УДК 517.988.63:532.51:532.135

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ ФОЙГТА ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ*

В. Г. Звягин, М. Ю. Кузьмин, С. В. Корнев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.06.2011 г.

Аннотация: Рассмотрена задача оптимального управления с обратной связью в модели Фойгта неньютоновской жидкости, скользящей вдоль границы. Доказано существование слабых решений, минимизирующих ограниченный полунепрерывный снизу функционал.
Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, оптимальное управление с обратной связью, условия проскальзывания.

Abstract: The external feedback control problem in the Voight model of the motion with a slip boundary condition of a viscoelastic fluid is considered. The existence of a weak solution minimizing a given bounded lower semicontinuous functional is proved.
Key words: Viscoelastic fluid, external feedback control, slip boundary conditions.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуется задача оптимального управления с обратной связью внешними силами в модели Фойгта движения вязкоупругой жидкости. Проблеме оптимального управления в задачах гидродинамики посвящено много работ (см., например, работы [1, 2] и имеющуюся в них библиографию). Однако в большинстве из них рассматривается управление для системы Навье—Стокса. При этом совсем немного работ посвящены задачам управления с обратной связью [3], еще меньше работ касается проблем управления при условии проскальзывания на границе (см., например, работу [4], посвященную управлению системой Навье—Стокса, однако в этой работе не предполагается обратная связь в управлении). Данная работа отличается тем, что в ней впервые исследована задача управления с обратной связью в модели неньютоновской жидкости при условии проскальзывания на границе.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Через $L_p(\Omega)$ в работе обозначаются стандартные пространства суммируемых функций на области $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$ будем обозначать $H^1(\Omega)$. Напомним, что для областей из $\mathbb{R}^n$, где $n = 2,3$, с достаточно хорошей границей, в силу теоремы Соболева имеем, что $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_4(\Omega)$.

Через $L_p(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ будем обозначать топологическое произведение n экземпляров соответственных пространств с обычной евклидовой нормой.

Для функций из $H^1(\Omega)^n$ справедливо следующее утверждение, которое называют неравенством Корна (см.[5]) :

Лемма 1.1. *Пусть $a(u,v)$ — билинейная симметричная непрерывная форма, определенная на пространстве $H^1(\Omega)^n \times H^1(\Omega)^n$, для которой*

$$a(v,v) \geq 0,\ \forall v \in H^1(\Omega)^n,$$

и из условий

$$v \in H^1(\Omega)^n,$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{ij}^2(v)dx = 0,\ a(v,v) = 0,$$

где $\varepsilon_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, следует, что $v = 0$. Тогда существует положительная постоянная c такая, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{ij}^2(v)dx + a(v,v) \geq c \parallel v \parallel^2_{H^1(\Omega)^n}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)^n. \tag{1.1}$$

Рассмотрим множество:

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-01-00143.

$$Z = \{v : v \in H^1(\Omega)^n, v_n\big|_{\partial\Omega} = 0\},^*$$

здесь v_n — нормальная составляющая вектор функции v. Множество Z — гильбертово пространство со скалярным произведением, определенным равенством:

$$(u,v)_Z = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}u_i v_i ds, \quad (1.2)$$

при этом норма порожденная произведением (1.2), в силу неравенства Корна, эквивалентна норме индуцированной из $H^1(\Omega)$,см. [5].

Пусть

$$\mathcal{C} = \{v : v \in C^\infty(\bar{\Omega}), v_n\big|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} v = 0\},$$

через V_Z обозначим замыкание $\mathcal{C}$ по норме пространства Z.

Через $C([0,T];X)$ и $C^1([0,T];X)$ мы будем обозначать пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, действующих из $[0,T]$ в банахово пространство X . Это нормированные пространства с нормами:

$$\| v \|_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \| v(t) \|_X,$$

$$\| v \|_{C^1([0,T];X)} = \| v \|_{C([0,T];X)} + \| v' \|_{C([0,T];X)} .$$

Наконец введем следующие обозначения:

$$C = C([0,T];V_Z),$$
$$C^1 = C^1([0,T];V_Z),$$
$$C^* = C([0,T];V_Z^*)$$

Кратко напомним те определения и свойства многозначных отображений, которые нам понадобятся в дальнейшем. Для подробного знакомства с теорией многозначных отображений можно обратиться,например к [6].

Многозначное отображение F — отображение, ставящее в соответствие каждой точке x из пространства X некоторое непустое подмножество $F(x)$ пространства Y. Совокупность всех непустых подмножеств пространства Y будем обозначать 2^Y. Семейство всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y обозначим как $Kv(Y)$.

Отображение F будем называть *полунепрерывным сверху* в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$, такого, что $F(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x , такая, что $F(U) \subset V$. Отображение F называют полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$. Многозначное отображение F называют *компактным* если, для любого ограниченного множества $U \subset X$ его образ $F(U)$ относительно компактное множество в Y . Будем называть отображение F *вполне непрерывным*, если оно компактно и полунепрерывно сверху.

Рассмотрим вполне непрерывное многозначное отображение $F : \bar{U} \to Kv(V)$, где U — некоторое непустое открытое выпуклое подмножество пространства V . Будем говорить что два вполне непрерывных многозначных отображений $F_0, F_1 : \bar{U} \to Kv(V)$ и соответствующие многозначные векторные поля $\Phi_0 = I - F_0$ и $\Phi_1 = I - F_1$ *гомотопны*

$$\Phi_0 \sim \Phi_1,$$

если существует вполне непрерывное отображение $G : [0,1] \times \bar{U} \to Kv(V)$, такое, что $G(0,\cdot) = F_0$, $G(1,\cdot) = F_1$ и

$$x \notin G(\lambda, x), \forall x \in \partial U, \forall \lambda \in [0,1].$$

Для любого вполне непрерывного многозначного $F : \bar{U} \to Kv(V)$ отображения существует вполне непрерывное однозначное отображение $\varphi : \bar{U} \to Kv(V)$, такое, что $\varphi \sim F$. Тогда для многозначного векторного поля $\Phi = I - F$ можно определить степень по следующему правилу:

$$\deg(\Phi, \bar{U}, 0) = \deg_{LS}(\varphi, \bar{U}, 0),$$

где $\deg_{LS}$ — топологическая степень (степень Лере—Шаудера) однозначного вполне непрерывного отображения. Доказательство корректности определения и различные свойства степени многозначных отображений можно найти в [6], нам потребуется следующее свойство, которое мы дадим в виде леммы:

Лемма 1.2. *Пусть $F : \bar{U} \to Kv(V)$ — вполне непрерывное многозначное отображение, такое, что $u \notin F(u), \forall u \in \partial U$, пусть $\Phi = I - F$ соответствующее ему векторное поле. Тогда если $\deg(\Phi, \bar{U}, 0) \neq 0$, то существует $v \in U$, такой, что $v \in F(v)$.*

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как известно движение однородной вязкой несжимаемой жидкости определяется системой уравнений в форме Коши:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \nabla p = \operatorname{Div}\sigma + \rho F, \quad (2.1)$$

$$t, x \in [0,T] \times \Omega,$$

* Под сужением на границу функции из H^1 (или других пространств суммируемых функций) мы подразумеваем применение оператора взятия следа $\gamma_{\delta\Omega} v$, см.[1].

$$\operatorname{div} v = 0,\ t, x \in [0, T] \times \Omega, \tag{2.2}$$

где Ω — ограниченное открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Через $\partial\Omega$ будем обозначать границу области Ω, которая здесь и далее будет предполагаться локально-липшицевой; $v(t, x) = (v_1(t, x), \ldots, v_n(t, x))$ — поле скоростей точек среды; p — давление жидкости; F — плотность внешних сил; $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ — девиатор тензора напряжения. Дивергенция div от $v(t, x)$ берется по x. Под $\operatorname{Div}\sigma$ понимаем вектор с координатами $(\operatorname{Div}\sigma)_i = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$. Далее, без ограничения общности, будем считать, что $\rho = 1$.

Система (2.1)—(2.2) дополняется соотношением между тензором σ и тензором скоростей деформации $\varepsilon_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, это соотношение называется определяющим, либо реологическим соотношением. Жидкость Фойгта описывается соотношением вида:

$$\sigma = \nu_1 \varepsilon + \nu_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t},\ \nu_1, \nu_2 > 0. \tag{2.3}$$

Подставив это значение σ в уравнение (2.1) получим, что жидкость Фойгта удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\nu_1}{2}\Delta v - \frac{\nu_2}{2}\frac{\partial \Delta v}{\partial t} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = F,\ t, x \in [0, T] \times \Omega.$$

Это уравнение вместе с условием неразрывности (2.2) называют системой уравнений Осколкова.

Мы будем рассматривать начально-краевую задачу для системы (2.1)—(2.3). Для решения $v(t, x)$ предполагается выполненым начальное условие:

$$v(0, x) = v_0(x), \tag{2.4}$$

где v_0 некоторая функция на $\overline{\Omega}$ не зависящая от времени. В качестве граничного условия будем использовать следующее условие проскальзывания (условие Навье), см. [7]:

$$v_n = 0 \ \text{на}\ \partial\Omega, \tag{2.5}$$

$$-\chi v_\tau = (T\overline{n})_\tau \ \text{на}\ \partial\Omega, \tag{2.6}$$

здесь $v_n = (v, n) \cdot n$ — нормальная составляющая вектора v; $v_\tau = v - v_n$ — касательная составляющая. $\mathrm{T} = -p\mathrm{I} + \sigma$ — тензор напряжений, $(\mathrm{T}\overline{n})_\tau$ касательная составляющая вектора $\mathrm{T}\overline{n}$. Наконец χ — положительная величина известная как коэффициент проскальзывания. В данной работе будем предполагать, что χ константа.

В работе рассматривается управление внешними силами, которое будет описываться стандартным образом — с помощью многозначного отображения. То есть решение v должно удовлетворять условию подчиненности управлению:

$$F \in \Psi(v), \tag{2.7}$$

где $\Psi(v)$ — многозначное отображение, описывающее управление в нашей задаче. Мы будем считать, что отображение Ψ удовлетворяет следующим свойствам:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на C^1 и действует в семейство всех непустых выпуклых компактных множеств C^*.

(Ψ2) Отображение Ψ вполне непрерывно.

(Ψ3) Отображение Ψ ограничено в следующем смысле:

$$\| F \|_{C_*} \leq k(v(0)),\ \forall F \in \Psi(v),\ \forall v \in C^1,$$

где k — заданная неотрицательная ограниченная функция из пространства V_z в $\mathbb{R}^1$

Зададим определение слабого решения нашей начально-краевой задачи. Это определение получается из классической постановки задачи аналогично тому, как это обычно делается в теории слабых решений краевых задач.

Определение 2.1. *Пусть* $v_0 \in V_Z$. *Слабым решением задачи* (2.1)—(2.7) *будем называть пару функций* $(v, F) \in C^1 \times C^*$, *для которой выполнено соотношение*

$$\begin{aligned}
&(v'(t), \varphi)_{L_2(\Omega)^n} + \nu_1(\varepsilon(v(t)), \varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \\
&+\nu_2(\varepsilon(v'(t)), \varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \\
&+\chi(v(t), \varphi)_{L_2(\partial\Omega)^n} + \\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\left(v_i(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}, \varphi_j\right)_{L^2(\Omega)} = \\
&= \langle F(t), \varphi\rangle,\ \forall \varphi \in V_Z,\ \forall t \in [0, T],
\end{aligned} \tag{2.8}$$

начальное условие

$$v(0) = v_0, \tag{2.9}$$

и условие подчиненности управлению (2.7).

Поясним возникновение слагаемого $+\chi(v(t), \varphi)_{L_2(\partial\Omega)^n}$:

$$\int_{\Omega}(\nabla p-\operatorname{Div}\sigma)\varphi dx=\nu_2(\varepsilon(v'(t)),\varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^n}+$$
$$+\nu_1(\varepsilon(v(t)),\varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}}-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}(-p\delta_{ij}+\sigma_{ij})n_j\varphi_i=$$
$$=\nu_2(\varepsilon(v'(t)),\varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}}+\nu_1(\varepsilon(v(t)),\varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}}-$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}(T\overline{n})_{\tau}\varphi ds=\nu_2(\varepsilon(v'(t)),\varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}}+$$
$$+\nu_1(\varepsilon(v(t)),\varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}}+\chi(v,\varphi)_{L_2(\Omega)^{n^2}}.$$

В дальнейшем будет доказана теорема о существовании слабых решений. Множество слабых решений задачи (2.1)—(2.6) будем обозначать Σ. Основным результатом данной работы является следующее утверждение:

Теорема 2.1 *Пусть отображение Ψ удовлетворяет условиям $(\Psi 1)-(\Psi 3)$, и пусть задан полунепрерывный снизу функционал $\Upsilon:\Sigma\to\mathbb{R}^1$. Тогда существует слабое решение (v^*,F^*) задачи* (2.1)—(2.6) *такое, что:*

$$\Upsilon(v^*,F^*)=\inf_{(v,F)\in\Sigma}\Upsilon(v,F). \qquad (2.10)$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ И ИХ СВОЙСТВА

Для перехода к операторной трактовке задачи рассмотрим ряд операторов, определенных на пространстве C и действующих в пространство C^*. Их действия задаются следующим образом:

$$\langle J_1(u)(t),\varphi\rangle=(u(t),\varphi)_{L_2(\Omega)^n}+$$
$$+\nu_2(\varepsilon(u(t)),\varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}},$$
$$\langle J_2(u)(t),\varphi\rangle=\nu_1(\varepsilon(u(t)),\varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}}+$$
$$+\chi(u(t),\varphi)_{L_2(\partial\Omega)^n},$$
$$\langle M(u)(t),\varphi\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\left(u_i(t)\frac{\partial u_j(t)}{\partial x_i},\varphi_j\right)_{L_2(\Omega)},$$

здесь $u=(u_1,\dots,u_n)\in C,\ \varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in V_Z$.

Напомним, что оператор $A:X\to X'$ (где X — банахово пространство, а X' — сопряженное к нему) называется сильно монотонным если:

$$\langle A(u)-A(v),u-v\rangle\geq m\parallel u-v\parallel_X^2,$$

где m — некоторая положительная константа.

Так же нам понадобится лемма из [9], которую мы для удобства приведем здесь:

Лемма 3.1. *Пусть X — банахово пространство. Оператор $A:X\to X^*$ радиально непрерывный и сильно монотонный. Тогда у него существует обратный оператор $A^{-1}\in(X^*\to X)$, который является липшиц-непрерывным.*

Перейдем к исследованию свойств введенных нами операторов.

Лемма 3.2. *Оператор $J_1:C\to C^*$ линейный, непрерывный и непрерывно обратимый.*

Доказательство. Линейность оператора J_1 очевидна из его определения. Рассмотрим вспомогательный линейный оператор, действующий из V_Z в V_Z^*:

$$\langle\hat{J}_1(u),h\rangle=(u,h)_{L_2(\Omega)^n}+\nu_2(\varepsilon(u),\varepsilon(h))_{L_2(\Omega)^{n^2}}$$

где $u,h\in V_Z$. Используя непрерывность вложения V_Z в $L_2(\Omega)$ и неравенство Коши—Буняковского получаем:

$$\parallel\hat{J}_1(u)\parallel_{V_Z^*}\leq$$
$$\leq c\left(\parallel u\parallel_{L_2(\Omega)^n}+\parallel\varepsilon(u)\parallel_{L_2(\Omega)^{n^2}}\right)\leq \qquad (3.1)$$
$$\leq c\parallel u\parallel_{V_Z},$$

здесь и далее c обозначает различные положительные константы. Далее, используя неравенство Корна, в котором в качестве $a(u,v)$ возьмем $(u,v)_{L_2(\Omega)^n}$, эквивалентность норм V_Z и $W_2^1(\Omega)$, а также линейность оператора получим:

$$\langle\hat{J}_1(u)-\hat{J}_1(v),u-v\rangle=$$
$$=\langle\hat{J}_1(u-v),u-v\rangle=$$
$$=\parallel u-v\parallel_{L_2(\Omega)^n}^2+\nu_2\parallel\varepsilon(u-v)\parallel_{L_2(\Omega)^{n^2}}^2\geq \qquad (3.2)$$
$$\geq c\parallel u-v\parallel_{V_Z}^2.$$

Отсюда следует по определению, что $\hat{J}_1$ — сильно монотонный. Так как любой линейный оператор радиально непрерывный, получаем из леммы 3.1, что оператор $\hat{J}_1$ непрерывно обратим. Отметим так же, что взяв в (3.2) $v=0$ получим:

$$\parallel\hat{J}_1(u)\parallel_{V_Z^*}\geq c\parallel u\parallel_{V_Z}. \qquad (3.3)$$

Мы можем записать действие оператора J_1 как:

$$\langle J_1(u)(t),\varphi\rangle=\langle\hat{J}_1(u(t)),\varphi\rangle.$$

Непрерывность оператора J_1 тогда следует из непрерывности оператора $\hat{J}_1$, которую мы доказали выше. Используя оценку (3.3) получим:

$$\| J_1(u) \|_{C^*} = \max_{t\in[0,T]} \| \hat{J}_1(u(t)) \|_{V_Z^*} \geq \\ \geq c \max_{t\in[0,T]} \| u \|_{V_Z} = c \| u \|_C \ . \quad (3.4)$$

Откуда следует, что $\mathrm{Ker} J_1 = \{0\}$. То есть для обратимости оператора J_1 надо показать, что уравнение

$$J_1(u) = w \quad (3.5)$$

имеет решение для любого $w \in C^*$. Обозначим $u^*(t) = \hat{J}_1^{-1}(w(t))$. Очевидно что u^* удовлетворяет уравнению (3.5). Покажем, что u^* принадлежит C. Для произвольных $t_2, t_1 \in [0,T]$ имеем:

$$\| u^*(t_2) - u^*(t_1) \|_{V_Z} = \\ = \| \hat{J}_1^{-1}(w(t_2)) - \hat{J}_1^{-1}(w(t_1)) \|_{V_Z} = \\ = \| \hat{J}_1^{-1}(w(t_2) - w(t_1)) \|_{V_Z} \leq \\ \leq c \| w(t_2) - w(t_1) \|_{V_Z^*} \ . \quad (3.6)$$

И поскольку $w \in C([0,T]; V_Z^*)$, получаем, что $u^* \in C([0,T], V_Z)$. Остается лишь отметить, что непрерывность оператора J_1^{-1} следует из оценки (3.4). $\square$

Лемма 3.3. *Оператор $J_2 : C \to C^*$ линейный и непрерывный.*

Доказательство. Билинейная форма

$$\{u, \varphi\} \in V_Z \times V_Z \mapsto \\ \mapsto \nu_1(\varepsilon(u), \varepsilon(\varphi))_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \chi(u, \varphi)_{L_2(\partial\Omega)^n}$$

задает на пространстве V_Z структуру гильбертова пространства (см. [5]), будем обозначать эту билинейную форму (скалярное произведение) $[u, \varphi]$. Норма, определяемая таким скалярным произведением эквивалентна норме, введенной нами ранее в V_Z.

Рассмотрим линейный оператор $\hat{J}_2$ действующий из V_Z в V_Z^* по формуле:

$$\langle \hat{J}_2(u), h \rangle = \nu_1(\varepsilon(u), \varepsilon(h))_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \\ + \chi(u, h)_{L_2(\partial\Omega)^n} = [u, h].$$

Пользуясь неравенством Коши—Буняковского и эквивалентностью норм в V_Z, получаем:

$$\langle \hat{J}_2(u), h \rangle = [u, h] \leq c \| u \|_{V_Z} \| h \|_{V_Z},$$

и следовательно:

$$\| \hat{J}_2(u) \|_{V_Z^*} \leq c \| u \|_{V_Z} \ . \quad (3.7)$$

Действие оператора J_2 можно записать следующим образом:

$$\langle J_2(u)(t), h \rangle = \langle \hat{J}_2(u(t)), h \rangle.$$

Тогда из (3.7) имеем:

$$\| J_2(u) \|_{C^*} = \max_{t\in[0,T]} \| \hat{J}_2(u(t)) \|_{V_Z^*} \leq \\ \leq c \max_{t\in[0,T]} \| u(t) \|_{V_Z} = c \| u \|_C,$$

получаем, что J_2 непрерывен, как оператор из C в C^*. $\square$

Замечание. Отметим, что оператор $\hat{J}_2 : V_Z \to V_Z^*$ из предыдущего доказательства сильно монотонный, действительно:

$$\langle \hat{J}_2(u) - \hat{J}_2(v), u - v \rangle = \\ = \langle \hat{J}_2(u - v), u - v \rangle = \\ = [u - v, u - v] \geq c \| u - v \|_{V_Z}^2 \ . \quad (3.8)$$

Лемма 3.4. *Оператор $\mathcal{M}$ ограниченный как оператор из C в C^* и вполне непрерывный как оператор из C^1 в C^*.*

Доказательство. В силу того, что функции из пространства V_Z соленоидальные и их нормальная составляющая на границе равна нулю, получаем:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} h_j dx = -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega w_j h_j \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx - \\ -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i w_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial\Omega} v_i^\tau n_i w_j^\tau h_j dx = \quad (3.9) \\ = -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial h_j}{\partial x_i} v_i w_j dx \ \forall v, w, h \in V_Z.$$

Используя предыдущее соотношение и неравенство Коши—Буняковского получим, что для любых $v, \omega \in C$:

$$\|\mathcal{M}(v) - \mathcal{M}(w)\|_{C^*} = \max_{t\in[0,T]} \sup_{i,j=1} \left| \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} h_j dx - \right. \\ \left. - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} h_j dx \right| = \\ = \max_{t\in[0,T]} \sup_{\|h\|_{V_Z}=1} \left| \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} h_j dx - \right. \\ \left. - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega w_i w_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} h_j dx \right| \leq \quad (3.10) \\ \leq \max_{t\in[0,T]} \sup_{i,j=1} \left| \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (v_i - w_i) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} h_j dx + \right. \\ \left. + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega w_i (v_i - w_j) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} h_j dx \right| \leq \\ = c(\|v\|_{C([0,T],L_4(\Omega)^n)} + \|w\|_{C([0,T],L_4(\Omega)^n)}) \times \\ \times \|v - w\|_{C([0,T],L_4(\Omega)^n)} \ .$$

Покажем, что оператор $\mathcal{M}$ вполне непрерывный. Непрерывность оператора следует из оценки (3.10). Пусть $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность в пространстве C^1. Вложение $V_Z \subset L_4(\Omega)^n$ — компактно, по теореме Соболева, $n = 2, 3$. Отсюда следует, что множество $\{w_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно в $L_4(\Omega)^n$ для любого $t \in (0, T)$. Функции w_n равностепенно непрерывны как функции из $C([0,T]; L_4(\Omega)^n)$, так как $\{w_n'\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено в $C([0,T]; V_Z)$ и

$$\| w_n(t_1) - w_n(t_2) \|_{L_4(\Omega)} \leq$$
$$\leq \max_{0 \leq \tau \leq \infty} \| w_n'(\tau) \|_{L_4(\Omega)} | t_2 - t_1 | \leq$$
$$\leq c_4 \| w_n' \|_{C([0,T],V_Z)} | t_2 - t_1 | .$$

Отсюда и из обощенной леммы Арцела—коли (см. [8]) следует, что множество $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно в $C([0,T]; L_4(\Omega)^n)$. Выберем подпоследовательность w_{k_j} сходящуюся в $C(0,T; L_4(\Omega)^n)$, тогда из оценки (3.10) следует, что $\mathcal{M}(w_{k_j})$ сходится в C^*, т.е. оператор $\mathcal{M}$ — компактный.

Остается заметить, что взяв в (3.10) $w = 0$ мы получим (так как $\mathcal{M}(0) = 0$) ограниченность оператора $\mathcal{M}: C \to C^*$.

4. ВВЕДЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

После определения операторов, проблему разрешимости (в слабом смысле) задачи об управлении в модели Фойгта можно трактовать, как нахождение пары $(v, F) \in C^1 \times C^*$, удовлетворяющей операторному включению:

$$J_1(v') + J_2(v) + \mathcal{M}(v) = F \in \Psi(v), \quad (4.1)$$

с начальным условием:

$$v(0) = v_0 \in V_Z. \quad (4.2)$$

Определим следующие операторы:

$$\mathcal{L}(v) = (J_1(v') + J_2(v), v(0)), \quad (4.3)$$

$$M(v) = (\mathcal{M}(v), 0), \quad (4.4)$$

$$\tilde{\Psi}(v) = (\Psi(v), v_0). \quad (4.5)$$

Все операторы будем рассматривать как действующие из C^1 в пространство $C^* \times V_Z$.

Покажем непрерывную обратимость оператора $\mathcal{L}$. Для этого воспользуемся следующей теоремой, которая является частным случаем теоремы 2.1 из [9]:

Теорема 4.1. *Пусть H — гильбертово пространство. $A: H \to H^*$ — линейный непрерывный оператор, причем существует константа $m > 0$, такая что*

$$\langle A(x-y), x-y \rangle \geq m \| x-y \|_H^2,$$
$$\forall x, y \in H.$$

Пусть $B: C([0,T], H) \to C([0,T], H^*)$ — линейный непрерывный оператор. Тогда при любых $f \in C([0,T], H^*)$ и $a \in H$ задача Коши

$$Au'(t) + (Bu)(t) = f(t) \ \forall t \in [0,T],$$
$$u(0) = a, \ u \in C^1([0,T], H),$$

имеет точно одно решение, причем соответствие $\{a, f\} \to u$ непрерывно, как отображение $H \times C([0,T]; H^*) \to C^1([0,T]; H)$.

Если взять в теореме в качестве оператора A оператор J_1, в качестве оператора B оператор J_2, а в качестве пространства H — пространство V_Z, мы получим, что оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим, как оператор из C^1 в $C^* \times V_Z$.

Рассмотрим многозначное отображение $\mathcal{G}_{v_0}: C^1 \to 2^{C^1}$, которое задается следующим образом:

$$\mathcal{G}_{v_0} = \mathcal{L}^{-1} \circ \left(\tilde{\Psi}(v) - \mathcal{M}(v) \right). \quad (4.6)$$

Так как оператор $\tilde{\Psi}$ имеет по определению непустые компактные выпуклые значения, то очевидно, что $\mathcal{G}_{v_0}$ так же действует в подмножество непустых выпуклых компактных множеств пространства C^1.Отметим так же, что в силу того, что линейные операторы $\mathcal{L}^{-1}$ и $\mathcal{M}$ соответственно непрерывный и вполне непрерывный, имеем, что оператор $\mathcal{G}_{v_0}$ так же вполне непрерывный, см.[6].

Теперь проблему о слабой разрешимости задачи (4.1)—(4.2) можем заменить на эквивалентную задачу разрешимости операторного включения

$$v \in \mathcal{G}_{v_0}(v). \quad (4.7)$$

5. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА И ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В этом разделе мы рассмотрим семейство операторных включений:

$$v \in \lambda \mathcal{G}_{v_0}(v), \text{ где } \lambda \in [0,1], \quad (5.1)$$

отображение $\mathcal{G}_{v_0}(v)$ было введено в прошлом разделе. Эти включения можно переписать в виде системы:

$$J_1(u') + J_2(u) + \lambda \mathcal{M}(u) =$$
$$= \lambda F \in \lambda \Psi(u), \text{ где } \lambda \in [0,1], u \in C^1,$$
$$u(0) = v_0.$$

Далее нами выводится априорная оценка норм решений этого семейства и на основании этой оценки, методами теории степени многозначных отображений, доказывается теорема существования слабых решений задачи (4.7).

Теорема 5.1. *Для решений семейства включений*

$$J_1(u_\lambda') + J_2(u_\lambda) + \lambda\mathcal{M}(u_\lambda) = \lambda F \in \lambda\Psi(u_\lambda), \quad (5.2)$$

$$u_\lambda(0) = \lambda\upsilon_0 \in V_Z, \quad (5.3)$$

для произвольного $\lambda \in [0,1]$*, имеет место априорная оценка:*

$$\| u_\lambda \|_{C^1} \le c, \quad (5.4)$$

где c *— константа, зависящая только от* $\upsilon_0,\nu_1,\nu_2,T,\Omega$.

Доказательство. Пусть u_λ — решение задачи (5.2)—(5.3), при некотором $\lambda \in [0,T]$. При любом $s \in [0,T]$ имеем:

$$\begin{aligned}&\langle J_1(u_\lambda')(s), u_\lambda(s)\rangle + \langle J_2(u_\lambda)(s), u_\lambda(s)\rangle + \\ &+\lambda\langle \mathcal{M}(u_\lambda)(s), u_\lambda(s)\rangle = \lambda\langle F(s), u_\lambda(s)\rangle.\end{aligned} \quad (5.5)$$

Заметим, что в силу соотношения (3.9) для любого $s \in [0,T]$, получаем:

$$\langle \mathcal{M}(u_\lambda)(s), u_\lambda(s)\rangle = 0.$$

Получаем равенство:

$$\begin{aligned}&\langle J_1(u_\lambda')(s), u_\lambda(s)\rangle + \langle J_2(u_\lambda)(s), u_\lambda(s)\rangle = \\ &= \lambda\langle F(s), u_\lambda(s)\rangle.\end{aligned} \quad (5.6)$$

Проинтегрируем равенство (5.6) от 0 до t, получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \langle J_1(u_\lambda')(s), u_\lambda(s)\rangle ds + \int_0^t \langle J_2(u_\lambda)(s), u_\lambda(s)\rangle ds = \\ &= \lambda\int_0^t \langle F(s), u_\lambda(s)\rangle ds.\end{aligned} \quad (5.7)$$

Выше мы доказали, что оператор J_2 сильно монотонный, следовательно

$$\langle J_2(u_\lambda)(s), u_\lambda(s)\rangle \ge 0.$$

Откуда получаем неравенство:

$$\int_0^t \langle J_1(u_\lambda')(s), u_\lambda(s)\rangle ds \le \lambda\int_0^t \langle F(s), u_\lambda(s)\rangle ds. \quad (5.8)$$

Рассмотрим неравенство по частям. Для любого $t \in [0,T]$ имеем:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \langle J_1(u_\lambda')(s), u_\lambda(s)\rangle ds = \int_0^t (u_\lambda'(s), u_\lambda(s))_{L_2(\Omega)^n} + \\ &+\nu_2(\varepsilon(u_\lambda'(s)), \varepsilon(u_\lambda(s))_{L_2(\Omega)^{n^2}} ds = \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{2}(u_\lambda(s), u_\lambda(s))_{L_2(\Omega)^n} + \\ &+\frac{\nu_2}{2}(\varepsilon(u_\lambda(s)), \varepsilon(u_\lambda(s))_{L_2(\Omega)^{n^2}}\Big) ds = \\ &= \frac{1}{2}\|u_\lambda(t)\|^2_{L_2(\Omega)^n} + \frac{\nu_2}{2}\|\varepsilon(u_\lambda(t))\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}} - \\ &-\frac{1}{2}\|u_\lambda(0)\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{\upsilon_2}{2}\|\varepsilon(u_\lambda(0))\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}}.\end{aligned} \quad (5.9)$$

Используя неравенство Шварца* получим, для любого $l > 0$ верно:

$$\int_0^t \langle F(s), u_\lambda(s)\rangle ds \le \int_0^t \| F(s) \|_{V_Z^*} \| u_\lambda(s) \|_{V_Z} ds \le$$

$$\le T \| u_\lambda \|_C \| F \|_{C^*} \le \frac{T^2 l}{2} \| F \|^2_{C^*} + \frac{1}{2l} \| u_\lambda \|^2_C.$$

И учитывая $(\Psi 3)$:

$$\int_0^t \langle F(s), u_\lambda(s)\rangle ds \le \frac{T^2 l k^2(\upsilon_0)}{2} + \frac{1}{2l} \| u_\lambda \|^2_C. \quad (5.10)$$

Теперь из соотношений (5.7)—(5.10) получаем:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\| u_\lambda(t) \|^2_{L_2(\Omega)^n} + \frac{\nu_2}{2}\| \varepsilon(u_\lambda(t)) \|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}} \le \\ &\le \frac{T^2 l k^2(\upsilon_0)}{2} + \frac{1}{2l}\| u_\lambda \|^2_C + \frac{\lambda^2}{2}\times \\ &\times \| \upsilon_0 \|^2_{L_2(\Omega)^n} + \frac{\nu_2\lambda^2}{2}\| \varepsilon(\upsilon_0) \|^2_{L^2(\Omega)^{n^2}} \\ &\le \frac{T^2 l k^2(\upsilon_0)}{2} + \frac{1}{2l}\| u_\lambda \|^2_C + \frac{1}{2}\times \\ &\times \| \upsilon_0 \|^2_{L_2(\Omega)^n} + \frac{\nu_2}{2}\| \varepsilon(\upsilon_0) \|^2_{L^2(\Omega)^{n^2}}.\end{aligned} \quad (5.11)$$

При этом

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\| u_\lambda(t) \|^2_{L_2(\Omega)^n} + \frac{\nu_2}{2}\| \varepsilon(u_\lambda(t)) \|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}} \ge \\ &\ge \min\Big(\frac{1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\Big)(\| u_\lambda(t) \|^2_{L_2(\Omega)^n} + \\ &+ \| \varepsilon(u_\lambda(t)) \|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}}) \ge\end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\ge c\min\Big(\frac{1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\Big)\| u_\lambda(t) \|^2_{W_2^1(\Omega)^n} \ge c \| u_\lambda(t) \|^2_{V_Z}.$$

Из соотношений (5.11)—(5.12) получаем:

$$c \| u(t) \|^2_{V_Z} \le \frac{T^2 l k^2(\upsilon_0)}{2} + \frac{1}{2l}\| u_\lambda \|^2_C +$$

$$+\frac{1}{2}\| \upsilon_0 \|^2_{L_2(\Omega)^n} + \frac{\nu_2}{2}\| \varepsilon(\upsilon_0) \|^2_{L^2(\Omega)^{n^2}}.$$

---

* Неравенство Шварца. Для любых действительных a,b и для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $ab \le \frac{1}{2}\Big(\varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}\Big)$.

Перейдя к максимуму по t в последнем неравенстве и приведя подобные члены получим:

$$\left(c-\frac{1}{2l}\right)\| u_\lambda \|_C^2 \le \frac{T^2 lk^2(v_0)}{2} + \\ +\frac{1}{2}\| v_0 \|^2_{L_2(\Omega)^n} + \frac{\nu_2}{2}\| \varepsilon(v_0) \|^2_{L^2(\Omega)^{n^2}} . \quad (5.13)$$

Отметим, что число $l>0$ выбирается произвольно. Поэтому выбирая l достаточно большим, из приведенного неравенства получим необходимую оценку на $\| v_\lambda \|_C$.

Заметим далее, что из соотношения (5.2) и обратимости оператора J_1 имеем:

$$u'_\lambda = \lambda J_1^{-1}F - J_1^{-1}J_2(u_\lambda) - \lambda J_1^{-1}\mathcal{M}(u_\lambda).$$

Откуда следует оценка:

$$\| u'_\lambda \|_C \le \| \lambda J_1^{-1}F \|_C + \\ + \| J_1^{-1}J_2(u_\lambda) \|_C + \| \lambda J_1^{-1}\mathcal{M}(u_\lambda) \|_C .$$

Оценка на норму $\| u'_\lambda \|_C$ следует из ограниченности операторов $J_1^{-1}, J_2, \mathcal{M}$, из условия ($\Psi 3$) и полученной выше оценки на $\| u_\lambda \|_C$. Таким образом из полученных оценок на $\| u \|_C$ и $\| u' \|_C$ очевидным образом следует необходимая оценка на $\| u_\lambda \|_{C^1}$. □

Теорема 5.2. *Для любого* $v_0 \in V_Z$ *существует функция* $v \in C^1$, *удовлетворяющая соотношению* (4.7).

Доказательство. Рассмотрим семейство многозначных отображений $\lambda\mathcal{G}_{v_0}(v)$, $\lambda \in [0,1]$, и соответствующие ему векторные поля $I-\lambda\mathcal{G}_{v_0}$. Из априорной оценки (5.4) следует, что в пространстве C^1 существует замкнутый шар $\bar{B}_R$ с центром в нуле радиуса $R>0$, такой что

$$v \notin \lambda\mathcal{G}_{v_0}, \forall (v,\lambda) \in \partial B_R \times [0,1].$$

Отсюда следует, что $I \sim I-\mathcal{G}_{v_0}$ как отображения из $\bar{B}_R \subset C^1$ в C^1 и, следовательно, тождественное векторное поле I является однозначной гомотопической апроксимацией поля $I-\mathcal{G}_{v_0}$. По определению имеем

$$\deg(I-\mathcal{G}_{v_0}, \bar{B}_R, 0) = \deg_{LS}(I, \bar{B}_R, 0) = 1.$$

Следовательно, согласно лемме 1.2 , в шаре $\bar{B}_R$ существует решение включения (4.7), что и требовалось доказать. □

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.1. Для пары $(v,F)\in\Sigma$ имеем $F = J_1(v') + J_2(v) + \mathcal{M}(v)$. Поэтому задачу минимизации функционала $\Upsilon(v,F):\Sigma\to\mathbb{R}^1$ можно заменить задачей минимизации функционала $\tilde{\Upsilon}(v) = \Upsilon(v,F(v)):\tilde{\Sigma}\to\mathbb{R}^1$, где $\tilde{\Sigma}$ — множество решений включения (4.7). Отметим, что $\tilde{\Upsilon}$ полунепрерывно снизу. Для решения задачи минимизации достаточно применить следующее обобщение теоремы Вейерштрасса (см. [10]):

Теорема. *Функционал* $f(x)$ *полунепрерывный снизу и определенный на компактном множестве, ограничен снизу на этом множестве и достигает на ней своей точной нижней границы.*

Остается лишь показать, что множество решений $\tilde{\Sigma}$ компактно. Так как для любого $v\in\tilde{\Sigma}$ по определению имеем $v\in\mathcal{G}_{v_0}(v)$, следовательно:

$$\tilde{\Sigma} \subset \mathcal{G}_{v_0}\left(\tilde{\Sigma}\right). \quad (5.14)$$

В силу априорной оценки (5.4) получаем, что множество $\tilde{\Sigma}$ ограничено в C^1. Отображение $\mathcal{G}_{v_0}$ компактно, отсюда множество $\mathcal{G}_{v_0}\left(\tilde{\Sigma}\right)$ относительно компактно, как образ ограниченного множества. Тогда и $\tilde{\Sigma}$ относительно компактно, как подмножество относительно компактного множества. Покажем замкнутость $\tilde{\Sigma}$. Отметим, что из того, что отображение $\mathcal{G}_{v_0}$ полунепрерывно сверху и действует в семейство непустых замкнутых подмножеств следует, что оно замкнуто ([6]). Пусть $u_n \to u$, $u_n\in\tilde{\Sigma}$, тогда $u_n\in\mathcal{G}_{v_0}(u_n)$, но отображение $\mathcal{G}_{v_0}$ замкнуто и, следовательно, $u\in\mathcal{G}_{v_0}(u)$, т.е. $u\in\tilde{\Sigma}$. То есть множество $\tilde{\Sigma}$ компактно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. — Новосибирск.: Научная книга. 1999.

2. *Litvinov W. G.* Optimization in Elliptic Problems with Application to Mechanics of Deformable Body and Fluid Mechanics / W. G. Litvinov. Operator Theory: Advances and Application, 199. — 2000.

3. *Obukhovskii V. V.* Optimal feedback control in the problem of the motion of a viscoelastic fluid / V. V. Obukhovskii, P. Zecca, V. G. Zvyagin // Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2004. — 23. p. 323—337.

4. *Imanuilov O. Yu.* Local exact controllability for the 2-D Navie-Stokes equation with the Navier slip boundary condition / O. Yu. Imanuilov // Turbulence modeling and vortex dynamics (Istambul). — 1996. Lecture Notes in Physics. — 1997. — 491. S pringer. Berlib. — p. 148—168.

5. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости / В. Г. Литвинов. — М: Наука, 1982.

6. *Борисович Ю. Г.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных вклю-

чений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 224 с.

7. *Раджагопал К. Р.* О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей. УМН, т. 58, вып. 2(350), 2003.

8. *Simon J.* Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. ser. IV, 1987. — V.CXLVI. — p. 65—96.

9. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнений / Х. Гаевский, К. Грегер, К.-М. Захариас,1978.

10. *Люстерник Л. А.* Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М. ГИТТЛ, 1951 — 360 с.

Звягин Виктор Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет
Тел. 220-86-57
E-mail: zvg@main.vsu.ru

Кузьмин Михаил Юрьевич — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Воронежский государственный университет
Тел. 220-86-57
E-mail: miha030880@mail.ru

Корнев Сергей Валерьевич — студент, Воронежский государственный университет
Тел. 279-09-68
E-mail: svkornev89@gmail.ru

Zvyagin Victor Grigorievich — Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Voronezh State University
Tel. 220-86-57
E-mail: zvg@main.vsu.ru

Kuzmin Mikhail Yurievich — research assistant, Voronezh State University
Tel. 220-86-57
E-mail: miha030880@mail.ru

Kornev Sergey Valerievich — student of Voronezh State University
Tel. 279-09-68
E-mail: svkornev89@gmail.ru