УДК 510.58 004.82

ИЗОМОРФИЗМ РАЗЛОЖЕНИЙ АБСТРАКТНЫХ ЗНАНИЙ

К. И. Костенко

Кубанский государственный университет

Поступила в редакцию 05.03.2011 г.

Аннотация. Рассматривается изоморфизм многообразий иерархических структурных представлений для бесконечных вычислимых множеств абстрактных знаний (разложений). Доказывается существование невычислимых изоморфных разложений. Построены примеры случаев, когда для разложений абстрактных знаний имеет место вычислимый изоморфизм.
Ключевые слова: абстрактное знание, иерархическая структура, изоморфизм, вычислимость.

Abstract. Isomorphism of varieties of hierarchical structural representations for infinite computable sets of abstract knowledge (decomposition) is considered. Existence of not computable isomorphic decomposition is proved. Examples of cases when for decomposition of abstract knowledge computable isomorphism takes place are constructed.
Keywords: abstract knowledge, hierarchical structure, isomorphism, computability.

ВВЕДЕНИЕ

Абстрактные пространства знаний представляют специальный формализм, предназначенный для всеобъемлющего математического моделирования целостных систем знаний в различных абстрактных и прикладных областях. Этот формализм составляют математические модели различных типов, близкие по идеологии к алгебраическим системам [1, 2]. Системы одного типа определяют многообразие формализаций для отдельных компонентов пространств знаний, реализующих разные уточнения таких компонентов. При этом сложные системы формируются из нескольких систем с помощью операции агрегирования. Рассматриваемые совместно, все такие системы составляют категорию пространства знаний с множествами однотипных систем в качестве объектов категории.

Теоретическая состоятельность формализма пространств знаний зависит от компактности и выразительности основных используемых в нём конструкций. Это обеспечивает возможность исследования пространств знаний с помощью понятий и методов разных областей математики. Основным типом формальных систем в составе пространств знаний являются пространства конфигураций, элементы которых интерпретируются как мгновенные представления отдельных абстрактных знаний. Конфигурациям может быть сопоставлена однородная иерархическая семантическая структура, формируемая с использованием отображений разложения и связывания [1].

В работе используются общепринятые понятия вычислимости и разрешимости на произвольных нумерованных множествах [3, 4]. Если ν — некоторая такая нумерация и $n \in \boldsymbol{N}$, где $\boldsymbol{N} = \{1,2,...\}$, то выражение νn обозначает элемент соответствующего множества, получивший номер n. Вычислимость ν означает существование алгоритма, порождающего элементы нумерованного множества в виде последовательности $\nu 0, ..., \nu i, ...$

Если для некоторого множества $\boldsymbol{A}$ задана однозначная нумерация его элементов, обозначаемая как ν, то отображение $f : \boldsymbol{A}^k \to \boldsymbol{A}$ называется вычислимым тогда и только тогда, когда является вычислимым отображение $h : \boldsymbol{N}^k \to \boldsymbol{N}$, определяемое соотношением:

$$\forall \boldsymbol{x}_1,..., \boldsymbol{x}_n \in \boldsymbol{A}\,(f(\boldsymbol{x}_1,..., \boldsymbol{x}_n) =$$
$$= \boldsymbol{y} \leftrightarrow h(\nu \boldsymbol{x}_1,...,\nu \boldsymbol{x}_n) = \nu \boldsymbol{y}).$$

1. РАЗЛОЖЕНИЯ КОНФИГУРАЦИЙ

Обозначим через **M** бесконечное перечислимое множество, элементы которого называются конфигурациями, содержащее пустую конфигурацию (обозначаемую как Λ). Потребуем, чтобы для этого множества существовала однозначная вычислимая нумерация. Элементы **M** (конфигурации) определяют неограниченное семейство абстрактных объектов, представляющих отдельные знания. Конфигурациям из $\mathbf{M}$ можно сопоставлять их структурные представления, порождаемые с помощью вычислимых операций разложения.

Определение 1. *Разложением конфигураций называется всякое всюду определенное вычислимое отображение* $\varepsilon : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \times \mathbf{M}$ *, для которого:*

1. $\varepsilon(\Lambda) = (\Lambda, \Lambda)$;
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}\ \exists\, z \in \mathbf{M}(\varepsilon(z) = (z_1, z_2))$.

С разложением конфигураций $\mathcal{E}$ связано вычислимое отображение $d_{\mathcal{E}} : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$, называемое функционалом глубины разложения конфигураций и задаваемое соотношениями:

1. $d_{\mathcal{E}}(z) = 0 \leftrightarrow z = \Lambda$;
2. $d_\varepsilon(z) = \max(d_\varepsilon(z_1),\ d_\varepsilon(z_2)) + 1$, если $\varepsilon(z) = (z_1, z_2)$ и $z \neq \Lambda$.

Определение 2. *Разложение конфигураций* ε *называется конечным, если функционал* d_ε *является всюду определённым.*

Конфигурация z называется элементарной для разложения ε , если $\varepsilon(z) = (\Lambda, \Lambda)$. В частности, пустая конфигурация является элементарной для всякого разложения.

Полное последовательное разложение конкретной конфигурации (ε -разложение), осуществляемое вплоть до элементарных конфигураций, порождает структурное представление этого объекта. Такое представление имеет вид дерева, отдельным вершинам которого соответствуют конфигурации. Конфигурация, сопоставленная произвольной вершине дерева, полностью определяет разметку ее дочерних вершин.

Если функционал d_ε является всюду определенным, то полные разложения конфигураций представляются конечными нагруженными деревьями.

Разложению конфигураций ε сопоставим систему характеристик многообразия порождаемых $\mathcal{E}$ структурных представлений.

Для каждой пары конфигураций $(z_1, z_2) \in \mathbf{M} \times \mathbf{M}$ определим множество $\mathbf{H}_\varepsilon(z_1, z_2) = \{z \mid \varepsilon(z) = (z_1, z_2)\}$. Мощность множества $\mathbf{H}_\varepsilon(z_1, z_2)$ назовём рангом пары (z_1, z_2) в разложении ε и будем обозначать как $rank_\varepsilon(z_1, z_2)$.

Определение 3. *Разложение* $\mathcal{E}$ *называется ограниченным, если множества* $\mathbf{H}_\varepsilon(z_1, z_2)$ *— конечные для любых пар конфигураций* (z_1, z_2) .

Определение 4. *Разложение* $\mathcal{E}$ *называется примитивным, если*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M}((z_1 \neq \Lambda \vee z_2 \neq \Lambda) \to |\mathbf{H}_\varepsilon(z_1, z_2)| = 1).$$

Примитивные разложения порождают простейшие способы структурного представления конфигураций, для которых важен лишь порядок их соединения. Каждое такое разложение порождает верхнюю полурешетку на $\mathbf{M}$ с операцией $\cup$, для которой

$$\forall\, z \in \mathbf{M}\,(\varepsilon(z) = (z_1, z_2) \to z_1 \cup z_2 = z).$$

Определение 5. *Если для разложения* $\mathcal{E}$ *существует максимум значений рангов произвольных пар конфигураций, то этот максимум называется рангом данного разложения. Если для разложения* ε *существует пара конфигураций, ранг которой является счетно-бесконечным, то* ε *называется разложением бесконечного ранга.*

Определение 6. *Размерностью разложения* ε *называется мощность множества элементарных конфигураций для этого разложения.*

2. ИЗОМОРФИЗМ РАЗЛОЖЕНИЙ КОНФИГУРАЦИЙ

Определение 7. *Разложения* ε_1 *и* ε_2 *называются изоморфными (вычислимо изоморфными), если существует биекция (вычислимая биекция)* $h : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ *, для которой*

$$\forall\, z \in \mathbf{M}\,(\varepsilon_1(z) = (z_1, z_2) \leftrightarrow \varepsilon_2(h(z)) = (h(z_1), h(z_2))).$$

Существование неизоморфных разложений абстрактных знаний естественно как с теоретической, так и прикладной точек зрения. В последнем случае разложения представляют разные по уровню методы структуризации знаний, различающиеся детальностью и полнотой. Следующие теоремы характеризуют возможность эффективного распознавания изоморфизма разложений конфигураций.

Теорема 1. *Конечные разложения одинаковой размерности и с одинаковыми значениями рангов всех пар конфигураций в таких разложениях являются вычислимо изоморфными.*

Доказательство. Пусть ε_1 и ε_2 два разложения, для которых выполнены условия теоремы. Обозначим $\{z_i^1 \mid i = 1, 2, \ldots\}$ и $\{z_i^2 \mid i = 1, 2, \ldots\}$ — вычислимые последовательности конфигураций, в которых без повторений перечисляются конфигурации, элементарные в ε_1 и ε_2 .

Возьмём аналогичные бесконечные вычислимые последовательности $\{z_i^3 \mid i = 1, 2, \ldots\}$ и $\{z_i^4 \mid i = 1, 2, \ldots\}$, составленные из неэлементарных конфигураций в разложениях ε_1 и ε_2.

Пусть $\boldsymbol{P}$ — выполняемая по шагам эффективная процедура, которая перечисляет элементы всех определённых выше последовательностей в порядке увеличения значения индекса i.

Определим биекцию $h\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ с помощью следующей ниже системы правил, применяемых к результатам выполнения $\boldsymbol{P}$, полученным за конечное число шагов.

1. Для шага с номером $t = 1$ образуем множества $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, состоящие из конфигураций, включенных в последовательности $\left\{ \boldsymbol{z}_i^1 \mid i = 1,2,\ldots \right\}$ и $\left\{ \boldsymbol{z}_i^2 \mid i = 1,2,\ldots \right\}$ за t шагов. Если эти множества непустые, то они являются одноэлементными ($\mathbf{M}_1 = \left\{ \boldsymbol{z}_1^1 \right\}$ и $\mathbf{M}_2 = \left\{ \boldsymbol{z}_1^2 \right\}$). В данном случае определим значение h для $\boldsymbol{z}_1^1$ соотношением

$$h(\boldsymbol{z}_1^1) = \boldsymbol{z}_1^2 .$$

2. Предположим, что значение функции h определено для результата выполнения $\boldsymbol{P}$ за первые $t = k$ шагов её выполнения.

3. Пусть $t = k + 1$. Последовательно выполним две группы действий с помощью следующих правил.

3.1. Рассмотрим множества $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ — таких элементарных в разложениях ε_1 и ε_2 конфигураций, которые включены в последовательности $\left\{ \boldsymbol{z}_i^1 \right\}$ и $\left\{ \boldsymbol{z}_i^2 \right\}$ за первые t шагов выполнения процедуры $\boldsymbol{P}$, но ещё не связаны отображением h.

Если эти множества непустые и

$$\mathbf{M}_1 = \{\boldsymbol{z}_{l,1}^1, \ldots, \boldsymbol{z}_{l,s}^1\},\ \mathbf{M}_2 = \{\boldsymbol{z}_{j,1}^2, \ldots, \boldsymbol{z}_{j,q}^2\},$$

где конфигурации перечислены в порядке возрастания номеров шагов, в которые эти конфигурации порождаются процедурой $\boldsymbol{P}$, то определим значения

$$h(\boldsymbol{z}_{l,i}^1) = \boldsymbol{z}_{j,i}^2,\ \text{где}\ i = 1,\ldots,\min(s,q).$$

3.2. Рассмотрим множества $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_4$, составленные из тех конфигураций последовательностей $\left\{ \boldsymbol{z}_i^3 \mid i = 1,2,\ldots \right\}$, и $\left\{ \boldsymbol{z}_i^4 \mid i = 1,2,\ldots \right\}$, которые включены в данные последовательности за первые t шагов работы процедуры $\boldsymbol{P}$, но ещё не связаны отображением h.

Для всякой пары конфигураций $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) \in \mathbf{M} \times \mathbf{M}$, для которой значения $h(\boldsymbol{z}_1)$ и $h(\boldsymbol{z}_2)$ уже определены, рассмотрим два множества $\mathbf{M}_5 \subseteq \mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_6 \subseteq \mathbf{M}_4$, образованные всеми такими конфигурациями $\boldsymbol{z}$, что $\varepsilon_1(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2)$, когда $\boldsymbol{z}$ — конфигурация из $\left\{ \boldsymbol{z}_i^3 \right\}$, и $\varepsilon_2(\boldsymbol{z}) = (h(\boldsymbol{z}_1), h(\boldsymbol{z}_2))$, когда $\boldsymbol{z}$ — конфигурация из $\left\{ \boldsymbol{z}_i^4 \right\}$.

Если эти множества непустые и $\mathbf{M}_5 = \{\boldsymbol{z}_{l,1}^3, \ldots, \boldsymbol{z}_{l,s}^3\}$, $\mathbf{M}_6 = \{\boldsymbol{z}_{j,1}^4, \ldots, \boldsymbol{z}_{j,q}^4\}$, где конфигурации перечислены в порядке возрастания номеров шагов, в которые они включаются процедурой $\boldsymbol{P}$ в соответствующие последовательности конфигураций, то определим значения

$$h(\boldsymbol{z}_{l,i}^3) = \boldsymbol{z}_{j,i}^4,\ \text{где}\ i = 1,\ldots,\min(s,q).$$

Определённое выше вычислимое отображение h является биективным и для него выполняется условие определения изоморфизма разложений.

Теорема доказана.

В частности, любые два конечных примитивных разложения одинаковой размерности являются вычислимо изоморфными. Вычислимо изоморфны также любые два конечных разложения одинаковой размерности, для которых ранги всех конфигураций являются бесконечными.

Назовём множество $\mathbf{M}' \subseteq \mathbf{M}$ сечением разложения конфигураций ε если:

1. полные разложения конфигураций из $\mathbf{M}'$ не содержат элементарных конфигураций;

2. $\forall\, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \mathbf{M}' (\boldsymbol{z}_1 \neq \boldsymbol{z}_2 \to \boldsymbol{z}_1$ не входит в полное разложение $\boldsymbol{z}_2)$;

3. всякая конфигурация, полное ε-разложение которой не содержит элементарных конфигураций, содержит в своём разложении конфигурацию из $\mathbf{M}'$ либо входит в разложение некоторой конфигурации из $\mathbf{M}'$.

Покажем, что установленное в теореме 1 свойство не имеет места для примитивных разложений, которые не являются конечными.

Теорема 2. *Существуют изоморфные примитивные разложения одинаковой размерности, которые не являются вычислимо изоморфными.*

Доказательство. Построим пример разложений ε_1 и ε_2, для которых справедлива теорема. Такие разложения реализуют разбиения $\mathbf{M}$ на три подмножества конфигураций: имеющих конечные разложения, не содержащих в разложениях элементарных конфигураций и остальных конфигураций. Для ε_2 все множества разбиения разрешимы. В определении ε_1 дополнительно используется бесконечное разрешимое множество конфигураций, биективно связанное с областью определения некоторой универсальной частично-рекурсивной функции $U(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x})$ [4]. Если значение $U(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x})$

определено (не определено), то разложение соответствующей конфигурации конечно (не содержит элементарных конфигураций). Тогда предположение о вычислимости изоморфизма разложений ε_1 и ε_2 влечёт разрешимость области определения $U(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})$, что неверно.

Начнём с определения более простого разложения ε_2. Для этого разобьём $\mathbf{M}$ на три бесконечных разрешимых множества $\mathbf{M}_1^1=\{\boldsymbol{z}_i^1 \mid i=1,2,...\}$, $\mathbf{M}_2^1=\{\boldsymbol{z}_i^2 \mid i=1,2,...\}$, где $\boldsymbol{z}_1^2=\Lambda$, и $\mathbf{M}_3^1=\{\boldsymbol{z}_i^3 \mid i=1,2,...\}$, для которых заданы процедуры, реализующие однозначный пересчёт этих множеств в порядке возрастания нижних индексов элементов в них.

Определим разложение ε_2 с помощью приводимой ниже процедуры, выполняемой отдельно на множествах $\mathbf{M}_1^1$ и $\mathbf{M}_2^1$, а на их основе и для $\mathbf{M}_3^1$. Определим также вспомогательное множество $\mathbf{M}_0$, которое первоначально является пустым.

Разложение ε_2 на $\mathbf{M}_1^1$ задаётся с помощью следующей системы правил.

1. На первом шаге положим $\varepsilon_2(\boldsymbol{z}_1^1)=(\boldsymbol{z}_2^1,\boldsymbol{z}_3^1)$.

2. Пусть после выполнения первых t шагов $\mathbf{M}'=\{\boldsymbol{z}_1^1,...,\boldsymbol{z}_k^1\}$ — такие конфигурации из $\mathbf{M}_1^1$, для которых уже определены значения разложения ε_2 либо эти элементы входят в состав уже определенных разложений конфигураций из $\mathbf{M}_1^1$.

Составим последовательность без повторений $\omega_1,...,\omega_r$ — всех таких пар конфигураций из $\mathbf{M}'$, которые ещё не являются значениями разложения ε_2. Для таких пар положим

$$\varepsilon_2(\boldsymbol{z}_{k+j}^1)=\omega_j, j=1,...,r\,.$$

Рассмотрим последовательность $\boldsymbol{z}^1,...,\boldsymbol{z}^p$, составленную различными конфигурациями из $\mathbf{M}'$, для которых значения разложения ε_2 ещё не определены. Для каждой такой конфигурации $\boldsymbol{z}^j, j=1,...,p$ положим $\varepsilon_2(\boldsymbol{z}^j)=(\boldsymbol{z}_{k+r+2j-1}^1,\boldsymbol{z}_{k+r+2j}^1)$.

Добавим конфигурацию $\boldsymbol{z}_{k+r+2p+1}^1$ во множество $\mathbf{M}_0$ и положим

$$\varepsilon_2(\boldsymbol{z}_{k+r+2p+1}^1)=(\boldsymbol{z}_{k+r+2p+2}^1,\boldsymbol{z}_{k+r+2p+3}^1)\,.$$

По определению ε_2 на множестве $\mathbf{M}_1^1$, всякая конфигурация этого множества не является элементарной, и все конфигурации этого множества имеют бесконечные разложения, не содержащие элементарных конфигураций. Множество конфигураций $\mathbf{M}_0$ бесконечно, и конфигурации из $\mathbf{M}_0$ не входят в состав разложений других конфигураций из этого множества. Кроме того, всякая конфигурация из $\mathbf{M}_1^1$ входит в разложение некоторой конфигурации из $\mathbf{M}_0$ либо содержит в своём разложении конфигурацию из этого множества. То есть $\mathbf{M}_0$ — сечение разложения ε_2.

Определим разложение ε_2 на $\mathbf{M}_2^1$ с помощью выполняемых по шагам действий.

1. Положим $\varepsilon_2(\boldsymbol{z}_1^2)=(\Lambda,\Lambda)$.

2. Пусть после выполнения первых t шагов множество $\mathbf{M}'=\{\boldsymbol{z}_1^2,...,\boldsymbol{z}_k^2\}$ — начало $\mathbf{M}_2^1$, для каждого элемента которого уже определено значение разложения ε_2. Определим множество $\mathbf{M}''=\mathbf{M}'\cup\{\boldsymbol{z}_{k+1}^2\}$. Выполним однозначный пересчёт всех таких пар конфигураций из $\mathbf{M}'$, которые ещё не являются значениями ε_2. Для пары $(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2)$, имеющей номер $j, j=1,...$ в таком пересчете, положим $\varepsilon_2(\boldsymbol{z}_{k+1+j}^2)=(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2)$. Положим также $\varepsilon_2(\boldsymbol{z}_{k+1}^2)=(\Lambda,\Lambda)$.

По определению ε_2 на множестве $\mathbf{M}_2^1$ разложения всех конфигурации этого множества являются конечными. Воспользуемся множеством $\mathbf{M}_3^1$ для определения конфигураций, ε_2 -разложениями которых являются все пары из множества

$$\mathbf{B}=\mathbf{M}_1^1\times\mathbf{M}_2^1\cup\mathbf{M}_2^1\times\mathbf{M}_1^1\cup\mathbf{M}_1^1\times\mathbf{M}_3^1\cup\mathbf{M}_3^1\times$$
$$\times\mathbf{M}_1^1\cup\mathbf{M}_2^1\times\mathbf{M}_3^1\cup\mathbf{M}_3^1\times\mathbf{M}_2^1\cup\mathbf{M}_3^1\times\mathbf{M}_3^1.$$

Определим ε_2 на $\mathbf{M}_3^1$ с помощью следующих правил. Пусть выполнены первые t шагов определения ε_2 на множестве $\mathbf{M}_3^1$. Рассмотрим всевозможные пары из $\mathbf{B}$, ещё не являющиеся значениями разложения ε_2, составленные из таких конфигураций множеств $\mathbf{M}_1^1$, $\mathbf{M}_2^1$, $\mathbf{M}_3^1$, которые использовались на первых t шагах определения ε_2 на этих множествах. Выполним однозначный пересчёт таких пар. Для пары $(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2)$, получившей номер j в указанном пересчёте, положим $\varepsilon_2(\boldsymbol{z}_k^3)=(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2)$, где $\boldsymbol{z}_k^3$ — первая по возрастанию нижнего индекса конфигурация из $\mathbf{M}_3^1$, для которой значение ε_2 ещё не определено.

Очевидно, что для $\boldsymbol{z}\in\mathbf{M}$ значение функционала $\mathrm{d}_{\varepsilon_2}$ определено тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{z}\in\mathbf{M}_2^1$. При этом каждая пара конфигураций, отличная от (Λ,Λ), является разложением ровно одной конфигурации, и множество элементарных конфигураций в разложении ε_2 — бесконечное.

Теперь определим разложение ε_1. Пусть $U(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})$ — универсальная одноместная частично-рекурсивная функция, $\Phi(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})$ — сигнализирующая функция для U, а $c(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})$ — однозначная вычислимая нумерация множества пар целых неотрицательных чисел [4, 5].

Разобьем множество $\mathbf{M}$ на три бесконечных разрешимых подмножества $\mathbf{M}_1^2 = \left\{ z_i^1 \mid i = 0,1,2,... \right\}$, $\mathbf{M}_2^2 = \left\{ z_i^2 \mid i = 1,2,... \right\}$, $\mathbf{M}_3^2 = \left\{ z_i^3 \mid i = 1,2,... \right\}$, где $z_1^3 = \Lambda$. Обозначим через ν однозначную вычислимую нумерацию множества $\mathbf{M}_3^2 \times \mathbf{M}_3^2$.

Определим разложение ε_1 с помощью специальной процедуры, выполняемой по шагам.

На первом шаге выполним действия.

1. Объявим все конфигурации из $\mathbf{M}_3^2$ элементарными, то есть положим

$$\forall z \in \mathbf{M}_3^2 (\varepsilon_1(z) = (\Lambda, \Lambda)).$$

2. Для конфигурации z_0^1 положим $\varepsilon_1(z_0^1) = (\Lambda, \Lambda)$, если $\Phi(c^{-1}(0)) \le 0$, и $\varepsilon_1(z_0^1) = (z_1^2, z_2^2)$ в противном случае.

Пусть выполнены k шагов процедуры определения ε_1. На шаге с номером $k+1$, выполним действия, задаваемые следующими правилами.

1. Для конфигурации z_k^1 положим $\varepsilon_2(z_k^1) = (\Lambda, \Lambda)$, если $\Phi(c^{-1}(k)) \le k$, и $\varepsilon_1(z_k^1) = (z_t^2, z_{t+1}^2)$, в противном случае, где z_t^2 — конфигурация из $\mathbf{M}_2^2$ с минимальным индексом, для которой значение ε_1 ещё не определено.

2. Составим множество конфигураций

$$\{z_i^1 \mid i \in \{0,1,...,k-1\} \,\&\, \Phi(c^{-1}(i)) \le k\}.$$

Последовательно рассмотрим все конфигурации последнего множества. Если z_j^1 — очередная такая конфигурация, то обозначим через $\mathbf{M}'(k,j)$ множество всех конфигураций, для которых значение отображения ε_1 ещё не определено, но эти конфигурации входят в состав полного разложения z_j^1, формируемого с помощью уже определённого фрагмента отображения ε_1.

Для последовательно выбираемых конфигураций $z \in \mathbf{M}'(k,j)$ положим $\varepsilon_1(z) = (z_s^3, z_l^3)$, где (z_s^3, z_l^3) — пара из $\mathbf{M}_3^2 \times \mathbf{M}_3^2$, имеющая минимальный ν-номер, которая ещё не является значением ε_1.

3. Составим множество конфигураций

$$\{z_i^1 \mid i \in \{0,1,...,k-1\} \,\&\, \Phi(c^{-1}(k)) > k\}.$$

Последовательно рассмотрим все конфигурации этого множества. Для каждой такой конфигурации z_i^1 обозначим $z \in \mathbf{M}'(k,i)$ множество конфигураций, входящих в состав полного разложения z_i^1, формируемого с помощью уже определённого фрагмента отображения ε_1, для которых значение отображения ε_1 ещё не определено. Если $z \in \mathbf{M}'(k,i)$ — такая конфигурация, то положим $\varepsilon_1(z) = (z_t^2, z_{t+1}^2)$, где z_t^2 — не использовавшаяся до сих пор в определении ε_1 конфигурация из $\mathbf{M}_2^2$ с минимальным значением нижнего индекса.

4. Перечислим все пары конфигураций, использовавшихся в построенной части определения ε_1, которые еще не являются значениями этого отображения. Для каждой такой пары (z_1, z_2) положим $\varepsilon_1(z_t^2) = (z_1, z_2)$, где z_t^2 ещё не использовавшаяся в определении ε_1 конфигурация из $\mathbf{M}_2^2$ с минимальным значением нижнего индекса.

Справедливы следующие свойства разложений конфигураций ε_1 и ε_2:

1. множества элементарных конфигураций в разложениях ε_1 и ε_2 бесконечны;

2. отображения ε_1 и ε_2 являются инъективными для неэлементарных конфигураций;

3. конфигурация z_i^1 из $\mathbf{M}_1^2$ имеет конечное разложение тогда и только тогда, когда значение $U(c^{-1}(i))$ определено;

4. для всякой пары конфигураций, одна из которых имеет конечное ε_1 (ε_2) разложение, а разложение другой конфигурации не содержит конфигураций, имеющих конечные ε_1 (ε_2) разложения, существует конфигурация из $\mathbf{M}_2^2$ ($\mathbf{M}_3^1$), ε_1 (ε_2) разложением которой является эта пара;

5. для разложения ε_1 (ε_2) существует бесконечное сечение.

Последнее свойство разложения ε_2 выполняется для множества конфигураций $\mathbf{M}_0$, а аналогичное свойство разложения ε_1 справедливо для множества конфигураций

$$\mathbf{M}_1 = \{z \in \mathbf{M}_1^2 \mid \exists i\, (z = z_i^1 \,\&\, \text{значение } U(c^{-1}(i)) \text{ не определено}\}.$$

Из свойств 1—5 следует, что для разложений ε_1 и ε_2 существует такое отображение $h: \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, что выполнено условие определения 7. Для этого достаточно взять произвольное биективное соответствие бесконечных множеств непустых элементарных конфигураций в этих разложениях, а также биекцию конфигураций множества $\mathbf{M}_0$ из определения ε_2 и множества $\mathbf{M}_1$ из определения ε_1. Если такие биекции указанных множеств выбраны, то определяющее изоморфизм разложений биективное соответствие для остальных конфигураций достраивается однозначно в соответствии с определениями ε_1 и ε_2.

Таким образом, ε_1 и ε_2 изоморфны.

Предположим, что ε_1 и ε_2 являются вычислимо изоморфными. Тогда найдётся вычислимое биективное отображение $h:\mathbf{M}\to\mathbf{M}$, для которого выполнено условие определения 7. Поэтому справедливы соотношения:

Значение $U(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})$ определено $\Leftrightarrow$ значение $d_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{z}^1_{c(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})})$ определено $\Leftrightarrow$ $h(\boldsymbol{z}^1_{c(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})})\in\mathbf{M}^1_2$.

Поскольку h — вычислимая функция, а $\mathbf{M}^1_2$ — разрешимое множество, то для универсальной частично-рекурсивной функции U оказывается разрешимой область определения, что неверно [5]. Противоречие означает, что разложения ε_1 и ε_2 не являются вычислимо изоморфными.

Теорема доказана.

Для каждого разложения существуют конфигурации, глубина которых может принимать сколь угодно большое значение. Реализуемое отображением ε представление произвольной конфигурации ровно двумя компонентами не ограничивает возможность рассмотрения разложений абстрактных знаний на большее количество частей. Это так, поскольку разложение произвольной конфигурации на заданное число частей, являющихся конфигурациями, можно моделировать с помощью нескольких последовательных разложений исходной конфигурации, а также её частей.

В разложениях допускается ситуация, когда одна конфигурация в составе разложения является пустой, а другая — нет. Данный случай может рассматриваться как существование неэлементарных конфигураций, не все структурные компоненты которых заполнены фактической информацией. Существование неизоморфных операций разложения и разнообразие типов изоморфизма разложений отражает возможность множественности (даже в пределах одной и той же предметной области) структуризации знаний. Специальный интерес представляют случаи, когда такие разложения являются конечными и когда существуют системы конфигураций, разложения которых бесконечны.

Содержательная обоснованность существования конфигураций, глубина разложений которых бесконечна, требует специального рассмотрения. Это так, поскольку применяемые в приложениях декомпозиции знаний обычно приводят к построению конечных по глубине структур, соответствующих разложению представлений отдельных знаний на фрагменты.

Знания, имеющие бесконечные разложения, возникают тогда, когда они интегрируют бесконечное множество различных примеров своего проявления (следствий) или представляют структуру знания, образованную бесконечным множеством составных частей. Примером знания первого вида является система аксиом формальной теории. Определим разложение такого знания как процесс последовательного построения следствий аксиом, получаемых с использованием некоторого механизма вывода. Если $\boldsymbol{z}$ — конфигурация, представляющая знание в форме системы аксиом, то указанное разложение можно определить соотношением $\varepsilon(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{z}_1,\ \boldsymbol{z}^1)$, где $\boldsymbol{z}_1$ — первое, доказываемое с помощью используемого механизма вывода, следствие аксиом, а $\boldsymbol{z}^1$ — исходная система аксиом, дополненная признаком количества уже построенных следствий. При этом $\boldsymbol{z}_1$ объявляется элементарной, а $\varepsilon(\boldsymbol{z}^1)=(\boldsymbol{z}_2,\boldsymbol{z}^2)$, где $\boldsymbol{z}_2$ — второе следствие аксиом, $\boldsymbol{z}^2$ — исходная система аксиом, дополненная признаком числа уже построенных следствий. Данный процесс продолжается неограниченное время, если множество следствий исходной системы аксиом не ограничено, что означает неограниченность глубины разложения исходной конфигурации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создание продуктивных формализмов пространств знаний является актуальной задачей, решение которой, преимущественно, осуществляется в рамках подхода, основанного на дескриптивных логиках. Развиваемая в работах автора, оригинальная модель абстрактного пространства знаний связана с созданием и обоснованием целостной системы алгебраических и алгоритмических инвариантов таких пространств. Исследование инвариантов приводит к появлению математических задач, решение которых обеспечивает лучшее понимание требований к формализму, необходимых для создания качественно новых технологий представления и обработки знаний и учитывающих разнообразные эмпирические представления. Одним из первичных инвариантов формализма является разложение конфигураций, начальная аксиоматика которого, как доказано, допускает существование невычислимых изоморфных разложений. Данное свойство отражает алгоритмические особенности многообразия возможных разложений и учитывается при уточнении практических требований к разложениям конфигураций в унифицированной модели абстрактного пространства знаний [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костенко К. И.* Компоненты и операции абстрактных пространств знаний // Материалы Всероссийской конференции ЗОНТ09. Новосибирск. Ин-т математики им. С.Л. Соболева, 2009. — Т. 2. — С. 36—40.

2. *Костенко К. И.* Классификация операций в пространствах знаний // XII национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием (труды конференции), г. Тверь. — М.: Физматлит, 2010. — Т. 2. — С. 155—163.

3. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. — М.: Наука, 1977. — 440с.

4. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1968. — 340 с.

5. *Блюм М.* Машинно-независимая теория сложности рекурсивных функций // В сб. Проблемы математической логики. — М.: Мир, 1970. — С. 401—422.

Костенко Константин Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, Кубанский государственный университета

Тел. 8(861)2199550

E-Mail: kostenko@kubsu.ru

Kostenko K. I. – Candidat of phys.-math. Sciences, Assistant prof., Head of Department, Kuban State University

Tel. 8(861)2199550

E-Mail: kostenko@kubsu.ru