УДК 517.925.51—52

ЧАСТОТНЫЕ ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

И. Д. Коструб

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.01.2011 г.

Аннотация. Доказаны новые эффективно проверяемые признаки существования, единственности, почти периодичности и абсолютной устойчивости ограниченных решений обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.
Ключевые слова. Частотные методы, нелинейные дифференциальные уравнения, ограниченные решения, существование, единственность, почти периодичность, абсолютная устойчивость.

Abstract. Proved new-effectively verified the existence, uniqueness, almost periodicity and absolute stability of bounded solutions of ordinary nonlinear differential equations of second order.
Key words. Frequency methods, nonlinear differential equations, boundary solutions, existence, uniqueness, fast periodic, absolute stability.

Введение. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1] и особенно в автоматическом управлении [2] заметное место уделено упомянутой в заголовке статьи проблеме. Признаки существования ограниченных решений особенно важны в связи с открытым М. А. Красносельским и А. В. Покровским «принципом отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости» [3], [4]. Периодичность или почти периодичность ограниченных решений также представляет несомненный интерес [1], [5]. Эти же вопросы встречаются и в различных задачах теории колебаний; мы сошлёмся здесь на [6] и [7].

Основой для написания данной статьи послужили работы [8] и [9], первая из которых в решающей своей части опирается на недавний результат А. Г. Баскакова [10], относящийся к линейным дифференциальным операторам.

Нерезонансные многочлены. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + ... + a_nx = 0, \qquad (1)$$

коэффициенты которого — постоянные вещественные или комплексные числа, причём $a_0 \neq 0$. Выпишем соответствующие характеристический многочлен и характеристическое уравнение

$$L(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (2)$$

Многочлен $L(\lambda)$ назовём *нерезонансным*, если

$$L(i\theta) \neq 0, \ -\infty < \theta < +\infty. \qquad (3)$$

Условие (3) будем называть *нерезонансным условием* или *условием нерезонансности.*

Приведём достаточное условие нерезонансности, ичившись случаем вещественых многочленов. Обозначив через $d_1, d_2, ..., d_n$ последовательные главные миноры матрицы Гурвица, построенной для многочлена $L(\lambda)$, опираясь на формулу Орландо (см., например, [11, с. 488]) можно показать, что

$$d_n \neq 0 \qquad (4)$$

является достаточным условием нерезонансности.

Ограниченная функция Грина и интегральные постоянные. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + ... + a_nx = f(t), \qquad (5)$$

в котором $f(t)$ есть непрерывная ограниченная функция; последнее означает, что

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N 10-01-00276

$$|f(t)| \leq c, \ -\infty < t < +\infty. \tag{6}$$

Известно [5, §4], что если выполнено нерезонансное условие (3), то уравнение (5) при любой непрерывной ограниченной функции $f(t)$ имеет единственное ограниченное решение $x(t)$, причём ограниченными оказываются все производные $\dot{x}(t),...,x^{(n-1)}(t)$, и имеют место следующие формулы

$$x^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(j)}(t-s)f(s)ds, \ \ j = 0,1,...,n-1, \tag{7}$$

где $G(t)$ есть *ограниченная функция Грина.* Величину

$$æ_j = \int_{-\infty}^{+\infty} |G^{(j)}(t)|\, dt, \ \ j = 0,1,...,n-1 \tag{8}$$

назовём j *-й интегральной постоянной.* Иногда к ним удобно причислять и n *-ю интегральную постоянную*

$$æ_n = \frac{1}{|a_0|} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|G^{(n)}(t)\right| dt = V\left\{G^{(n-1)}(t)\right\}, \tag{9}$$

где в конце формулы стоит полная вариация $G^{(n-1)}(t)$.

Передаточная функция и частотные постоянные. Напомним, что в автоматическом управлении функция комплексной переменной $W(\lambda) = 1/L(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ называется *передаточной функцией*, а функция вещественного переменного $H(\theta) = W(i\theta) = 1/L(i\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ — *частотной характеристикой* [2, с. 12—14].

Величину

$$\sigma_j = \max_{-\infty<\theta<+\infty} \left|\frac{(i\theta)^j}{L(i\theta)}\right|, \ \ j = 0,1,...,n-1 \tag{10}$$

назовём j *-й частотной постоянной.* К ним, как и выше, удобно причислять и n *-ю частотную постоянную*

$$\sigma_n = \sup_{-\infty<\theta<+\infty} \left|\frac{(i\theta)^n}{L(i\theta)}\right|. \tag{11}$$

Отметим, что $\sigma_j^2 \leq \sigma_{j-1}\sigma_{j+1}$ для $j = 1,...,n-1$. Действительно,

$$\frac{\left|(i\theta)^j\right|^2}{\left|L(i\theta)\right|^2} = \frac{\left|(i\theta)^{j-1}\right|}{\left|L(i\theta)\right|}\frac{\left|(i\theta)^{j+1}\right|}{\left|L(i\theta)\right|} \leq \sigma_{j-1}\sigma_{j+1},$$

переходя в котором к супремуму в левой части, получаем требуемое неравенство.

Сравнение интегральных и частотных постоянных. Имеют место следующие неравенства [9]

$$\sigma_0 \leq æ_0, \sigma_j < æ_j, \ \ j = 1,...,n. \tag{12}$$

Отметим, что *в первом неравенстве знак равенства достигается тогда и только тогда, когда характеристический многочлен подобен вещественному многочлену, которому отвечает знакопостоянная ограниченная функция Грина (т.е. либо $G(t) \geq 0$ при всех t, либо $G(t) \leq 0$ при всех t).*

Отметим, ещё что в первом неравенстве в (12) знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $æ_0 = 1/\left|a_n\right|$.

Интегральные операторы. Геометрический смысл интегральных и частотных постоянных полностью раскрывает приводимое ниже известное утверждение [9]. Введём обозначение для интегральных операторов, определяемых формулой (7)

$$K_j f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(j)}(t-s)f(s)ds, \ \ j = 0,1,...,n-1. \tag{13}$$

Введём в рассмотрение банахово пространство $C = C(-\infty,+\infty)$ комплексных и ограниченных функций $f(t)$, положив

$$\|f\| = \sup_{-\infty<t<+\infty} \left|f(t)\right|. \tag{14}$$

Интегральный оператор K_j действует в банаховом пространстве C и является линейным ограниченным оператором, причём

$$\left\|K_j\right\| = æ_j, \ \ \text{spr } K_j = \sigma_j, \ \ j = 0,1,...,n-1, \tag{15}$$

где в первом случае говорится о норме интегрального оператора, а во втором — о его спектральном радиусе.

Слабо нелинейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение n-го порядка следующего вида

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x = f(t,x,\dot{x},...,x^{(n-1)}), \tag{16}$$

в котором нелинейная функция $f(t,x_0,x_1,...,x_{n-1})$ непрерывна по времени t и удовлетворяет условию Липшица по пространственным переменным

$$\left|f(t,x_0,x_1,...,x_{n-1}) - f(t,y_0,y_1,...,y_{n-1})\right| \leq \\ \leq \sum_{j=0}^{n-1} l_j \left|x_j - y_j\right|, \tag{17}$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}$ — некоторые неотрицательные постоянные (липшицевы постоянные). Особо выделим функцию

$$f_0(t) = f(t,0,0,...,0), \tag{18}$$

которая по предположению является непрерывной.

В нелинейной æ-теории основную роль играет предположение [9]

$$q_{æ} \equiv \sum_{j=0}^{n-1} æ_j l_j < 1, \tag{19}$$

которое назовём *основным интегральным условием.* В более тонкой σ-теории основную роль играет предположение [8]

$$q_\sigma \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j l_j < 1, \tag{20}$$

которое назовём *основным частотным условием.* Как следует из неравенств (12) всегда

$$q_\sigma < q_{æ}, \tag{21}$$

за исключением того единственного случая, когда $\sigma_0 = æ_0$, а $l_1 = 0, ..., l_{n-1} = 0$. Поэтому если выполнено основное интегральное условие (19), то выполнено и основное частотное условие (20).

Мы сосредоточим своё внимание на теоремах, в которых участвует условие (20) (на так называемой σ-теории); аналогичные теоремы могут быть независимо получены и для условия (19), где они доказываются совершенно просто (æ-теория).

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (16) *выполнено нерезонансное условие* (3). *Пусть нелинейная функция* $f(t, x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ *непрерывна по времени* t *и удовлетворяет условию Липшица* (17). *Пусть непрерывная функция* $f_0(t)$ (18) *является ограниченной. Пусть, наконец, выполнено основное частотное условие* (20).

Тогда уравнение (16) *имеет единственное ограниченное решение* $x(t)$; *у этого решения ограничены производные* $\dot{x}(t), ..., x^{(n-1)}(t)$.

Если известно, что не только выполнено условие (20), но и условие (19), то имеют место оценки

$$\left\| x^{(j)} \right\| \le \frac{æ_j}{1 - q_{æ}} \|f_0\|, \quad j = 0, 1, ..., n-1. \tag{22}$$

Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 *нелинейная функция* $f(t, x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ *по* t *является стационарной (т.е. не зависит от* t), *периодической, квазипериодической или почти периодической, то и единственное ограниченное решение* $x(t)$ *также является стационарноым, периодическим, квазипериодическим или почти периодическим соответственно. Более того, имеет место включение*

модуль решения $x(t) \subseteq$ *модуль функции* f (23)

Поясним последнее. В условиях теоремы 2 можно указать такую последовательность вещественных чисел $\{\lambda_k\}$, что имеет место разложение в ряд Фурье

$$f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) \sim \sum_k f_k(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) e^{i\lambda_k t} \tag{24}$$

при любых фиксированных $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$. Совокупность всех конечных линейных комбинаций

$$\lambda = \sum_{j=1}^{p} k_j \lambda_j$$

с целыми коэффициентами и образуют, по определению, *модуль* функции $f(t, x_0, x_1, ..., x_{n-1})$.

Если для почти периодической функции

$$f(t) \sim \sum_k f_k(t) e^{i\lambda_k t} \tag{25}$$

ввести норму (*норму Безиковича*)

$$\|f\|_{\square} = \sqrt{\sum_k |\ f_k\ |^2}, \tag{26}$$

то имеют место оценки

$$\left\| x^{(j)} \right\|_{\square} \le \frac{\sigma_j}{1 - q_\sigma} \|f_0\|_{\square}, \quad j = 0, 1, ..., n-1 \tag{27}$$

(ср. с (22)). Отметим, что всегда $\|f\|_{\square} \le \|f\|$.

Теорема 3. *Если в условиях теоремы* 1 *характеристический многочлен* $L(\lambda)$ *линейной части уравнения* (16) *является гурвицевым, то единственное ограниченное решение этого уравнения является абсолютно устойчивым.*

Последнее означает, что если $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (16), а $y(t)$ — любое другое решение этого же уравнения, то

$$\left| x^{(j)}(t) - y^{(j)}(t) \right| \to 0 \text{ при } t \to +\infty \quad \text{для } j = 0, 1, ..., n-1. \tag{28}$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \tag{29}$$

с вещественными коэффициентами a и b. Выпишем соответствующие характеристический многочлен и характеристическое уравнение

$$L(\lambda) \equiv \lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{30}$$

Корни написанного приведённого квадратного уравнения находятся по формуле

$$\lambda_\pm = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}. \tag{31}$$

Если дискриминант неотрицателен, то имеет место *вещественный случай*, т.е. оба корня вещественны; если дискриминант отрицателен, то имеет место *комплексный случай*, т.е. оба корня комплексные (они комплексно сопряжены). В комплексном случае мы пишем $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = -a/2$ и $\beta = (b - a^2/4)^{1/2} > 0$.

Условие нерезонансности (3) в данном случае принимает вид

$$b \neq 0; \quad \begin{matrix} \text{если} \quad b > 0, \quad \text{то} \quad a \neq 0, \\ \text{если} \quad b < 0, \quad \text{то} \quad a \text{ — любое.} \end{matrix} \tag{32}$$

Отметим, что квадратный многочлен является гурвицевым, если

$$a > 0, \;\; b > 0, \tag{33}$$

т.е. точка с координатами a и b лежит в первом квадранте.

Излагаемые в дальнейшем результаты самым существенным образом основаны на приводимых ниже таблицах интегральных и частотных постоянных (æ-таблица и σ-таблица).

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ (æ-ТАБЛИЦА)

$$\text{æ}_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{|\lambda_+ \lambda_-|} & \text{вещественный случай,} \\[2ex] \dfrac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{cth}\left(\dfrac{\pi}{2}\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|\right) & \text{комплексный случай.} \end{cases} \tag{34}$$

$$\text{æ}_1 = \begin{cases} 2\left|\lambda_+\right|^{\frac{|\lambda_+|}{|\lambda_-|-|\lambda_+|}} \left|\lambda_-\right|^{\frac{|\lambda_-|}{|\lambda_+|-|\lambda_-|}}, & \\ 2/\left|\lambda_+ - \lambda_-\right| & \text{вещественный случай,} \\ 2/e|\lambda|, & \\ \dfrac{e^{-\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \operatorname{arctg}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|}}{\alpha^2 + \beta^2}\left(1 + cth\left(\dfrac{\pi}{2}\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|\right)\right) & \text{комплексный случай.} \end{cases} \tag{35}$$

$$\text{æ}_2 = \begin{cases} 2\left(1 - \dfrac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\left\{\dfrac{\left|\lambda_+\right|^{\frac{2\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+}}}{\left|\lambda_-\right|^{-\frac{a}{\lambda_- - \lambda_+}}} - \dfrac{\left|\lambda_+\right|^{-\frac{a}{\lambda_- - \lambda_+}}}{\left|\lambda_-\right|^{\frac{2\lambda_+}{\lambda_- - \lambda_+}}}\right\}\right), & \\ 2, & \\ 2(1 + e^{-2}) & \text{вещ. случай.} \end{cases} \tag{36}$$

В (35) в вещественном случае сначала приведена формула для различных характеристических чисел одного знака $(\lambda_+\lambda_- > 0)$, потом для характеристических чисел разных знаков $(\lambda_+\lambda_- < 0)$, а затем для кратного характеристического числа $(\lambda_+ = \lambda_- \equiv \lambda)$.

Интегральные постоянные (34) и (35) приведены в [12]. Интегральная постоянная (36) нам ранее не встречались.

ТАБЛИЦА ЧАСТОТНЫХ ПОСТОЯННЫХ (σ-ТАБЛИЦА)

$$\sigma_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{|\,b\,|}, & \text{если} \quad b \le \dfrac{a^2}{2}, \\[2ex] \dfrac{1}{|a|\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}, & \text{если} \quad b > \dfrac{a^2}{2}. \end{cases} \tag{37}$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{|\,a\,|}, & \text{если} \quad b > 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{4|b| + a^2}}, & \text{если} \quad b < 0. \end{cases} \tag{38}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad b \le \dfrac{a^2}{2}, \\[2ex] \dfrac{b}{|a|\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}, & \text{если} \quad b > \dfrac{a^2}{2}. \end{cases} \tag{39}$$

Формула (37) содержится в статье К. О. Фридрихса [7, с. 233]. Частотные постоянные (38) и (39) нам ранее не встречались.

Сравнение формул (37) и (37) приводит к неожиданному наблюдению

$$\sigma_2 = |b|\,\sigma_0, \tag{40}$$

доказательство которого в общем случае, т.е. для нерезонансного многочлена n-й степени в виде $\sigma_n = \left(\left|a_n\right| / \left|a_0\right|\right)\sigma_0$ пока получить не удаётся.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Объектом нашего исследования будет уравнение [6, с. 132]

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (1 + q\cos vt)x = 0, \tag{41}$$

где $a > 0$, $q > 0$ и v — любое. Это уравнение изучалось в связи с теорией электрических машин с параметрическим возбуждением. К уравнениям такого вида приводит ряд задач по динамической устойчивости упругих систем с учётом трения, пропорционального скорости. В этом случае неравенство Айзермана [6, с. 131, (4.60)] даёт следующее условие неограниченной устойчивости

$$a^2 > \frac{1}{2}\left(1 + q - \sqrt{1 + 2q}\right). \tag{42}$$

Применим к этой задаче разработанную нами σ-теорию. Запишем уравнение (41) в виде

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x = -q\cos vtx.$$

Мы видим, что $a = a > 0$, $b = 1 > 0$ и $l_0 = q$. Условие (42) говорит о том, что коэффициент трения a должен быть достаточно велик при заданном q. Согласно σ-таблице (формула (37)) условие абсолютной устойчивости уравнения (41) принимает вид по теореме 3 (здесь основное частотное условие имеет вид $q_\sigma \equiv \sigma_0 l_0 < 1$):

$$\begin{aligned} &q < 1, && \text{если} \quad 1 \le \frac{a^2}{2}, \\ &q\frac{1}{|a|\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}} < 1, && \text{если} \quad 1 > \frac{a^2}{2}. \end{aligned} \tag{43}$$

Во втором случае условие (43) можно привести к виду

$$a^2 > 2\left(1-\sqrt{1-q^2}\right), \text{ если } a^2 < 2. \tag{44}$$

Оно, грубо говоря, в четыре раза хуже условия (42), но оно годится и для уравнения

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (1+q\varphi(t))x = 0 \tag{45}$$

с произвольной непрерывной ограниченной функции $\varphi(t)$, для которой $|\varphi(t)| \le 1$ при всех t. (Критерий Айзермана (42) учитывает не только то, что функция $\varphi(t) \equiv \cos vt$ ограниченная, $|\varphi(t)| \le 1$, но и то, что она периодическая с нулевым средним значением).

Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. В качестве примера рассмотрим уравнение Рэлея [1, с. 180—183]

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + g(x) = E(t), \tag{46}$$

где $F(v)$ — непрерывно дифференцируемая функция и пусть $f(v) = F'(v)$; $g(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица и $E(t)$ — непрерывная ограниченная функция. Предположим, что при некотором D, $0 < D < 1$, выполнены условия

$$f(v) = 2D + \varphi(v), \quad g(x) = x + \psi(x), \tag{47}$$

причём

$$|\varphi(v)| \le c_1, \quad |\psi(x) - \psi(y)| \le c_2 |x-y|, \tag{48}$$

где c_1 и c_2 — некоторые неотрицательные постоянные. Проверим, что *если выполнено основное условие*

$$c_1 + c_2 = c < 2D(1-D^2)^{1/2}, \tag{49}$$

то уравнение (46) *имеет единственное ограниченное решение и к нему все остальные решения экспоненциально приближаются при* $t \to +\infty$, *т.е. это ограниченное решение абсолютно устойчиво.*

Запишем уравнение (46) согласно (47) в виде

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + x = -\psi(x) + \Xi(\dot{x}) + E(t), \tag{50}$$

где

$$\Xi(v) = 2Dv - F(v). \tag{51}$$

В данном случае $a = 2D > 0$, $b = 1 > 0$, т.е. характеристический многочлен линейной части уравнения (50) является гурвицевым.

Выпишем согласно σ-таблице частотные постоянные

$$\sigma_0 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 1 \le 2D^2, \\ \dfrac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}, & \text{если} \quad 1 > 2D^2. \end{cases} \tag{52}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2D}. \tag{53}$$

Найдём соответствующие липшицевы постоянные. Согласно (47), (48) и (51) имеем

$$|\psi(x) - \psi(y)| \le c_2 |x-y|, \quad l_0 \equiv c_2. \tag{54}$$

Так как

$$|\Xi'(v)| = |2D - f(v)| = |\varphi(v)| \le c_1, \text{ то } l_1 \equiv c_1. \tag{55}$$

В силу теорем 1, 2 и 3 справедливы все высказанные выше утверждения относительно уравнения (50), если выполнено основное частотное условие (20), которое в данном случае принимает вид

$$q_\sigma \equiv \sigma_0 l_0 + \sigma_1 l_1 = \sigma_0 c_2 + \sigma_1 c_1 < 1. \tag{56}$$

Проанализируем это требование. В случае большого коэффициента трения оно принимает вид

$$1 \cdot c_2 + \frac{1}{2D} c_1 < 1, \ \left(1 \le 2D^2\right). \tag{57}$$

Так как $D \ge 1/\sqrt{2} > 1/2$, то

$$\frac{c_1}{2D} + c_2 < c_1 + c_2 < 1$$

в силу (49) и основное условие (57) выполнено. Отметим, что $2D(1-D^2)^{1/2} < 1$, за исключением случая $D^2 = 1/2$, когда имеет место знак равенства.

В случае малого коэффициента трения частотное условие (56) принимает вид

$$\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} c_2 + \frac{1}{2D} c_1 < 1, \left(1 > 2D^2\right). \tag{58}$$

В силу условия (49) имеем

$$\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} c_2 + \frac{1}{2D} c_1 = \frac{1}{2D}\left(c_1 + \frac{c_2}{\sqrt{1-D^2}}\right) <$$

$$< \frac{1}{2D}\frac{1}{\sqrt{1-D^2}}\left(c_1 + c_2\right) < 1$$

и условие (58) также выполнено.

Полученное нами условие (49) несколько улучшает условие М. Зламана, которое имеет вид

$$c_1 + c_2 = c < D\left(1 - D^2\right)^{1/2}. \qquad (59)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рейссиг Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / Р. Рейссиг, Дж. Сансоне, Р. Конти. — М.: Наука, 1974. — 320 с.

2. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. — М.: Наука, 1971. — 396 с.

3. *Красносельский М. А.* Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости / М. А. Красносельский, А. В. Покровский // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233, № 3. — С. 293—296.

4. *Красносельский М. А.* Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости. В книге "Устойчивость движения, аналитическая механика, управление движением" / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М.: Наука, 1981. — С. 156—169.

5. *Красносельский М. А.* Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — М.: Наука, 1970. — 352 с.

6. *Якубович В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. — М.: Наука, 1972. — 720 с.

7. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах / Дж. Стокер. — М.: ИЛ, 1952. — 264 с.

8. *Перов А. И.* Частотные признаки существования ограниченных решений / А. И. Перов // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 7. — С. 896—904.

9. *Перов А. И.* Об ограниченных решениях обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка / А. И. Перов // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1228—1244.

10. *Баскаков А. Г.* Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений / А. Г. Баскаков // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 3. — С. 413—415.

11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М/: Наука, 1967. — 576 с.

12. *Перов А. И.* Ограниченные решения дифференциальных уравнений второго порядка / А. И. Перов // Дифференциальные уравнения. — 1967. — Т. 3, № 3. — С. 524—528.

Коструб Ирина Дмитриевна — ассистент, Воронежский государственный университет
Тел. (4732)208-649, (4732)31-92-42
E-mail: ikostrub@yandex.ru

Kostrub I.D. — assistant lecturer, Voronezh State Universiry
Tel. (4732)208-649,(4732)31-92-42
E-mail: ikostrub@yandex.ru