**УДК 514.75/.77**

# БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ MG-ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ СТАЦИОНАРНОСТИ ЧЕТВЕРТОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ВДОЛЬ КРАЯ

**Д. А. Жуков**

*Таганрогский государственный педагогический институт*

Поступила в редакцию 16.05.2011 г.

**Аннотация.** В данной работе изучается поведение поверхности положительной гауссовой кривизны с краем, подвергнутой бесконечно малой MG-деформации. При этой деформации поточечно сохраняется грассманов образ поверхности, а вариация гауссовой кривизны задается как функция $\sigma$ на поверхности. На край поверхности наложено дополнительное условие $\delta IV = 0$, означающее стационарность четвертой квадратичной формы вдоль края. Изучение сводится к исследованию разрешимости краевой задачи Римана-Гильберта для обобщенных аналитических функций.
**Ключевые слова:** бесконечно малые MG-деформации, поверхность, край, обобщенные аналитические функции.

**Abstract.** In this work we investigate the response of a surface of positive Gaussian curvature provided by infinitesimal MG-deformation. This deformation keeps Grassman image of a surface, and gives variation of Gaussian curvature as a function $\sigma$ on the surface. There is an additional condition at the boundary $\delta IV = 0$, which means stationarity of fourth quadratic form on the boundary. Investigation is reduced to research of resolvability Riemann-Gilbert boundary task for generalized analytical functions.
**Key words:** infinitesimal MG-deformation, surface, boundary, generalized analytical function.

## ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются бесконечно малые деформации при условии $\delta K = \sigma, \delta\vec{n} = 0$, т. е. такие бесконечно малые деформации, при которых приращение гауссовой кривизны задается как известная функция $\sigma$ на поверхности и сохраняется поточечно грассманов образ деформируемой поверхности (MG-деформации). В качестве деформируемой поверхности выбрана односвязная поверхность $S$: $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \in D_{3,p}, p > 2$, $(u,v) \in \Omega$, $\Omega$ – плоская область, гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, с краем, в трехмерном евклидовом пространстве $E^3$. Вдоль края поверхности четвертая квадратичная форма стационарна при деформации.

В начале работы вводится понятие бесконечно малой MG-деформации, затем выводится ее комплексное уравнение для поверхностей положительной гауссовой кривизны. Далее, краевое условие записывается в комплексном виде. И, наконец, разрешимость полученной краевой задачи исследуется методом книги [1], отсюда следует основной результат работы.

**Теорема.** Пусть односвязная поверхность класса $D_{3,p}, p > 2$, гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, с краем, подвергнута бесконечно малым MG-деформациям. Пусть, при этом, вдоль края поверхности четвертая квадратичная форма поверхности стационарна. Тогда:

а) бесконечно малая MG-деформация является тривиальной тогда и только тогда, когда $\sigma \equiv 0$;

б) если $\sigma \not\equiv 0$, то бесконечно малая MG-деформация существует и единственна тогда и только тогда, когда $\sigma$ удовлетворяет трем условиям

$$\int_\Gamma \gamma(t) w_j'(t) \lambda(t) dt = 0, \quad (j = 1,2,3),$$

где $w_1', w_2', w_3'$ — полная система решений сопряженной однородной задачи $\mathring{A}'$.

## 1. ПОНЯТИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ MG-ДЕФОРМАЦИИ

Пусть $S$: $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ — поверхность в $E^3$, $(u,v) \in \Omega$, $\Omega$ — плоская область.

**Определение 1.** Непрерывной по параметру $t$ деформацией $S_t$ поверхности $S$ называется непрерывное отображение любого промежутка, содержащего нуль, например [0, 1], в банахово пространство $C^n(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, вектор-функций (определенных в $\Omega$ и обладающих в $\Omega$ непрерывными частными производными до порядка $n$) такое, что $S_0 \equiv S$, а $S_t$ для любого $t$ из рассматриваемого промежутка есть регулярная поверхность класса $C^n(\Omega)$.

**Определение 2.** Если вектор-функция $\vec{r}_t(u,v)$, задающая поверхность $S_t$, обладает частными производными порядка $k$:

$$\frac{\partial^l \vec{r}_t}{\partial t^l}, l = 1, 2, ..., k,$$

каждая из которых есть непрерывное отображение рассматриваемого числового промежутка в $C^n(\Omega)$, то непрерывная деформация $S_t$ называется деформацией класса $C^k$ по параметру.

**Определение 3.** Функция

$$\delta^l \vec{r}(u,v) = \frac{1}{2l!} \frac{d^l \vec{r}_t}{dt^l}\bigg|_{t=0}, l = 1, 2, \ldots, k,$$

называется $l$-й вариацией (по Рембсу) радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ поверхности $S$ при деформации $S_t$.

Разложим радиус-вектор поверхности $S_t$ по степеням $t$.

$$S_t : \vec{r}_t = \vec{r} + 2(t\delta\vec{r} + t^2\delta^2\vec{r} + \ldots + \\ + t^k\delta^k\vec{r}) + o(t^k),\ t \in [0,1], \tag{1.1}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор исходной поверхности.

**Определение 4.** Деформация класса $C^k$ по параметру, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, называется бесконечно малой деформацией первого порядка (бесконечно малой деформацией), если изучается с точностью до бесконечно малых второго порядка. В этом случае разложение (1.1) принимает вид:

$$S_t : \vec{r}_t = \vec{r} + 2t\delta\vec{r} + o(t^2),\ t \in [0,1],$$

где $\vec{y} = \delta\vec{r}$ — поле смещений деформации.

Так как бесконечно малая деформация вполне определяется своим полем смещений, то задача нахождения бесконечно малых деформаций, состоит в отыскании векторного поля $\vec{y}$.

Предложенный в данной работе подход к определению бесконечно малой деформации и связанных с ней понятий основан на работах [3] Н. В. Ефимова и [4] С. Б. Климентова.

Введем теперь понятие бесконечно малой MG-деформации.

**Определение 5.** Бесконечно малую деформацию, при которой выполнены условия

$$\delta K = \sigma, \quad \delta\vec{n} = 0,$$

где $K$ — гауссова кривизна исходной поверхности $S$, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности $S$, $\sigma$ — заданная функция на поверхности $S$, будем называть **бесконечно малой MG-деформацией**.

Если вектор смещений имеет вид только $\vec{y} = \overrightarrow{const}$, то такую бесконечно малую MG-деформацию будем называть **тривиальной**.

**Замечание.** Бесконечно малые деформации при условии $\delta\vec{n} = 0$ носят название G-деформаций, см. [7], а условие $\delta K = \sigma$ напоминает об известной проблеме Минковского см. [6], отсюда и название.

## 2. УРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ MG-ДЕФОРМАЦИИ

Пусть $S: \quad \vec{r} = \vec{r}(u,v) \in D_{3,p}, p > 2$ — поверхность в $E^3$ гауссовой кривизны $K \ge k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, $(u,v) \in \Omega$, $\Omega$ — плоская односвязная область. Будем предполагать, что $\vec{y} = \vec{y}(u,v) \in D_{2,p}, p > 2$, функция $\sigma \in D_{1,p},\ p > 2$.

Рассмотрим условие $\delta\vec{n} = 0$. Имеем

$$\delta\vec{n} = \delta\left(\frac{[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]}{|\,[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]\,|}\right) =$$

$$= \frac{\delta[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot |\,[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]\,| - [\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot \delta\left(|\,[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]\,|\right)}{|\,[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]\,|^2} = 0,$$

где $\partial_1\vec{r} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}$, $\partial_2\vec{r} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}$. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда числитель равен нулю:

$$\delta[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot |\,[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]\,| - \\ - [\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot \delta\left(|\,[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]\,|\right) = 0. \tag{2.1}$$

Учитывая, что

$$\delta\left(|\,[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]\,|\right) = \delta\sqrt{[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left([\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \delta([\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]^2) = \frac{1}{2\sqrt{[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]^2}} \times$$

$$\times 2[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot ([\delta(\partial_1\vec{r}), \partial_2\vec{r}] + [\partial_1\vec{r}, \delta(\partial_2\vec{r})]) =$$

$$= \frac{1}{|\,[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]\,|}([\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}], [\partial_1\vec{y}, \partial_2\vec{r}] + [\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{y}]),$$

запишем (2.1) в виде:

$$\frac{([\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r}]+[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y}])\cdot|[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]|^2-[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]\cdot([\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}],[\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r}]+[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y}])}{|[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]|}=0,$$

это равенство справедливо тогда и только тогда, когда

$$([\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r}]+[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y}])\cdot P_1-[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]\cdot P_2=0\,,\tag{2.2}$$

где $P_1=|[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]|^2$ и $P_2=([\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}],[\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r}]+$ $+[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y}])$ — скалярные величины. Умножив равенство (2.2) скалярно на $\partial_1\vec{r}$, получим $(\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r},\partial_1\vec{r})=0$, а умножив (2.2) скалярно на $\partial_2\vec{r}$, получим $(\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y},\partial_2\vec{r})=0$, следовательно, векторы $\partial_1\vec{r}$, $\partial_2\vec{r}$, $\partial_1\vec{y}$, $\partial_2\vec{y}$ компланарны, значит $\partial_1\vec{y}$, $\partial_2\vec{y}$ можно разложить по векторам $\partial_1\vec{r}$, $\partial_2\vec{r}$:

$$\partial_j\vec{y}=\alpha_j^k\partial_k\vec{r},\ j=1,2\,,\tag{2.3}$$

где $\alpha_j^k$ — некоторые скалярные функции от $u,v$.

Продифференцируем первое уравнение системы (2.3) по $v$, а второе по $u$. Имеем

$$\begin{cases}\partial_{12}\vec{y}=\partial_2\alpha_1^1\partial_1\vec{r}+\alpha_1^1\partial_{12}\vec{r}+\partial_2\alpha_1^2\partial_2\vec{r}+\alpha_1^2\partial_{22}\vec{r},\\ \partial_{21}\vec{y}=\partial_1\alpha_2^1\partial_1\vec{r}+\alpha_2^1\partial_{11}\vec{r}+\partial_1\alpha_2^2\partial_2\vec{r}+\alpha_2^2\partial_{21}\vec{r}.\end{cases}\tag{2.4}$$

Используя деривационные формулы Гаусса $\partial_{jk}\vec{r}=\Gamma_{jk}^l\partial_l\vec{r}+b_{jk}\vec{n};\ \ j,k=1,2$, из (2.4) получаем

$$\begin{cases}\partial_{12}\vec{y}=\partial_2\alpha_1^1\partial_1\vec{r}+\alpha_1^1(\Gamma_{12}^1\partial_1\vec{r}+\Gamma_{12}^2\partial_2\vec{r}+b_{12}\vec{n})+\\ \qquad+\partial_2\alpha_1^2\partial_2\vec{r}+\alpha_1^2(\Gamma_{22}^1\partial_1\vec{r}+\Gamma_{22}^2\partial_2\vec{r}+b_{22}\vec{n}),\\ \partial_{21}\vec{y}=\partial_1\alpha_2^1\partial_1\vec{r}+\alpha_2^1(\Gamma_{11}^1\partial_1\vec{r}+\Gamma_{11}^2\partial_2\vec{r}+b_{11}\vec{n})+\\ \qquad+\partial_1\alpha_2^2\partial_2\vec{r}+\alpha_2^2(\Gamma_{21}^1\partial_1\vec{r}+\Gamma_{21}^2\partial_2\vec{r}+b_{21}\vec{n}),\end{cases}$$

где $b_{jk}$, $j,k=1,2$, — коэффициенты второй квадратичной формы исходной поверхности. Так как $\partial_{12}\vec{y}=\partial_{21}\vec{y}$, то, приравняв коэффициенты полученных соотношений при $\partial_1\vec{r}$, $\partial_2\vec{r}$, $\vec{n}$, получим следующую систему уравнений относительно $\alpha_j^k$:

$$\begin{cases}\partial_2\alpha_1^1+\alpha_1^1\Gamma_{12}^1+\alpha_1^2\Gamma_{22}^1=\partial_1\alpha_2^1+\alpha_2^1\Gamma_{11}^1+\alpha_2^2\Gamma_{21}^1,\\ \partial_2\alpha_1^2+\alpha_1^1\Gamma_{12}^2+\alpha_1^2\Gamma_{22}^2=\partial_1\alpha_2^2+\alpha_2^1\Gamma_{11}^2+\alpha_2^2\Gamma_{21}^2,\\ \alpha_1^1b_{12}+\alpha_1^2b_{22}=\alpha_2^1b_{11}+\alpha_2^2b_{21}.\end{cases}\tag{2.5}$$

Так как гауссова кривизна исходной поверхности $S$: $K\ge k_0>0$, $k_0=\mathrm{const}$, то, вводя на $S$ сопряженно изометрическую систему координат, в которой $b_{11}=b_{22}\ne0$, $b_{12}=0$, получим $\alpha_1^2=\alpha_2^1$. Тогда система (2.5) преобразуется в систему

$$\begin{cases}\partial_2\alpha_1^1-\partial_1\alpha_1^2=(\alpha_2^2-\alpha_1^1)\Gamma_{21}^1+\alpha_1^2(\Gamma_{11}^1-\Gamma_{22}^1),\\ \partial_2\alpha_1^2-\partial_1\alpha_2^2=(\alpha_2^2-\alpha_1^1)\Gamma_{12}^2+\alpha_1^2(\Gamma_{11}^2-\Gamma_{22}^2).\end{cases}\tag{2.6}$$

Следуя В. Т. Фоменко [6, с. 87], введем обозначения: $U=\dfrac{1}{2}(\alpha_2^2-\alpha_1^1)$, $V=\alpha_1^2$, $\Pi=\dfrac{1}{2}(\alpha_2^2+\alpha_1^1)$. Тогда $\alpha_1^1=\Pi-U$, $\alpha_2^2=\Pi+U$. Уравнения (2.6) принимают вид:

$$\begin{cases}\partial_1U-\partial_2V+2\Gamma_{12}^2U+(\Gamma_{11}^2-\Gamma_{22}^2)V=-\partial_1\Pi,\\ \partial_2U+\partial_1V+2\Gamma_{21}^1U+(\Gamma_{11}^1-\Gamma_{22}^1)V=\partial_2\Pi.\end{cases}\tag{2.7}$$

Таким образом, из условия $\delta\vec{n}=0$ следует справедливость системы (2.7).

Рассмотрим условие $\delta K=\sigma$.

Пусть $g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2$, $b=b_{11}b_{22}-b_{12}^2$ — дискриминанты первой и второй квадратичных форм исходной поверхности соответственно, тогда $K=\dfrac{b}{g}$ и

$$\delta\left(\frac{b}{g}\right)=\sigma\,,\ \frac{\delta b\cdot g-b\cdot\delta g}{g^2}=\sigma\,,$$

отсюда следует равенство

$$\delta b-K\cdot\delta g=g\sigma\,.\tag{2.8}$$

Проварьируем $g$ и $b$:

$$\begin{aligned}\delta g&=\delta g_{11}\cdot g_{22}+g_{11}\cdot\delta g_{22}-2g_{12}\cdot\delta g_{12},\\ \delta b&=\delta b_{11}\cdot b_{22}+b_{11}\cdot\delta b_{22}-2b_{12}\cdot\delta b_{12}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Вычислим вариации $\delta g_{jk}$ и $\delta b_{jk}$, $j,k=1,2$, выражая их через $\alpha_1^1$, $\alpha_1^2$, $\alpha_2^2$ и коэффициенты первой и второй квадратичных форм исходной поверхности и учитывая, что $\delta\vec{r}=\vec{y}$, $\delta\vec{n}=0$. Имеем:

$$\delta g_{11}=\delta(\partial_1\vec{r},\partial_1\vec{r})=(\delta(\partial_1\vec{r}),\partial_1\vec{r})+(\partial_1\vec{r},\delta(\partial_1\vec{r}))=$$
$$=2(\partial_1\vec{y},\partial_1\vec{r})=2(\alpha_1^1\partial_1\vec{r}+\alpha_1^2\partial_2\vec{r},\partial_1\vec{r})=$$
$$=2\alpha_1^1g_{11}+2\alpha_1^2g_{21},$$
$$\delta g_{12}=\delta(\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r})=(\delta(\partial_1\vec{r}),\partial_2\vec{r})+(\partial_1\vec{r},\delta(\partial_2\vec{r}))=$$
$$=(\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r})+(\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y})=$$
$$=(\alpha_1^1\partial_1\vec{r}+\alpha_1^2\partial_2\vec{r},\partial_2\vec{r})+(\partial_1\vec{r},\alpha_1^2\partial_1\vec{r}+\alpha_2^2\partial_2\vec{r})=$$
$$=\alpha_1^1g_{12}+\alpha_1^2g_{22}+\alpha_1^2g_{11}+\alpha_2^2g_{21},$$
$$\delta g_{22}=\delta(\partial_2\vec{r},\partial_2\vec{r})=$$
$$=(\delta(\partial_2\vec{r}),\partial_2\vec{r})+(\partial_2\vec{r},\delta(\partial_2\vec{r}))=2(\partial_2\vec{y},\partial_2\vec{r})=$$
$$=2(\alpha_1^2\partial_1\vec{r}+\alpha_2^2\partial_2\vec{r},\partial_2\vec{r})=2\alpha_1^2g_{12}+2\alpha_2^2g_{22}.$$

Таким образом, $\delta g_{jk}$ выражаются следующими формулами:

$$\delta g_{11} = 2\alpha_1^1 g_{11} + 2\alpha_1^2 g_{21},$$
$$\delta g_{12} = \alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22} + \alpha_1^2 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21}, \quad (2.10)$$
$$\delta g_{22} = 2\alpha_1^2 g_{12} + 2\alpha_2^2 g_{22}.$$

Продифференцируем первое из уравнений (2.3) по $u$, а второе по $v$:

$$\begin{cases}\partial_{11}\vec{y} = \partial_1\alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^1\partial_{11}\vec{r} + \partial_2\alpha_1^2\partial_2\vec{r} + \alpha_1^2\partial_{21}\vec{r},\\ \partial_{22}\vec{y} = \partial_2\alpha_2^1\partial_1\vec{r} + \alpha_2^1\partial_{12}\vec{r} + \partial_2\alpha_2^2\partial_2\vec{r} + \alpha_2^2\partial_{22}\vec{r}.\end{cases}$$

Используя полученные равенства, а также первое равенство системы (2.4), находим:

$$\delta b_{11} = (\delta(\partial_{11}\vec{r}), \vec{n}) + (\partial_{11}\vec{r}, \delta\vec{n}) =$$
$$= (\partial_{11}\vec{y}, \vec{n}) = \alpha_1^1(\partial_{11}\vec{r}, \vec{n}) + \alpha_1^2(\partial_{21}\vec{r}, \vec{n}) =$$
$$= \alpha_1^1 b_{11} + \alpha_1^2 b_{12},$$
$$\delta b_{12} = (\delta(\partial_{12}\vec{r}), \vec{n}) + (\partial_{12}\vec{r}, \delta\vec{n}) = (\partial_{12}\vec{y}, \vec{n}) =$$
$$= \alpha_1^1(\partial_{12}\vec{r}, \vec{n}) + \alpha_1^2(\partial_{22}\vec{r}, \vec{n}) = \alpha_1^1 b_{12} + \alpha_1^2 b_{22},$$
$$\delta b_{22} = (\delta(\partial_{22}\vec{r}), \vec{n}) + (\partial_{22}\vec{r}, \delta\vec{n}) = (\partial_{22}\vec{y}, \vec{n}) =$$
$$= \alpha_1^2(\partial_{12}\vec{r}, \vec{n}) + \alpha_2^2(\partial_{22}\vec{r}, \vec{n}) = \alpha_1^2 b_{12} + \alpha_2^2 b_{22},$$

Так как $b_{11} = b_{22} \neq 0$, $b_{12} = 0$, то $\delta b_{11} = \alpha_1^1 b_{11}$, $\delta b_{12} = \alpha_1^2 b_{11}$, $\delta b_{22} = \alpha_2^2 b_{11}$.

Подставляя найденные вариации в (2.9), получаем

$$\delta g = 2g_{22}(\alpha_1^1 g_{11} + \alpha_1^2 g_{21}) + 2g_{11}(\alpha_1^2 g_{12} + \alpha_2^2 g_{22}) -$$
$$-2g_{12}(\alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22} + \alpha_1^2 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21}),$$
$$\delta b = \alpha_1^1 b_{11}\cdot b_{22} + b_{11}\cdot\alpha_2^2 b_{11} - 2b_{12}\cdot\alpha_1^2 b_{11} =$$
$$= b_{11}b_{11}(\alpha_1^1 + \alpha_2^2).$$

Подставляя эти выражения в (2.8), находим:

$$b_{11}b_{11}(\alpha_1^1 + \alpha_2^2) - 2Kg_{22}(\alpha_1^1 g_{11} + \alpha_1^2 g_{21}) -$$
$$-2Kg_{11}(\alpha_1^2 g_{12} + \alpha_2^2 g_{22}) +$$
$$+2Kg_{12}(\alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22} + \alpha_1^2 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21}) = g\sigma.$$

Перегруппировав полученное выражение, приводим его к виду:

$$(\alpha_1^1 + \alpha_2^2)(b_{11}b_{11} - 2Kg) = g\sigma.$$

Отсюда имеем

$$\alpha_1^1 + \alpha_2^2 = -\frac{\sigma}{K}. \quad (2.11)$$

Сделаем замену $\Pi = \frac{1}{2}(\alpha_2^2 + \alpha_1^1)$, уравнение (2.11) принимает вид:

$$\Pi = -\frac{\sigma}{2K}. \quad (2.12)$$

Таким образом, бесконечно малые MG-деформации поверхности гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$ описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases}\partial_1 U - \partial_2 V + 2\Gamma_{12}^2 U + (\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2)V = -\partial_1\Pi,\\ \partial_2 U + \partial_1 V + 2\Gamma_{21}^1 U + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1)V = \partial_2\Pi,\\ \Pi = -\dfrac{\sigma}{2K}.\end{cases} \quad (2.13)$$

Функция $\Pi$ явно выражена третьим равенством системы (2.13), через $K$ и $\sigma$ — известные и заранее заданные функции, поэтому вместо функции $\Pi$ мы подставим в первые два уравнения системы (2.13) ее значение $-\frac{\sigma}{2K}$. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными $U$ и $V$.

$$\begin{cases}\partial_1 U - \partial_2 V + 2\Gamma_{12}^2 U + (\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2)V = \partial_1\left(\dfrac{\sigma}{2K}\right),\\ \partial_2 U + \partial_1 V + 2\Gamma_{21}^1 U + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1)V = -\partial_2\left(\dfrac{\sigma}{2K}\right).\end{cases}$$

Следуя И. Н. Векуа [1, с. 111], вводим в рассмотрение функцию $w(z) = U + iV$, где $z = u + iv$, $i^2 = -1$, $(u,v) \in \Omega$ и записываем полученную систему уравнений в виде одного уравнения

$$\partial_{\bar z} w + A_1 w + B_1\bar{w} = \frac{1}{2}\partial_z\left(\frac{\sigma}{K}\right), \quad (2.14)$$

где $A_1 = \frac{1}{4}(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2) - \frac{i}{4}(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{21}^1)$,

$$B_1 = \frac{1}{4}(\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2) + \frac{i}{4}(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1),$$
$$\partial_{\bar z} w = \frac{1}{2}(\partial_1 w + i\partial_2 w),$$
$$\partial_z\left(\frac{\sigma}{K}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_1\left(\frac{\sigma}{K}\right) - i\partial_2\left(\frac{\sigma}{K}\right)\right).$$

Преобразуем уравнение (2.14). Для этого воспользуемся формулой $A_1 = \frac{\partial}{\partial\bar z}\ln\sqrt{g\sqrt{K}}$ [1, с. 100]. Введем в рассмотрение функцию $\tilde{w} = w\sqrt{g\sqrt{K}}$, тогда $w = \frac{\tilde{w}}{\sqrt{g\sqrt{K}}}$. Подставляем $w$ в (2.14) и, учитывая указанную формулу для $A_1$, приводим уравнение (2.14) к виду

$$\partial_{\bar z}\tilde{w} + B_1\bar{\tilde{w}} = F, \quad (2.15)$$

где $F = \frac{\sqrt{g\sqrt{K}}}{2}\partial_z\left(\frac{\sigma}{K}\right)$.

Из того факта, что $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \in D_{3,p}, p > 2$, $\sigma \in D_{1,p}$, $p > 2$, следует, что $B_1, F \in L_p, p > 2$.

Таким образом, поиск поля $\vec{y}$ сводится к следующим действиям.

Решив уравнение (2.15) мы найдем функцию $\tilde{w} = w\sqrt{g\sqrt{K}}$, отсюда найдем $w$, зная $w$, находим $U = \mathrm{Re}\{w(z)\}$, $V = \mathrm{Im}\{w(z)\}$. Зная $U$ и $V$, с помощью формул $\alpha_1^1 = \Pi - U$, $V = \alpha_1^2$, $\alpha_2^2 = \Pi + U$ находим $\alpha_1^1$, $\alpha_1^2$, $\alpha_2^2$. Затем, с помощью формул (2.3) находим $\partial_1\vec{y}$, $\partial_2\vec{y}$. Так как поверхность $S$ односвязна и $\partial_{12}\vec{y} = \partial_{21}\vec{y}$, то интегрируя соотношение $d\vec{y} = \partial_1\vec{y}du + \partial_2\vec{y}dv$, находим вектор смещения MG-деформации $\vec{y}$, с точностью до постоянного вектора.

Уравнение (2.15) будем называть **комплексным уравнением бесконечно малых MG-деформаций поверхностей положительной гауссовой кривизны**.

## 3. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ

Пусть в $E^3$ задана поверхность $S$: $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \in D_{3,p}, p > 2$ гауссовой кривизны $K \ge k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, $(u,v) \in \Omega$, $\Omega$ — плоская односвязная область, $\Gamma$ — ее граница, $\Gamma \in C_\nu^1$, $0 < \nu \le 1$. Подвергнем эту поверхность бесконечно малым MG-деформациям, считая при этом, что $\sigma \in D_{1,p}$, $p > 2$.

Пусть вдоль края поверхности четвертая квадратичная форма поверхности стационарна, то есть выполнено условие $\delta IV = 0$.

Воспользуемся выражением $IV = (\vec{n}, d\vec{n}, d\vec{r})$.

$$IV = (\vec{n}, \partial_1\vec{n}du + \partial_2\vec{n}dv, \partial_1\vec{r}du + \partial_2\vec{r}dv) =$$
$$= (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_1\vec{r})du^2 + (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{r})dudv +$$
$$+(\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_1\vec{r})dudv + (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_2\vec{r})dv^2.$$

Обозначим

$$c_{11} = (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_1\vec{r}),\ c_{12} = (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{r}),\ c_{21} =$$
$$= (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_1\vec{r}),\ c_{22} = (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_2\vec{r}).$$

Учитывая, что

$$[\partial_1\vec{r}, [\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]] =$$
$$= \partial_1\vec{r}(\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}) - \partial_2\vec{r}(\partial_1\vec{r}, \partial_1\vec{r}) = \partial_1\vec{r}g_{12} - \partial_2\vec{r}g_{11},$$

получаем:

$$c_{11} = (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_1\vec{r}) = -(\vec{n}, \partial_1\vec{r}, \partial_1\vec{n}) =$$
$$= -([\vec{n}, \partial_1\vec{r}], \partial_1\vec{n}) = -\left(\left[\frac{[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]}{|[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]|}, \partial_1\vec{r}\right], \partial_1\vec{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{|[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]|}([\partial_1\vec{r}, [\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]], \partial_1\vec{n}) =$$
$$= \frac{1}{|[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]|}(\partial_1\vec{r}g_{12} - \partial_2\vec{r}g_{11}, \partial_1\vec{n}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_1\vec{r}, \partial_1\vec{n})g_{12} - (\partial_2\vec{r}, \partial_1\vec{n})g_{11} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}}(-b_{11}g_{12} + b_{21}g_{11}) = \frac{1}{\sqrt{g}}(b_{21}g_{11} - b_{11}g_{12}).$$

Аналогично вычисляется

$$c_{12} = (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{g}}(b_{21}g_{21} - b_{11}g_{22}),$$
$$c_{21} = (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_1\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{g}}(b_{22}g_{11} - b_{12}g_{12}),$$
$$c_{22} = (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_2\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{g}}(b_{22}g_{21} - b_{12}g_{22}).$$

Вычислим теперь вариации $\delta c_{ij}$, учитывая, что $\delta\vec{n} = 0$.

$$\delta c_{11} = (\delta\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_1\vec{r}) + (\vec{n}, \delta(\partial_1\vec{n}), \partial_1\vec{r}) +$$
$$+(\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \delta(\partial_1\vec{r})) = (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \delta(\partial_1\vec{r})) =$$
$$= (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \delta(\partial_1\vec{y})) = (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^2\partial_2\vec{r}) =$$
$$= \alpha_1^1(\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_1\vec{r}) + \alpha_1^2(\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{r}) = \alpha_1^1c_{11} + \alpha_1^2c_{12},$$
$$\delta c_{12} = (\delta\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{r}) + (\vec{n}, \delta(\partial_1\vec{n}), \partial_2\vec{r}) +$$
$$+(\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \delta(\partial_2\vec{r})) = (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \delta(\partial_2\vec{r})) =$$
$$= (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \delta(\partial_2\vec{y})) = (\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \alpha_1^2\partial_1\vec{r} + \alpha_2^2\partial_2\vec{r}) =$$
$$= \alpha_1^2(\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_1\vec{r}) + \alpha_2^2(\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{r}) = \alpha_1^2c_{11} + \alpha_2^2c_{12},$$
$$\delta c_{21} = (\delta\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_1\vec{r}) + (\vec{n}, \delta(\partial_2\vec{n}), \partial_1\vec{r}) +$$
$$+(\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \delta(\partial_1\vec{r})) = (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \delta(\partial_1\vec{r})) =$$
$$= (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \delta(\partial_1\vec{y})) = (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^2\partial_2\vec{r}) =$$
$$= \alpha_1^1(\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_1\vec{r}) + \alpha_1^2(\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_2\vec{r}) = \alpha_1^1c_{21} + \alpha_1^2c_{22},$$
$$\delta c_{22} = (\delta\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_2\vec{r}) + (\vec{n}, \delta(\partial_2\vec{n}), \partial_2\vec{r}) +$$
$$+(\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \delta(\partial_2\vec{r})) = (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \delta(\partial_2\vec{r})) =$$
$$= (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \delta(\partial_2\vec{y})) = (\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \alpha_1^2\partial_1\vec{r} + \alpha_2^2\partial_2\vec{r}) =$$
$$= \alpha_1^2(\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_1\vec{r}) + \alpha_2^2(\vec{n}, \partial_2\vec{n}, \partial_2\vec{r}) = \alpha_1^2c_{21} + \alpha_2^2c_{22}.$$

Учитывая, что $b_{11} = b_{22} \neq 0$, $b_{12} = 0$, получаем:

$$\delta IV = \delta c_{11}du^2 + \delta c_{12}dudv + \delta c_{21}dudv + \delta c_{22}dv^2 =$$
$$= \frac{b_{11}}{\sqrt{g}}(-(\alpha_1^1g_{12} + \alpha_1^2g_{22})du^2 +$$
$$+(\alpha_1^1g_{11} + \alpha_1^2g_{21} - \alpha_1^2g_{12} - \alpha_2^2g_{22})dudv +$$
$$+(\alpha_1^2g_{11} + \alpha_2^2g_{21})dv^2).$$

Краевое условие принимает вид

$$-(\alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22})du^2 +$$
$$+(\alpha_1^1 g_{11} + \alpha_1^2 g_{21} - \alpha_1^2 g_{12} - \alpha_2^2 g_{22})dudv +$$
$$+(\alpha_1^2 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21})dv^2 = 0.$$

Используем тот факт, что $du = \dot{u}ds, dv = \dot{v}ds$ перегруппируем это выражение и приведем подобные слагаемые, в результате получим:

$$\alpha_1^1(-g_{12}\dot{u}^2 + g_{11}\dot{u}\dot{v}) + \alpha_1^2(g_{11}\dot{v}^2 - g_{22}\dot{u}^2) +$$
$$+\alpha_2^2(g_{12}\dot{v}^2 - g_{22}\dot{u}\dot{v}) = 0.$$

Обозначим коэффициенты при $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2$ через $a_1, a_2, a_3$ соответственно, тогда краевое условие принимает вид:

$$\alpha_1^1 a_1 + \alpha_1^2 a_2 + \alpha_2^2 a_3 = 0\,. \qquad (3.1)$$

В формуле (3.1) сделаем замену $\alpha_1^1 = \Pi - U$, $\alpha_1^2 = V$, $\alpha_2^2 = \Pi + U$:

$$(\Pi - U)a_1 + Va_2 + (\Pi + U)a_3 = 0\,,$$
$$U(a_3 - a_1) + Va_2 + \Pi(a_3 + a_1) = 0\,,$$
$$U(a_3 - a_1) + Va_2 = -\Pi(a_3 + a_1)\,,$$

учитывая равенство (2.12), получаем:

$$U(a_3 - a_1) + Va_2 = \frac{\sigma}{2K}(a_3 + a_1)\,.$$

Пусть $\lambda = a_3 - a_1 + ia_2$, $w = U + iV$.

$$\bar{\lambda}w = (a_3 - a_1 - ia_2)(U + iV) =$$
$$= (a_3 - a_1)U + iV(a_3 - a_1) - ia_2U + Va_2.$$
$$\operatorname{Re}\{\bar{\lambda}w\} = (a_3 - a_1)U + a_2V\,.$$

Наше краевое условие приняло вид:

$$\operatorname{Re}\{\bar{\lambda}w\} = \frac{\sigma}{2K}(a_3 + a_1)$$

Умножим обе части полученного равенства на $\sqrt{g\sqrt{K}}$:

$$\operatorname{Re}\{\bar{\lambda}\tilde{w}\} = \gamma, \qquad (3.2)$$

где $\gamma = \dfrac{\sigma}{2K}(a_3 + a_1)\sqrt{g\sqrt{K}}$.

Выясним к какому классу регулярности на границе $\Gamma$ относятся функции $\gamma$ и $\lambda$. Имеем:

$$a_3 + a_1 = g_{12}\dot{v}^2 - g_{22}\dot{u}\dot{v} - g_{12}\dot{u}^2 + g_{11}\dot{u}\dot{v}\,.$$

Поверхность $S$: $\vec{r} = \vec{r}(u, v) \in D_{3,p}, p > 2$, поэтому $g_{ij} \in D_{2,p}, p > 2, \quad i, j = 1,2$. Граница $\Gamma \in C_\nu^1, 0 < \nu \le 1$, следовательно $a_3 + a_1 \in c_\nu(\Gamma)$, $0 < \nu \le 1$, поэтому $\gamma \in c_\nu(\Gamma)$, $0 < \nu \le 1$.

Функция

$$\lambda = a_3 - a_1 + ia_2 =$$
$$= g_{12}\dot{v}^2 - g_{22}\dot{u}\dot{v} + g_{12}\dot{u}^2 - g_{11}\dot{u}\dot{v} + i(g_{11}\dot{v}^2 - g_{22}\dot{u}^2) =$$
$$= g_{11}(-\dot{u}\dot{v} + i\dot{v}^2) + g_{12}(\dot{v}^2 + \dot{u}^2) + g_{22}(-\dot{u}\dot{v} - i\dot{u}^2) =$$
$$= (\dot{u} - i\dot{v})(-i\dot{u}g_{22} + (\dot{u} + i\dot{v})g_{12} - \dot{v}g_{11}).$$

Очевидно, что $\lambda \ne 0$, поэтому (в силу [2, с. 231]) можем считать, что $|\lambda| = 1$.

Из того факта, что $g_{ij} \in D_{2,p}, p > 2, i, j = 1,2$, следует, что $\lambda \in C_\nu(\Gamma)$, $0 < \nu \le 1$.

Таким образом, данные задачи (2.15) — (3.2) удовлетворяют следующим условиям:

1) $B_1, F \in L_p, p > 2$,
2) $\Gamma \in C_\nu^1, 0 < \nu \le 1$,
3) $\gamma, \lambda \in C_\nu(\Gamma)$, $0 < \nu \le 1$, и $|\lambda| = 1$.

Следовательно, выполнены все условия обобщенной задачи Римана—Гильберта [1, с. 179], для области $\Omega$. Эта задача подробно изучена И. Н. Векуа в книге [1], в которой, для краткости, обобщенная задача Римана—Гильберта названа задачей A, задача A при $F \equiv 0, \gamma \equiv 0$ названа однородной задачей $\overset{\circ}{A}$. Отметим также, что сопряженную относительно задачи A однородную краевую задачу, И. Н. Векуа называет задачей $A'$ [1, с. 184]. Всюду в дальнейшем будем придерживаться обозначений принятых в книге [1]. Итак, задача (2.15)—(3.2) является задачей A.

## 4. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При изучении разрешимости задачи A важную роль играет понятие индекса. Приведем определение индекса функции из [2, с. 93].

**Определение 6.** Индексом функции $\lambda(t)$ по контуру $\Gamma$ называется деленное на $2\pi$ приращение ее аргумента при обходе кривой $\Gamma$ в положительном направлении, т. е. оставляющем область $\Omega$ слева.

Индекс функции $\lambda$ часто называют индексом задачи A.

Вычислим индекс задачи (2.15)—(3.2). Для этого из многочисленных свойств индекса (см. напр. [2]) нам понадобятся три:

1) если действительная или мнимая часть функции не меняет знака при обходе вдоль кривой, то индекс такой функции равен нулю;
2) $Ind(f \cdot h) = Indf + Indh$;
3) если $|f| > |h|$, то $Ind(f + h) = Indf$.

Обозначим $\lambda_1 = \dot{u} - i\dot{v}$, $\lambda_2 = -i\dot{u}g_{22} + (\dot{u} + i\dot{v})g_{12} - \dot{v}g_{11}$, следовательно $\kappa = Ind\lambda = Ind\lambda_1 + Ind\lambda_2$.

Пусть $\lambda_3 = -i\dot{u}g_{22} - \dot{v}g_{11}$, $\lambda_4 = (\dot{u} + i\dot{v})g_{12}$.

Сравним $|\lambda_3| = \sqrt{(g_{22}\dot{v})^2 + (g_{11}\dot{u})^2}$ и $|\lambda_4| = \sqrt{(g_{12}\dot{v})^2 + (g_{12}\dot{u})^2}$. Чтобы сравнить $|\lambda_3| = \sqrt{(g_{22})^2\dot{v}^2 + (g_{11})^2\dot{u}^2}$, $|\lambda_4| = \sqrt{(g_{12})^2\dot{v}^2 + (g_{12})^2\dot{u}^2}$, нужно сравнить $(g_{22})^2+(g_{11})^2$ и $(g_{12})^2+(g_{12})^2 = 2(g_{12})^2$.

Из книги [5, с. 52] известно, что $g_{11}g_{22}-(g_{12})^2>0$, следовательно,

$$2g_{11}g_{22}>2(g_{12})^2 \qquad (4.1).$$

С другой стороны $(g_{22}-g_{11})^2>0$, т. е. $(g_{22})^2-2g_{11}g_{22}+(g_{11})^2>0$, отсюда следует, что

$$(g_{22})^2+(g_{11})^2>2g_{11}g_{22} \qquad (4.2)$$

Из формул (4.1) и (4.2) следует, что $|\lambda_3|>|\lambda_4|$ и $Ind\lambda_2 = Ind\lambda_3$.

$$\lambda_3 = -i\dot{u}g_{22}-\dot{v}g_{11} = -i\dot{u}g_{22}+g_{22}\dot{v}-$$
$$-g_{22}\dot{v}-g_{11}\dot{v}+g_{11}i\dot{u}-g_{11}i\dot{u}=$$
$$=-(g_{22}+g_{11})\dot{v}-(g_{22}+g_{11})i\dot{u}+g_{22}\dot{v}+g_{11}i\dot{u}.$$

Обозначим $\lambda_5 = -(g_{22}+g_{11})\dot{v}-(g_{22}+g_{11})i\dot{u}$, $\lambda_6 = g_{22}\dot{v}+g_{11}i\dot{u}$; $|\lambda_5|>|\lambda_6|$, так как $\sqrt{(g_{22}+g_{11})^2(\dot{v}^2+\dot{u}^2)}>\sqrt{((g_{11})^2+(g_{22})^2)(\dot{v}^2+\dot{u}^2)}$.

Следовательно $Ind\lambda_3 = Ind\lambda_5$.

$$\lambda_5 = -(g_{22}+g_{11})\dot{v}-(g_{22}+g_{11})i\dot{u}=$$
$$=-i(g_{22}+g_{11})(\dot{u}-i\dot{v}).$$

Это означает, что $Ind\lambda_5 = Ind(-i(g_{22}+g_{11}))+Ind(\dot{u}-i\dot{v})$, $Ind(-i(g_{22}+g_{11}))=0$, так как $\mathrm{Im}(-i(g_{22}+g_{11}))<0$, окончательно имеем:

$$Ind\lambda_2 = Ind\lambda_3 = Ind\lambda_5 = Ind(\dot{u}-i\dot{v}).$$

Получается, что $\kappa = Ind\lambda = Ind\lambda_1+Ind\lambda_2 = 2Ind(\dot{u}-i\dot{v})$.

Так как мы исследуем поверхность положительной гауссовой кривизны с краем взаимнооднозначно отображающуюся на плоскую область $\Omega$, не нарушая общности, будем считать, что граница области $\Omega$ — единичная окружность, тогда $u=\cos\varphi, v=\sin\varphi$, $0\le\varphi\le2\pi$, следовательно $\dot{u}=-\sin\varphi, \dot{v}=\cos\varphi$.

Используя формулу подсчета индекса из [2, с. 96], находим:

$$\kappa = Ind\lambda = 2Ind(\dot{u}-i\dot{v}) =$$
$$=2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-\sin\varphi(-\cos\varphi)'-(-\cos\varphi)(-\sin\varphi)'}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}d\varphi=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi=-2.$$

При $\sigma\equiv0$ задача (2.15) — (3.2) является однородной задачей $\overset{\circ}{A}$. Так как индекс $\kappa=-2$, следовательно выполнены условия теоремы 4.5 из [1], согласно которой, если индекс отрицателен, то однородная задача $\overset{\circ}{A}$ не имеет нетривиального решения. Следовательно, $\tilde{w}\equiv0$, отсюда следует, что $\alpha_1^1=\alpha_1^2=\alpha_2^2\equiv0$. Далее, используя формулы (2.3), учитывая односвязность поверхности $S$, получаем, что $\vec{y}=\overrightarrow{const}$.

Таким образом, при $\sigma\equiv0$ бесконечно малая MG-деформация является только тривиальной, т. е. $\vec{y}=\overrightarrow{const}$. Докажем обратное утверждение.

Пусть $\vec{y}=\overrightarrow{const}$, тогда из равенств $d\vec{y}=\partial_1\vec{y}du+\partial_2\vec{y}dv$ и (2.3) следует, что $\partial_j\vec{y}=\alpha_j^k\partial_k\vec{r}=0, j=1,2$, следовательно, $\alpha_j^k=0, j=1,2$, отсюда, в силу (2.11), получаем, что $\sigma\equiv0$. Таким образом, мы доказали пункт а) теоремы.

При $\sigma\not\equiv0$ задача (2.15)—(3.2) удовлетворяет условию теоремы 4.12 из [1], из которой следует, что при отрицательном индексе неоднородная задача А имеет решение (и притом единственное), тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\int_\Gamma\gamma(t)w_j'(t)\lambda(t)dt=0,(j=1,\ldots,m-2\kappa-1),(4.3)$$

где $w_1',\ldots,w_{m-2\kappa-1}'$ — полная система решений сопряженной однородной задачи $\overset{\circ}{A}'$. Так как поверхность $S$ — односвязна, то $m=0$ [1, с. 202]. Индекс задачи $\kappa=-2$, следовательно, $m-2\kappa-1=3$. Получается, что решение $\tilde{w}$ существует и единственно для каждого $\sigma\not\equiv0$, при выполнении трех условий.

В равенство (4.3) входят функции $\lambda$ и $w_j'$, которые, очевидно, от $\sigma$ не зависят, и функция $\gamma=\dfrac{\sigma}{2K}(a_3+a_1)\sqrt{g\sqrt{K}}$, поэтому для каждого $\sigma$ выполняются свои условия (4.3). Таким образом, условия (4.3) можно рассматривать, как ограничения, наложенные на функцию $\sigma$. Тогда, для каждого $\sigma\not\equiv0$, удовлетворяющего трем условиям (4.3), существует и единственно каждое из чисел $\alpha_1^1$, $\alpha_1^2$, $\alpha_2^2$, и по этим числам, с помощью формул (2.3), в силу односвязности поверхности $S$, однозначно определяется поле деформации $\vec{y}$. Отсюда следует справедливость пункта б) теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512с.

2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1958. 544 с.

3. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформации поверхностей//УМН. — 1948. — Т. 3, вып. 2. — С. 47—158.

4. *Климентов С. Б.* О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны // Математические заметки, т. 36, вып. 3, 1984. С. 393—403.

5. *Розендорн Э. Р.* Теория поверхностей. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 304 с.

6. *Фоменко В. Т.* О единственности решений проблем Кристоффеля и Минковского для овалоидов // Сборник научных трудов по межвузовской программе «Университеты России — фундаментальные исследования». Таганрог, изд. ТГПИ — проект 1686, 1998. С. 73—95.

7. *Фоменко В. Т.* Распределение нежестких внешних связей обобщенного скольжения в теории бесконечно малых деформаций поверхности // Труды геометрического семинара. КГУ. Казань. 2003. Вып. 24. С.169—178.

*Жуков Дмитрий Александрович — аспирант, Таганрогский государственный педагогический институт*

*Тел. 8-918-516-00-19*

*E-mail: fossil.new@yandex.ru*

*Zhukov Dmitry Alexandrovich — post graduate student, Taganrog State Pedagogical Institute.*

*Tel. 8-918-516-00-19*

*E-mail: fossil.new@yandex.ru*