УДК:517.986.6

О БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ВЕРСИИ ТЕОРЕМЫ БОРСУКА—УЛАМА ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Б. Д. Гельман[*1]
Н. М. Жук[**]

**Воронежский государственный университет*
***Воронежский государственный педагогический университет*

Поступила в редакцию 10.04.2011 г.

Аннотация. Данная статья посвящена доказательству бесконечномерной версии теоремы Борсука—Улама в случае, когда нечетное отображение является многозначным вполне непрерывным отображением с выпуклыми образами. Рассматриваются некоторые приложения доказанной теоремы.
Ключевые слова. Сюръективный оператор; топологическая размерность, многозначное отображение; дифференциальное включение.

Abstract. This article is devoted to proving the infinite-dimensional version Borsuk-Ulam theorem in the case of an odd map is a completely continuous multivalued map with convex images. Consider some applications of this theorem.
Key words. Surjective operator, topological dimension, a set-valued mapping; differential inclusion.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известна классическая теорема Борсука—Улама, находящая широкие приложения в различных задачах. Одна из эквивалентных формулировок этой теоремы такова (см., например, [1]).

Теорема 1. *Пусть S^n — единичная сфера в пространстве R^{n+1}, пусть $f : S^n \to R^k$ — непрерывное нечетное отображение. Если $k \le n$, то существует по крайней мере одна точка $x_0 \in S^n$ такая, что $f(x_0) = 0$.*

В работах [2], [3] была доказана бесконечномерная версия этой теоремы.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть $S_r(0)$ — сфера радиуса r с центром в нуле пространства E_1, отображение $f : S_r(0) \to E_2$ — вполне непрерывное нечетное отображение.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$A(x) = f(x).$$

Пусть $N(A,f) \subset S_r(0)$ — множество решений этого уравнения. В работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если $dim(Ker\ A) \ge 1$, то уравнение (1) на сфере $S_r(0)$ имеет решение и* $dim(N(A,f)) \ge dim(Ker\ A) - 1$.

Легко видеть, что эта теорема естественно обобщает теорему 1 на случай бесконечномерных пространств.

Настоящая работа посвящена доказательству бесконечномерной версии теоремы Борсука—Улама на случай, когда нечетное отображение f является многозначным.

Многозначное отображение метрического пространства X в нормированное пространство Y — это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом точки x. В дальнейшем, если образы многозначного отображения F являются выпуклыми замкнутыми (компактными) множествами, то будем записывать это следующим образом, $F : X \to Cv(Y)$ $((F : X \to Kv(Y))$. Необходимые сведения из теории многозначных отображений содержатся в [4].

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, где $D(A)$ — область определения оператора A.

Рассмотрим некоторые свойства многозначного отображения $A^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$, где

1 Это исследование поддержано РФФИ: грант № 11 01-00382-а

$A^{-1}(y)=\left\{x\in E_1 \mid A(x)=y\right\}$.

Определение 1. *Число*

$$\left\|A^{-1}\right\|=\sup_{y\in E_2}\left(\frac{\inf\left\{\|x\| \mid x\in E_1, A(x)=y\right\}}{\|y\|}\right)<\infty$$

называется нормой многозначного отображения A^{-1}.

Если подпространство $Ker(A)$ не является дополняемым в пространстве E_1, то не существует линейного непрерывного оператора правого обратного к оператору A, однако имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любого числа* k, $\left\|A^{-1}\right\|<k$, *существует непрерывное нечетное отображение* $q:E_2\to E_1$, *такое, что выполнены следующие условия:*

1) $A\left(q(y)\right)=y$ *для любого* $y\in E_2$;

2) $\left\|q(y)\right\|\le k\left\|y\right\|$ *для любого* $y\in E_2$.

Доказательство этой леммы содержится, например, в [3].

Пусть F — многозначное отображение, определенное на множестве $X\subset E_1$ и действующее в E_2. Если образы любой точки $x\in X$ являются выпуклыми компактами, то будем это записывать $F:X\to Kv\left(E_2\right)$.

Определение 2. *Будем говорить, что отображение* $F:X\to Kv(E_2)$ *— компактно по модулю отображения* A *(или* A*-компактно), если для любого ограниченного множества* $D\subset E_2$ *и любого ограниченного множества* $B\subset X$ *множество* $\overline{F\left(B\cap A^{-1}(D)\right)}$ *является компактным. Если отображение* F *является* A*-компактным и полунепрерывным сверху, то будем говорить, что оно* A*-вполне непрерывно.*

Справедливо следующее необходимое и достаточное условие A-полной непрерывности многозначного отображения F.

Пусть банахово пространство E — это множество $D(A)$, снабженное нормой графика $\|x\|_{1,2}=\|x\|_1+\left\|A(x)\right\|_2$. Очевидно, что вложение $j:E\to E_1$ является непрерывным отображением. Пусть $X\subset D(A)$. Обозначим $\tilde{X}=j^{-1}(X)$ и рассмотрим отображение $\tilde{F}:\tilde{X}\to Kv\left(E_2\right)$, $\tilde{F}(x)=F\left(j(x)\right)$.

Предложение 1. *Полунепрерывное сверху отображение* $F:X\to Kv\left(E_2\right)$ *является* A*-вполне непрерывным, тогда и только тогда, когда отображение* $\tilde{F}$ *является вполне непрерывным.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $C\subset\tilde{X}$ — ограниченное множество в E, тогда множество $B=j(C)$ ограничено в E_1, а множество $D=A(j(C))=A(B)$ ограничено в E_2. Тогда множество $\tilde{F}(C)=F\left(j(C)\right)=F\left(B\cap A^{-1}(D)\right)$ является относительно компактным, что и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть отображение $\tilde{F}$ вполне непрерывно. Рассмотрим ограниченные множества $D\subset E_2$ и $B\subset X$. Пусть

$$C=j^{-1}\left(B\cap A^{-1}(D)\right)\subset E.$$

Очевидно, что множество $C\subset\tilde{X}$ и ограничено. Тогда $F\left(B\cap A^{-1}(D)\right)=\tilde{F}(C)$ и является относительно компактным множеством, что и доказывает достаточность.

Пусть $A:D(A)\subset E_1\to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $q:E_2\to E_1$ — непрерывное отображение удовлетворяющее условиям леммы 1.

Обозначим однозначное отображение $\alpha:E_2\times Ker(A)\to E_1$, $\alpha(y,u)=q(y)+u$. Пусть $R^n\subset Ker(A)$ — произвольное конечномерное подпространство. Если $F:X\subset E_1\to Kv(E_2)$ — многозначное отображение, то определено многозначное отображение $G:Y\to E_2$, $G(y,v)=F\left(\alpha(y,v)\right)$, где множество $Y=\alpha^{-1}(X)\bigcap(E_2\times R^n)$.

Предложение 2. *Пусть* F *—* A*-вполне непрерывное многозначное отображение, тогда* G *является вполне непрерывным отображением.*

Доказательство. Пусть $D\subset Y$ — ограниченное множество, т. е. существует число $N>0$ такое, что $\left\|(y,v)\right\|\le N$ для любых $(y,v)\in D$. Тогда множество $\alpha(D)$ также является ограниченным в E_1, т.е. существует число $M>0$ такое, что $\left\|\alpha(y,v)\right\|_1\le M$ для любых $(y,v)\in D$. Так как $A\left(\alpha(y,v)\right)=y$, то $\left\|\alpha(y,v)\right\|_{1,2}\le M+N$ для любых $(y,v)\in D$. Тогда множество $C=j^{-1}\left(\alpha(D)\right)$ является ограниченным в E, следовательно $G(D)=F\left(j(C)\right)$ является относительно компактным множеством в E_1. Утверждение доказано.

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть E — банахово пространство, $E_0=E\times R^1$. Норму в E_0 определим по правилу: $\left\|(x,t)\right\|=\sqrt{\|x\|^2+t^2}$. Пусть S_0 — единичная сфера в банаховом пространстве E_0, а $H:S_0\to Kv(E)$ — многозначное вполне непрерывное нечетное отображение. Рассмотрим включение

$$H(x,t)\ni x. \tag{1}$$

Лемма 2. *При сделанных предположениях включение (1) имеет решение.*

Доказательство. Пусть B — единичный шар в пространстве E, S — единичная сфера. Рассмотрим отображение $Q : B \to Kv(E)$ определенное условием:

$$Q(x) = H\left(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}\right).$$

Это отображение является нечетным на сфере S и вполне непрерывным. Следовательно, по теореме о нечетном поле (см., например, [4]) отображение Q имеет неподвижную точку. Пусть точка x_0 является неподвижной точкой отображения Q, т.е. $x_0 \in Q(x_0)$. Тогда точка (x_0, t_0) является решением включения, где $t_0 = \sqrt{1 - \|x_0\|^2}$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь некоторые утверждения о топологической размерности множества решений операторных включений. Основные свойства топологической размерности содержатся, например, в [5]. Некоторые другие теоремы о размерности множества неподвижных точек содержатся в [6].

Лемма 3. *Пусть E — банахово пространство, $S \subset E \times R^n$ — единичная сфера, где $n \geq 1$. Пусть $H : S \to Kv(E)$ — вполне непрерывное нечетное многозначное отображение. Тогда множество решений $N(H,S)$ включения $x \in H(x,l)$ имеет топологическую размерность $dim\left(N(H,S)\right) \geq n-1$.*

Доказательство. Представим пространство $R^n = R^1 \times R^{n-1}$. Тогда $S \subset E \times R^1 \times R^n$ — единичная сфера, $H : S \to Kv(E)$ — вполне непрерывное нечетное многозначное отображение. Рассмотрим следующее включение

$$x \in H(x,t,z). \qquad (2)$$

Тогда $N(H,S) \subset E \times R^1 \times R^n$.

Рассмотрим на S операторное уравнение

$$a_1(y,t,z) \in G(y,t,z), \qquad (3)$$

где $a_1(y,t,z) = (y,z)$ — естественное проектирование на подпространство $E_0 = E \times R^{n-1}$, а $G(y,t,z) = \left(H(y,t,z), z\right)$. В силу леммы 2 включение (3) имеет решение. Очевидно, что включения (2) и (3) эквивалентны.

Покажем, что множество решений $N(a_1,G) \subset S$ включения (3) имеет размерность большую или равную n. Для этого предположим противное, пусть $dim\left(N(a_1,G)\right) \leq n-1$. В силу того, что a_1 — линейный оператор и отображение G является нечетным, множество $N(a_1,G) \subset S$ непусто и является симметричным относительно нуля. Тогда существует (см., например, [7]) непрерывное нечетное отображение $\alpha : N\left(a_1,G\right) \to S^{n-1} \subset R^n$. Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : S \to R^n$, определенное условием:

$$\Phi(y,t,z) = \begin{cases} \alpha(y,t,z), & \text{если } (y,t,z) \in N(a_1,G) \\ R^n, & \text{если } (y,t,z) \notin N(a_1,G); \end{cases}$$

Очевидно, что это отображение имеет выпуклые замкнутые образы, является нечетным и полунепрерывным снизу, т.к. множество $N\left(a_1,G\right)$ является замкнутым. Следовательно, у него существует непрерывное нечетное сечение $\varphi : S \to R^n$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\varphi|_{N(a_1,G)} = \alpha$.

Для построения этого сечения рассмотрим произвольное непрерывное сечение β многозначного отображения Φ такое, что $\beta|_{N(a_1,G)} = \alpha$. Такое отображение всегда существует в силу теоремы Майкла (см., например, [8]). Тогда отображение

$$\varphi(x) = \frac{\beta(x) - \beta(-x)}{2}.$$

является искомым отображением. Действительно, $\varphi(x) \in \Phi(x)$, т.к. $-\beta(-x) \in \Phi(x)$ и множество $\Phi(x)$ выпукло. Заметим также, что в силу нечетности отображения α на множестве $N\left(a_1,G\right)$ для любой точки x из этого множества имеем,

$$\varphi(x) = \frac{\alpha(x) - \alpha(-x)}{2} = \alpha(x).$$

Рассмотрим отображение $\Psi : S \to E_0$ определенное соотношением:

$$\Psi(y,t,z) = \left(H(y,t,z), z - \varphi(y,t,z)\right) \in E_0.$$

В силу сделанных построений, уравнение $a_1(y,t,z) \in \Psi(y,t,z)$ не имеет решений на S. Действительно, если $a_1\left(y_0,t_0,z_0\right) \in \Psi\left(y_0,t_0,z_0\right)$, то $H\left(y_0,t_0,z_0\right) \ni y_0$ и $z_0 = z_0 - \varphi\left(y_0,t_0,z_0\right)$, т.е. $\varphi\left(y_0,t_0,z_0\right) = 0$.

Тогда: с одной стороны, $G\left(y_0,t_0,z_0\right) \ni \left(y_0,z_0\right) = a_1\left(y_0,t_0,z_0\right)$, т.е. $\left(y_0,t_0,z_0\right) \in N\left(a_1,G\right)$. С другой стороны $\varphi\left(y_0,t_0,z_0\right) = 0$, следовательно, $\left(y_0,t_0,z_0\right) \notin N\left(a_1,G\right)$. Полученное противоречие и доказывает неравенство $dim\left(N(a_1,G\right) \geq n$.

Опираясь на эти леммы, докажем следующую теорему.

Пусть $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, $S \subset E_1$ — единичная сфера в пространстве E_1, $F : S \to Kv(E_2)$ — A-вполне непрерывное нечетное многозначное отображение. Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in F(x). \tag{4}$$

Обозначим множество решений этого включения $N(A,F)$.

Теорема 3. *Если* $dim(Ker\ A) \geq n > 0$, *то множество* $N(A,F) \neq \varnothing$ *и* $dim\big(N(A,F)\big) \geq n-1$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $G : D(A) \subset E_1 \to Kv(E_2)$ определенное условием:

$$G(x) = \begin{cases} \|x\| F\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Это отображение также является A-вполне непрерывным. Действительно, пусть D — ограниченное подмножество в E_2, $M \subset \big(B_R(0) \cap D(A)\big)$. Тогда

$$G\big(M \cap A^{-1}(D)\big) \subset C =$$

$$= \left\{ tu \mid t \in \left[0, \frac{R}{r}\right], u \in F\big(S \cap A^{-1}(D)\big) \right\}.$$

Так как множество C является относительно компактным, то

$$\overline{G\big(M \cap A^{-1}(D)\big)}$$

является компактным множеством.

Пусть вектор $0 \neq b \in Ker(A)$, $E = E_2 \times R^1$, $q : E_2 \to E_1$ — непрерывное нечетное отображение, удовлетворяющее условиям леммы 1. Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : E \to Kv\big(E_2\big)$,

$$\Phi(y,t) = G\big(q(y) + tb\big).$$

Это отображение является нечетным и вполне непрерывным. Полная непрерывность отображения Φ вытекает из предложения 2.

Пусть S — единичная сфера в E, рассмотрим включение

$$\Phi(y,t) \ni y,$$

на S. В силу леммы 2 это уравнение имеет решение, т.е. существует точка $\big(y_0, t_0\big) \in S$ такая, что

$$\Phi\big(y_0, t_0\big) = G\big(q(y_0) + t_0 b\big) \ni y_0.$$

Нетрудно видеть, что точка $z_0 = q(y_0) + t_0 b \neq 0$.

Тогда:

$$G\big(z_0\big) = \|z_0\| F\left(\frac{z_0}{\|z_0\|}\right) \ni y_0.$$

Откуда,

$$F\left(\frac{z_0}{\|z_0\|}\right) \ni \frac{y_0}{\|z_0\|}.$$

С другой стороны,

$$A(z_0) = A\big(q(y_0) + t_0 b\big) = A\big(q(y_0)\big) + t_0 A(b) = y_0,$$

тогда $A\left(\dfrac{z_0}{\|z_0\|}\right) = \dfrac{y_0}{\|z_0\|}$. Обозначим

$$x_0 = \frac{z_0}{\|z_0\|} \in S_1(0) \subset E_1.$$

Тогда $F\big(x_0\big) \ni A\big(x_0\big)$, т.е. точка $x_0 \in N(A,F)$. Это и доказывает первую часть теоремы.

Докажем теперь вторую часть теоремы, связанную с оценкой размерности множества $N(A,F)$.

Пусть отображение $q : E_2 \to E_1$ такое же, как и в первой части теоремы. Рассмотрим число n такое, что $dim(Ker(A) \geq n+1$. Тогда существуют $n+1$ единичных линейно независимых вектора $e_i \in Ker(A)$, $i = 0, \ldots, n$. Пусть

$$E = E_2 \times R^1 \times R^n, \qquad E_0 = E_2 \times R^n.$$

Определим многозначное отображение $\Psi : E \to Kv\big(E_2\big)$,

$$\Psi(y,t,z) = G\left(q(y) + te_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j e_j\right),$$

где $z = \big(z_1, z_2, \ldots, z_n\big) \in R^n$, а $t \in R^1$. Легко проверить, что это отображение является нечетным и вполне непрерывным. Полная непрерывность отображения Ψ также вытекает из предложения 2. В силу леммы 3 множество решений $N(\Psi, S)$ включения $y \in \Psi(y,t,z)$ имеет топологическую размерность большую или равную n.

Рассмотрим отображение $\tau : N(\Psi, S) \to S \subset E_1$,

$$\tau(y,t,z) = \frac{\left(q(y) + te_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j e_j\right)}{\left\| q(y) + te_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j e_j \right\|}.$$

Это отображение является биективным на свою область значений. Действительно, если $\tau\big(y_0, t_0, z_0\big) = \tau\big(y_1, t_1, z_1\big)$, то существует такое число $\lambda > 0$, что

$$q\big(y_0\big) + t_0 e_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j^0 e_j = \lambda \left(q(y_1) + t_1 e_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j^1 e_j \right).$$

Тогда

$$q(y_0) - \lambda q(y_1) = (\lambda t_1 - t_0)e_0 +$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda z_j^1 - z_j^0\right)e_j \in Ker(a).$$

Из этого включения видно, что $\lambda = 1$ и $(y_0, t_0, z_0) = (y_1, t_1, z_1)$. Так как множество $N(\Psi, S)$ является компактным, то отображение τ является гомеоморфизмом на свою область значений и $\tau(N(\Psi,S)) \subset N(A,F)$.

Следовательно, в силу монотонности топологической размерности справедливы неравенства:

$$n \le dim\left(N(\Psi,S)\right) =$$
$$= dim\left(\tau(N(\Psi,S))\right) \le dim\left(N(A,F)\right).$$

Так как число n было выбрано произвольно, то

$$dim\left(N(A,F)\right) \ge dim(Ker\ A) - 1.$$

Теорема доказана.

Замечание. *Нетрудно видеть что в этой теореме сферу S можно брать любого радиуса r с центром в нуле пространства E_1.*

4. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ 3

4.1. ТЕОРЕМА БОРСУКА—УЛАМА ДЛЯ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ИНДЕКСА

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства.

Определение 2. *Замкнутый линейный оператор $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ будем называть фредгольмовым оператором положительного индекса, если выполнены следующие условия:*

1) область значений $Im(A)$ является замкнутым подпространством пространства E_2;

2) $dim\left(Coker(A)\right) < \infty$, где $Coker(A)$ — фактор-пространство пространства E_2 по $Im(A)$;

3) $dim\left(Ker(A)\right) > dim\left(Coker(A)\right)$, где $dim\left(Ker(A)\right)$ может быть бесконечность.

Индексом оператора A называется число

$$ind(A) = dim\left(Ker(A)\right) - dim\left(Coker(A)\right) > 0.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — фредгольмов оператор положжетельного индекса и $ind(A) \ge n > 0$. Пусть $S \subset E_1$ — единичная сфера в пространстве E_1, $F : S \to Kv(E_2)$ — вполне непрерывное нечетное многозначное отображение. Тогда множество $N(A,F) \ne \varnothing$ и $dim\left(N(A,F)\right) \ge n - 1$.*

Доказательство. Хорошо известно, что если $dim\left(Coker(A)\right) < \infty$, то пространство E_2 можно представить в виде прямой суммы $E_2 = Im(A) \bigoplus E'_2$, где подпространство E'_2 изоморфно $Coker(A)$, т.е. является конечномерным пространством. Так как

$$dim\left(Ker(A)\right) > dim\left(Coker(A)\right),$$

то в $Ker(A)$ можно выбрать подпространство $\hat{E}_1$ изоморфное $Coker(A)$, а пространство E_1 разложить в прямую сумму $E_1 = \hat{E}_1 \bigoplus L$, где L некоторое дополнительное подпространство. В этом случае легко построить непрерывный линейный оператор $B : E_1 \to E_2$ такой, что $Ker(B) = L$, а $B\left(\hat{E}_1\right) = E'_2$. Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) + B(x) \in B(x) + F(x).$$

Очевидно, что это включение эквивалентно включению $A(x) \in F(x)$, однако, оператор $C = A + B$ является сюръективным и $dim(Ker(C) = ind(A) \ge n$, а многозначное отображение $\hat{F}(x) = B(x) + F(x)$ является вполне непрерывным и нечетным. Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.

4.2. ТЕОРЕМА ОБ АНТИПОДАХ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть S — единичная сфера в E_1 и $G : S \to Kv(E_2)$ — вполне непрерывное многозначное отображение. Рассмотрим отображение $\Psi : S(0) \to Kv(E_2)$, $\Psi(x) = A(x) - G(x)$. Пусть

$$N(\Psi) = \left\{x \in S(0) \,|\, \Psi(x_0) \cap \Psi(-x_0) \ne 0\right\}.$$

Теорема 5. *Если $dim\left(Ker(A)\right) \ge n$, то множество $N(\Psi) \ne \varnothing$ и $dim\left(N(\Psi)\right) \ge n - 1$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : S \to Kv(E_2)$, $F(x) = \frac{1}{2}\left(G(x) - G(-x)\right)$. Очевидно, что это отображение является вполне непрерывным, так как G — вполне непрерывное отображение. Так как

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(G(x) - G(-x)\right),$$

а $F(-x) = \frac{1}{2}\left(G(-x) - G(x)\right)$, то $F(-x) = -F(x)$. Значит, отображение F — нечетное отображение. Тогда из теоремы 1 следует, что существует точка x_* такая, что

$$F(x)=\frac{1}{2}(G(x)-G(-x)), \qquad (5)$$

Значит, существуют $u\in G(x_*)$ и $v\in G(-x_*)$ такие, что $2A(x_*)=(u-v)$, т.е. $A(x_*)-u=-A(x_*)-v=A(-x_*)-v$.

Так как

$$A(x_*)-u\in A(x_*)-G(x_*)=\Psi(x_*),$$

$$A(-x_*)-v\in A(-x_*)-G(-x_*)=\Psi(-x_*).$$

Следовательно, $\Psi(x_*)\cap\Psi(-x_*)\neq 0$. Таким образом, точка $x_*\in N(\Psi)$. Так как множество решений $N(A,F)$ включения (5) имеет размерность $dim\left(N(A,F)\right)\geq n-1$, то и $dim\left(N(\Psi)\right)\geq n-1$. Теорема доказана.

4.3. ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Пусть E — n-мерное банахово пространство, $B_R[0]\subset E$ — замкнутый шар радиуса R с центром в нуле. Пусть $F:R^1\times B_R[0]\to E$ — многозначное отображение удовлетворяющее следующим условиям:

(F1) *для любого* $x\in B_R\left[x_0\right]$ *многозначное отображение* $F(\cdot,x):R^1\to Kv(E)$ *измеримо;*

(F2) *для почти всех* $t\in R^1$ *многозначное отображение* $F(t,\cdot):B_R\left[x_0\right]\to Kv(E)$ *полунепрерывно сверху;*

(F3) *существуют такие измеримые функции* a,b, *суммируемые на любом конечном интервале, что для любого* $x\in B_R\left[x_0\right]$ *и почти всех* $t\in R^1$ *справедливо неравенство*

$$\max_{u\in F(t,x)}\|u\|\leq a(t)\|x\|+b(t);$$

(F4) *для любого* $t\in R^1$ *отображение* F *нечетно по второму аргументу.*

Пусть $[a,b]$ — произвольный отрезок на прямой R^1. Обозначим $C_{([a,b],E)}$ $\left(L^1_{([a,b],E)}\right)$ пространство непрерывных (суммируемых) функций, определенных на $[a,b]$, со значениями в E. Пусть заданы линейные непрерывные функционалы $l_i:C_{([a,b],E)}\to R^1$, $i=1,\ldots,k$, причем, $0\leq k<n$.

Рассмотрим линейный оператор $L:C_{([a,b],E)}\to R^k$, определенный соотношением, $L\left(x(\cdot)\right)=\left(l_1(x(\cdot)),\ldots,l_k\left(x(\cdot)\right)\right)$.

Будем считать пространство E вложенным в пространство $C_{([a,b],E)}$, т.е. точке $x_0\in E$ сопоставим постоянное отображение $x^0(t)=x_0$.

Будем предполагать, что отображение L удовлетворяет следующему условию:

$$L\,|_E: E\subset C_{([a,b],E)}\to R^k$$

является сюръективным оператором.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$x'\in F(t,x). \qquad (6)$$

Нас будет интересовать задача существования решений включения (6), определенных на некотором фиксированном, но произвольном отрезке $[a,b]\subset R^1$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$l_i\left(x(\cdot)\right)=0,\qquad i=1,\ldots,k; \qquad (7)$$

$$\max_{t\in[a,b]}\left\|x(t)\right\|=1. \qquad (8)$$

Обозначим $\Sigma_L\left([a,b]\right)$ — множество решений задачи (6), (7), (8).

Пусть

$$X=\{x\in C_{([a,b],E)}\mid\left\|x(t)\right\|\leq R\ \text{ для любого }\ t\in[a,b]\}.$$

Пусть $x\in X$, рассмотрим многозначное отображение (многозначный оператор суперпозиции):

$$\Im_F(x)=\{y\in L^1_{([a,b],E)}\mid y(t)\in F\left(t,x(t)\right)$$
$$\text{при п.в. } t\in[a,b]\}$$

и многозначный интегральный оператор

$$\Phi(x)(t)=\left\{\int_a^t y(\tau)d\tau\mid\quad y\in\Im_F(x)\right\}.$$

Лемма 4. *Многозначное отображение* Φ *имеет выпуклые компактные образы и является вполне непрерывным.*

Пусть $C^0_{([a,b],E)}=\left\{x\in C_{([a,b],E)}\mid x(a)=0\right\}$. Очевидно, что отображение $\Phi:X\to Kv\left(C^0_{([a,b],E)}\right)$. Обозначим $G:X\to Kv\left(C^0_{([a,b],E)}\times E\right)$ многозначное отображение определенное условием: $G(x)=\left(\Phi(x)\times 0\right)$. Очевидно, что это отображение вполне непрерывно и нечетно.

Рассмотрим теперь линейный оператор $A:C_{([a,b],E)}\to C^0_{([a,b],E)}\times E$ определенный условием:

$$A(x)=\left(x-x(a),L(x)\right).$$

Очевидно, что этот оператор является непрерывным. Проверим, что он сюръективен. Пусть (y,a) произвольная точка из $C^0_{([a,b],E)}\times E$. Пусть $\hat{a}$ постоянная функция такая, что $L(\hat{a})=a$, тогда $A(x)=(y,a)$ для функции $x=y+\hat{a}$.

Пусть S — сфера единичного радиуса с центром в нуле пространства $C_{([a,b],E)}$. Рассмотрим на S включение

$$A(x)\in G(x). \qquad (9)$$

Лемма 5. *Включение (9) эквивалентно задаче (6), (7), (8).*

Доказательство этой леммы очевидно.

Применяя к включению (9) теорему 3 получим следующее утверждение.

Теорема 6. *При сделанных предположениях множество* $\Sigma_L([a,b]) \neq \emptyset$ *и* $dim\left(\Sigma_L([a,b])\right) \geq (n-k-1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dugundji J., Granas A.* Fixed point theory. Warszawa: PWN, 1982.
2. *Гельман Б. Д.* Теорема об антиподах в бесконечномерных банаховых пространствах // Матем. сборник. — 2002. — Т. 193, N 1. — С. 83—92.
3. *Гельман Б. Д.* Бесконечномерная версия теоремы Борсука—Улама // Функциональный анализ и его приложения. — 2004. — Т. 38, N 4. — С. 1—5.
4. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений. М.: КомКнига (URSS), 2005.
5. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
6. *Гельман Б. Д.* Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, N 12. — С. 33—56.
7. *Izydorek M.* The Bourgin-Yang theorem for multi-valued maps in the nonsymmetric case // Zeszyty naukowe wydzialu matem., fiziki i chemii, uniwers. Gdan'sk. — 1987. — N 6. — P. 37—41.
8. *Michael E.* Continuous selections, 1 // Ann. of Math. — 1956. — V. 63, N 2. — P. 361—382.

Гельман Борис Данилович — доктор физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет

E-mail: gelman@math.vsu.ru

тел. 223-56-92

Жук Наталья Михайловна — аспирантка, Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: chuk _n_ m@mail.ru

Тел: 8-920-209-74-33

Gel'man Boris Danilovich — Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Voronezh State University

E-mail: gelman@math.vsu.ru

Tel.: 223-56-92

Zhuk Nataliya Mihailovna, aspirant, Voronezh State Pedagogical University

E-mail: chuk _n_ m@mail.ru

Tel: 8-920-209-74-33