - \xi_1 e_2)$ , и  $e_1, e_2$  — соответствующие моды моды бифуркации.

**Доказательство** почти дословно повторяет рассуждения при обосновании аналогичного

факта для упругой балки [11].

Главную часть ключевого отображения  $\theta_\varepsilon(\xi)$  запишем в виде

$$\theta_\varepsilon(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} \xi_1^3 + b\xi_1\xi_2^2 \\ \xi_2^3 + b\xi_2\xi_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1\xi_1 \\ \lambda_2\xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon\xi_2 \\ \varepsilon\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства получения графического изображения произведем переход к параметрам  $\lambda_1 = \delta_1 + \delta_2$ ,  $\lambda_2 = \delta_1 - \delta_2$ .

Соответствующее дискриминантное множество для этого отображения определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(\xi) = 0, \\ \Theta(\xi) = 0; \end{cases}$$

где  $\Theta(\xi) = \det \left( \frac{\partial \theta_\varepsilon(\xi)}{\partial \xi} \right)$  — якобиан отображения  $\theta_\varepsilon(\xi)$ .

Очевидно, что часть дискриминантного множества, отвечающая за вырождение нулевых решений, задается уравнением  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \varepsilon^2 = 0$ . Для локального описания части дискриминантного множества, отвечающей за вырождение ненулевых решений, делается переход к полярной системе координат  $\xi_1 = r \cos(\varphi)$ ,  $\xi_2 = r \sin(\varphi)$ . В случае  $b = 2$  можно сформулировать следующую теорему:

**Теорема 2.** *Часть дискриминантного множества, отвечающая за вырождение ненулевых решений исходного уравнения, задается следующей параметризацией:*

$$\begin{cases} \varepsilon = -3s \frac{\sin^3(\psi)}{\cos(\psi)}, \\ \lambda_1 = -3s(1 + \cos^2(\psi)) + s \frac{(5\cos^2(\psi) - 3)}{\cos(\psi)}, \\ \lambda_2 = -3s(1 + \cos^2(\psi)) - s \frac{(5\cos^2(\psi) - 3)}{\cos(\psi)}. \end{cases}$$

Здесь  $s = \frac{r^2}{4}$ ,  $\psi = 2\varphi$ .

Для данного случая соответствующие сечения дискриминантного множества с указанием количества решений в каждой из областей были даны в [9].

В более общей ситуации, в которой объединены два типа возмущений, вызванные неоднородностью балки и непотенциальностью уравнения, на основе результатов, полученных ранее в каждом из частных случаев, можно провести исследование обобщенного уравнения

Главная часть ключевого отображения приобретает второе дополнительное слагаемое:

$$\theta_\varepsilon(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} \xi_1^3 + b\xi_1\xi_2^2 \\ \xi_2^3 + b\xi_2\xi_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1\xi_1 \\ \lambda_2\xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon\xi_2 \\ \varepsilon\xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta\xi_2 \\ \delta\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\lambda_1 = \delta_1 + \delta_2$ ,  $\lambda_2 = \delta_1 - \delta_2$ .

Дискриминантное множество для этого отображения определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \theta_{\varepsilon,\delta}(\xi) = 0, \\ \Theta(\xi) = 0; \end{cases}$$

где  $\Theta(\xi) = \det \left( \frac{\partial \theta_{\varepsilon,\delta}(\xi)}{\partial \xi} \right)$  — якобиан отображения  $\theta_{\varepsilon,\delta}(\xi)$ .

Как и в предыдущем случае можно показать, что часть дискриминантного множества, отвечающая за вырождение нулевых решений, задается уравнением  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 - \delta^2 + \varepsilon^2 = 0$ .

Для ненулевых решений, вновь применив переход к полярной системе координат  $\xi_1 = r \cos(\varphi)$ ,  $\xi_2 = r \sin(\varphi)$ , получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Часть дискриминантного множества, отвечающая за вырождение ненулевых решений исследуемого уравнения, задается следующей параметризацией:*

*Часть дискриминантного множества, отвечающая за вырождение ненулевых решений исследуемого уравнения, задается следующей параметризацией:*

$$\begin{cases} \varepsilon = -s \frac{\sin^3(\psi)(b^2 - 1)}{\cos(\psi)} - \delta \frac{(\sin^2(\psi)(b - 1) + 2)}{2 \cos(\psi)}, \\ \lambda_1 = -s(b + 1)(2 - \sin^2(\psi)(b - 1)) + s(b - 1) \frac{(2 - (b + 3)\sin^2(\psi))}{\cos(\psi)} + \frac{\delta(b - 1)}{2} \sin(\psi) - \frac{(b + 1)\delta \sin(\psi)}{2 \cos(\psi)}, \\ \lambda_2 = -s(b + 1)(2 - \sin^2(\psi)(b - 1)) - s(b - 1) \frac{(2 - (b + 3)\sin^2(\psi))}{\cos(\psi)} + \frac{\delta(b - 1)}{2} \sin(\psi) + \frac{(b + 1)\delta \sin(\psi)}{2 \cos(\psi)}. \end{cases}$$

Здесь  $s = \frac{r^2}{4}$ ,  $\psi = 2\varphi$

Параметризация, полученная в Теореме 2, задает трехмерную поверхность в четырехмерном пространстве  $(\lambda_1, \lambda_2, \delta, \varepsilon)$ . 3D-сечения данной поверхности при фиксированном значении параметра  $\varepsilon = 0.2$  изображены на рис. 1,

2, 3. Осями координат служат параметры  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\delta$ .

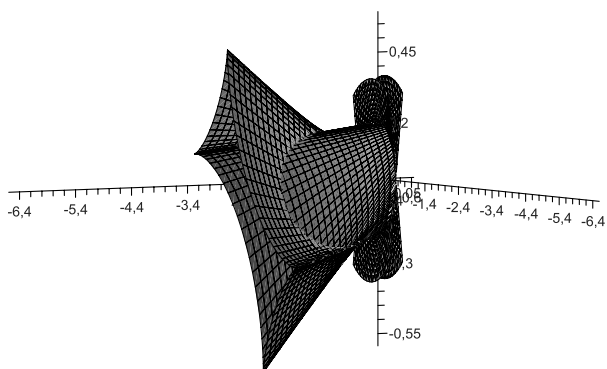


Рис. 1. ( $b = 1.1$ )

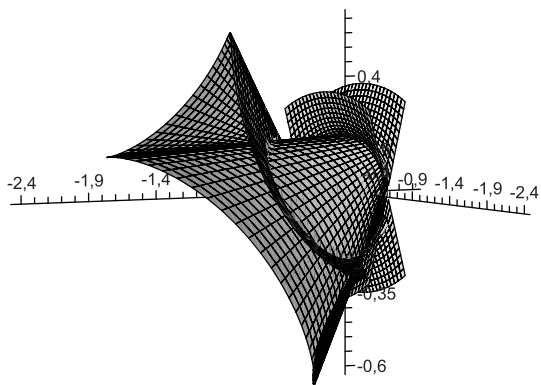


Рис. 2. ( $b = 2$ )

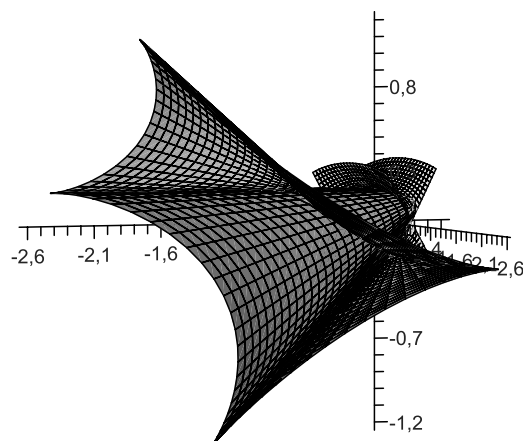


Рис. 3. ( $b = 3$ )

2D-сечения при различных сочетаниях параметров  $b$ ,  $\varepsilon$  и  $\delta$  приведены на следующих рисунках (рис. 4, 5, 6). Осями координат служат параметры  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Цифрами на рисунках указано количество решений в каждой из ячеек регулярности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. — М.: Гостехиздат, 1956.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматлит, 1961. — 340 с.
3. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. — М.: Наука, 1989. — 376 с.
4. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. — М.: Мир, 1984. Т. 1. — 350 с., Т. 2. — 285 с.

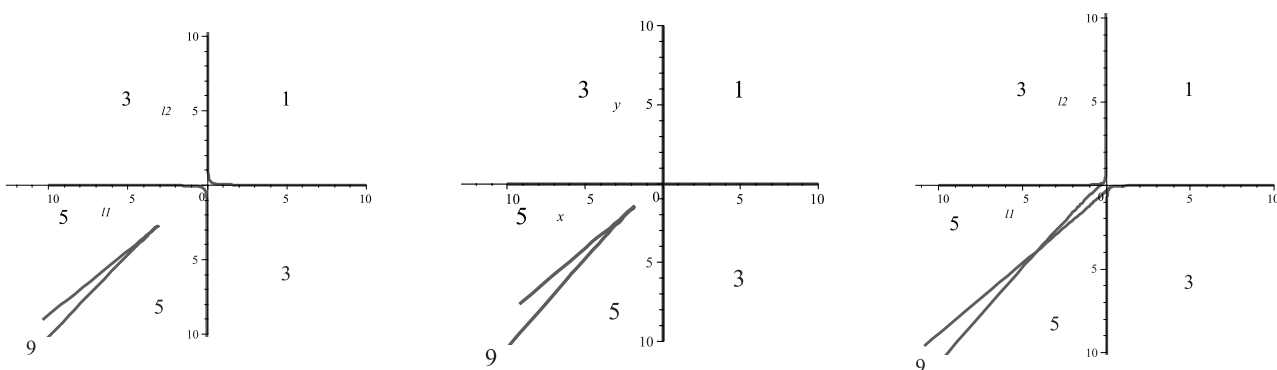


Рис. 4.  $b = 1.1$  ( $\delta > \varepsilon$ ), ( $\delta = \varepsilon$ ), ( $\delta < \varepsilon$ )

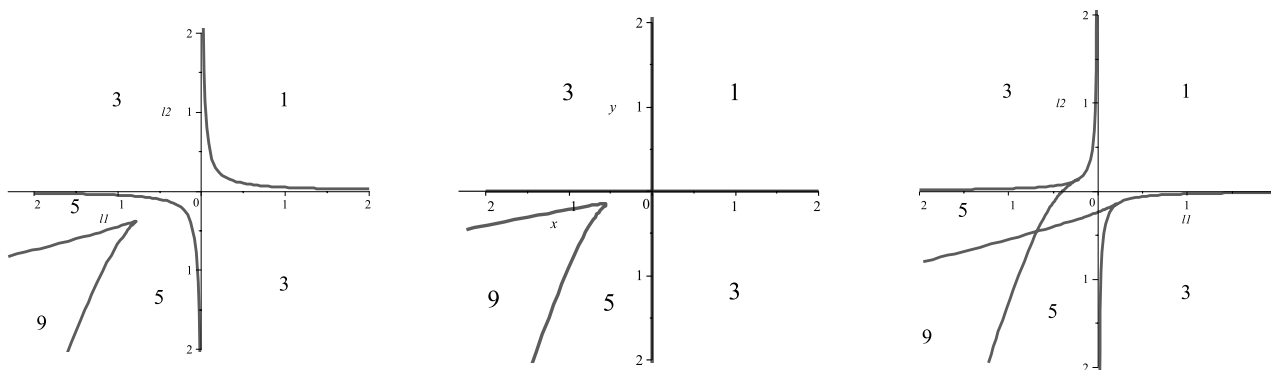


Рис. 5.  $b = 2$  ( $\delta > \varepsilon$ ), ( $\delta = \varepsilon$ ), ( $\delta < \varepsilon$ )

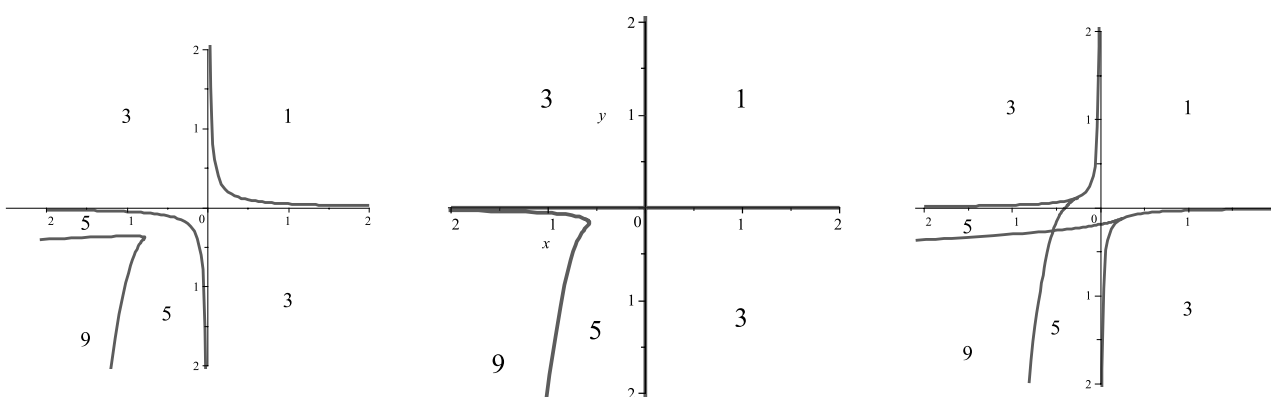


Рис. 6.  $b = 3$  ( $\delta > \varepsilon$ ), ( $\delta = \varepsilon$ ), ( $\delta < \varepsilon$ )

5. Костин Д. В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях // Д. В. Костин // Матем. заметки, 2008, 83:1. — С. 50—60.

6. Костин Д. В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки // Д. В. Костин // Доклады академии наук, 2008. — Т. 418, № 4. — С. 295—299.

7. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. О двухмодовых бифуркациях решений одной вариационной краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Понтрягинские чтения — XI. Сборник трудов. Часть 1. — Воронеж, ВГУ. 2000. — С. 57—64.

8. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. — Т. 12. 2004. — С. 3—140.

9. Малюгина М. А. Бифуркационный анализ краевой задачи для ОДУ четвертого порядка в условиях нарушения потенциальности // Математические модели и операторные уравнения. Том 5, ч. 1. — Воронеж: ВГУ, 2008. — С. 114—121.

10. Малюгина М. А. К анализу посткритических прогибов слабо неоднородных упругих систем в условиях нарушения потенциальности // Семинар по глобальному и стохастическому анализу / Сборник научных статей под ред. Ю. Е. Гликлиха и Ю. И. Сапронова. — Воронеж: ВГУ. 2009. — Вып. 4. — С. 32—37.

11. Малюгина М. А. Сечение дискриминантных множеств слабо неоднородных упругих систем в условиях нарушения потенциальности // Вестник ВГУ. — Воронеж: ВГУ, 2011. № 1. — С. 187—192.

12. Holder E. J., Schaeffer D. Boundary conditions and mode jumping in the Karman equations // SIAM J. Math. Anal. — 1984. В. 15. N 3. — P. 446—457.

13. Арнольд В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. — М.: МЦНМО, 2004. — 672 с.

14. Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977. — 208 с.

15. Волков Е. А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, 2. — С. 13—16.

*Локальные сечения дискриминантного множества слабо неоднородной упругой пластины...*

*Малюгина Маргарита Александровна — аспирант, Воронежский государственный университет*

*Тел.: 7-904-210-00-68*

*E-mail: Malyugina-vrn@mail.ru*

*Malyugina Margarita Aleksandrovna — post graduate student, Voronezh State University*

*Tel.: 7-904-210-00-68*

*E-mail: Malyugina-vrn@mail.ru*