УДК 517.927.4

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. В. Быстрецкий, А. Н. Наимов

Вологодский государственный педагогический университет
Вологодский государственный технический университет

Поступила в редакцию 31.03.2011 г.

Аннотация. Доказаны достаточные условия априорной оценке и разрешимости для нового класса нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на конечном отрезке.
Ключевые слова: априорная оценка, разрешимость, гомотопия.

Abstract. We prove sufficient conditions for a priori estimates and solvability of a new class of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations of second order on a finite interval.
Keywords: a priori estimate, the solvability, homotopy.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья написана к юбилею нашего учителя, профессора Эргашбоя Мухамадиева. Научная школа, руководимая профессором Э. Мухамадиевым, являясь частью научной школы профессора М. А. Красносельского, действует более сорока лет и приносит свои плоды. Основу деятельности школы составляет еженедельный научный семинар. В нем обсуждаются различные проблемы современной математики и ее приложения. Семинар способствовал формированию зрелых математиков, а также научному продвижению многих математиков, независимо от круга их научных интересов. В результате были подготовлены и успешно защищены множество докторских и кандидатских диссертаций по различной тематике. Общение с профессором Э. Мухамадиевым и обсуждение с ним научных проблем многими математиками воспринимается как залог успеха в математике.

Исследование, проведенное в настоящей работе, есть продолжение и развитие одной из ветвей научных изысканий нашего учителя.

Статья посвящена исследованию априорной оценки и разрешимости для нового класса нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Схема исследования рассматриваемого класса задач берет свое начало из основополагающих работ [1–4]. В них рассматривается системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x' = P(t,x) + f(t,x),\ t \in (-\infty,+\infty),\ x \in R^n \quad (1)$$

с главной положительно однородной нелинейностью $P(t,x)$, где $P(t,\lambda x) \equiv \lambda^m P(t,x)$, $m > 1$, и с краевыми условиями периодичности или ограниченности по t. К данному классу краевых задач применяется схема исследования, состоящая из двух этапов. На первом этапе исследуется, при каких условиях на $P(t,x)$ имеет место априорная оценка решений краевой задачи по норме пространства $C([0,1];R^n)$ при любом возмущении $f(t,x)$, где $f(t,x) = o(|x|^m)$, $|x| \to \infty$ равномерно по t. На втором этапе в условиях существования априорной оценки исследуется разрешимость краевой задачи, применяя методы вычисления вращения векторных полей.

При исследовании априорной оценки сочетаются две основные идеи. Первая идея состоит в том, что по исходной системе дифференциальных уравнений $y' = g(t,y)$ всевозможными сдвигами $y' = g(t+\tau_k, y)$ вдоль последовательностей τ_k, стремящихся к бесконечности, выводятся предельные в каком-то смысле уравнения, и в терминах свойств предельных уравнений исследуются свойства исходной системы. Данная идея ранее применялась в работах ряда авторов, например, в работах [5], [6].

Вторая идея состоит в том, что автономная система $x' = Q(x)$, $x \in R^n$ с положительно однородной правой частью $Q(x)$, $Q(\lambda x) \equiv \lambda^m Q(x)$, $\lambda > 0$, инвариантна относительно семейства преобразований

$$y(t) = r^{-1} x(t_0 + r^{1-m} t) \qquad (2)$$

зависящих от параметров t_0 и $r > 0$. Поэтому, к системе (1) применяя семейство преобразований (2) и сохраняя вид главного члена P, можно выяснить, при каких условиях на P имеет место априорная оценка. Сочетание этих двух идей при исследовании линейных краевых задач было известно. Его обобщение применительно к краевым задачам для систем нелинейных уравнений вида (1) было предложено в работах [1], [2].

На этапе исследования разрешимости краевых задач для систем вида (1), в отличие от работ [7], [8], основной упор делается на вычисление вращения бесконечномерных вполне непрерывных векторных полей, порожденных краевыми задачи. Техника вычисления вращения основывается на общих свойствах вращения и идеи гомотопии (деформации) исходного поля к более простому полю. В конечном итоге выводятся формулы для вычисления вращения через свойства главного члена P системы (1). И если вращение окажется не равным нулю, то согласно принципу ненулевого вращения краевая задача разрешима (см., например, [8]). Таким образом, «вращая главный нелинейный член P», можно находить условия разрешимости краевых задач для систем вида (1) при любом возмущении f.

Схема исследования краевых задач, разработанная для систем вида (1), в последующем была обобщена в работах Байзаева С. ([9]) применительно к определенному классу систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Техника вычисления вращения вполне непрерывных векторных полей, порожденных краевыми задачами для систем вида (1), была доведена до совершенства в работе [4], где в случае $n = 2$ выведена оригинальная формула вычисления вращения. Вслед за этим постепенно созрело понимание того, что разрешимость рассматриваемых краевых задач в первую очередь связана не вращением, а связными компонентами множества $\mathbf{P}_m$ главных членов P, для которых имеет место априорная оценка. А именно, свойство разрешимости краевой задачи при любом возмущении сохраняется в каждой связной компоненте множества $\mathbf{P}_m$ ([10]). А вращение, хотя оно инвариантно в каждой связной компоненте множества $\mathbf{P}_m$, не всегда характеризует связные компоненты. Появилась задача гомотопической классификации — задача описания связных компонент множества $\mathbf{P}_m$. Задача гомотопической классификации в случае, когда P не зависит от t, решена в терминах гомотопической топологии в работах [10], [11].

В последующем была предложена следующая схема исследования краевых задач для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

1) выделение класса главных нелинейных членов и класса возмущений, допускающих априорную оценку решений краевой задачи;

2) доказательство инвариантности свойства разрешимости краевой задачи в каждой связной компоненте выделенного класса главных нелинейных членов;

3) описание связных компонент выделенного класса главных нелинейных членов – задача гомотопической классификации;

4) определение разрешимых гомотопических классов и нахождение необходимых и достаточных условий разрешимости краевой задачи.

Предложенная схема была полностью реализована при исследовании третьей двухточечной краевой задачи

$$x'' = P(x, x') + f(t, x, x'), \ 0 < t < 1, \ x \in R, \qquad (3)$$

$$x'(0) = k_0 x(0) + h_0(x), \ x'(1) = k_1 x(1) + h_1(x), \qquad (4)$$

где $P(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^m P(x, y)$, $m > 1$, k_0, k_1 — числа,

$$f(t, x, y) = o(|\,x\,|^m + |\,y\,|^m), \ |\,x\,| + |\,y\,| \to \infty$$

равномерно по t,

$$|\,h_0(x)\,| + |\,h_1(x)\,| = o(||\,x\,||_1),$$

$$||\,x\,||_1 = \max\{|\,x(t)\,| + |\,x'(t)\,| : \quad 0 \le t \le 1\} \to \infty.$$

Результаты исследования опубликованы в работе [12].

Методика вывода априорной оценки, основанная на двух выше упомянутых идеях, и разработанная для систем вида (1), в случае задачи (3), (4) непосредственно неприменима. Здесь, в отличие от систем вида (1), необходимо исследовать качественное поведение решений $y_j(t)$, $||\,y_j\,||_{C^1} = 1$, $j = 1, 2, \ldots$ краевых задач

$$\varepsilon_j y_j'(t) = P(x_0(t), y_j(t)) + o(1), \ 0 < t < 1,$$

$$y_j(0) = k_0 x_0(0) + o(1), \ y_j(1) = k_1 x_0(1) + o(1),$$

$j = 1,\ 2,\ \ldots,$

где $\varepsilon_j \to 0$, $j \to \infty$, функция $x_0(t)$ фиксирована. Определенную ясность можно внести, если соответствующим образом согласовать множество нулей функции $P(x,y)$ и значения k_0, k_1. Аналогичная ситуация возникает при многомерном обобщении краевой задачи (3), (4). А именно, если рассматривать краевую задачу

$$x'' = P(t,x,x') + f(t,x,x'),\ 0 < t < 1,\ x \in R^n, \quad (5)$$

$$x'(0) = A_0(x(0)) + h_0(x),\ x'(1) = A_1(x(1)) + h_1(x), \quad (6)$$

где отображения $A_0, A_1 : R^n \mapsto R^n$ - непрерывные и положительно однородные первого порядка. В работах [13], [14] приведены условия существования априорной оценки решений краевой задачи (5), (6) по норме пространства $C^1([0,1];R^n)$. В случае, когда $P(t,x,y) = Q(y)$, т.е. множество нулей отображения $P(t,x,y)$ состоит из тривиальной гиперповерхности $y = 0$, получены формулы вычисления вращения вполне непрерывного векторного поля, порожденного краевой задачей. Этим самым были сформулированы и доказаны новые достаточные условия разрешимости краевой задачи (5), (6) при любых возмущениях f, h_0, h_1.

Таким образом, установлено, что априорная оценка и разрешимость краевой задачи (5), (6) зависит от структуры множество нулей главного члена $P(t,x,y)$ системы (5) и его согласованности с отображениями A_0, A_1.

В настоящей работе рассматривается класс задач вида (5), (6), где множество нулей главного члена $P(t,x,y)$ состоит из одной нетривиальной гиперповерхности $y = C(t,x)$. Для данного класса задач приводятся новые условия существования априорной оценки и разрешимости. Часть приводимых результатов опубликована в работе [15].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим класс нелинейных краевых задач следующего вида

$$\begin{gathered} x'' = Q(t, x' - C(t,x)) + f(t,x,x'), \\ 0 < t < 1, x \in R^n, \end{gathered} \quad (7)$$

$$\begin{gathered} x'(0) = A_0(x(0), x(1)) + h_0(x), \\ x'(1) = A_1(x(0), x(1)) + h_1(x), \end{gathered} \quad (8)$$

где $Q : [0,1] \times R^n \mapsto R^n$, $f : [0,1] \times R^{2n} \mapsto R^n$, $A_0, A_1 : R^{2n} \mapsto R^n$, $h_0, h_1 : C^1([0,1];R^n) \mapsto R^n$ — непрерывные отображения, $n > 1$, $C^1([0,1];R^n)$ — пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке [0, 1] вектор-функций $z(t)$ с нормой $\|z\|_1 = \max\{|z(t)| + |z'(t)| : 0 \le t \le 1\}$. Отображения Q, C, A_0, A_1 считаем главными нелинейными членами. Предполагаем, что $Q(t,y)$ по y положительно однородно порядка $m > 1$, т.е. $Q(t,\lambda y) \equiv \lambda^m Q(t,y)$ при любом $\lambda > 0$. А отображения C, A_0, A_1 считаем положительно однородными первого порядка: $C(t,\lambda x) \equiv \lambda C(t,x)$, $A_0(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda A_0(x,y)$, $A_1(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda A_1(x,y)$. Тройку (f, h_0, h_1) отображений f, h_0, h_1 называем возмущением и предполагаем, что f, h_0, h_1 удовлетворяют следующим условиям:

$$(|x| + |y|)^{-m} \max_{0 \le t \le 1} |f(t,x,y)| \to 0,\ |x| + |y| \to \infty,$$

$$\|z\|_1^{-1} \left(|h_0(z)| + |h_1(z)|\right) \to 0,\ \|z\|_1 \to \infty.$$

Множество таких троек (f, h_0, h_1) обозначим через $\Re_m$.

Класс задач (7), (8) исследуется с целью выяснить, при каких условиях на Q, C, A_0, A_1 и при любом возмущении $(f, h_0, h_1) \in \Re_m$ имеет место априорная оценка. Априорной оценкой подразумевается ограниченность множества решений краевой задачи (7), (8) по норме пространства $C^1([0,1];R^n)$. Далее, в условиях априорной оценки исследуется разрешимость краевой задачи. Краевую задачу (7), (8) для заданных Q, C, A_0, A_1 называем разрешимой, если при любом возмущении $(f, h_0, h_1) \in \Re_m$ существует хотя бы одно решение задачи.

2. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА

Введем в рассмотрение следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u' = Q(t_0, u),\ u \in R^n,\ t_0 \text{ — фиксировано}, \quad (9)$$

$$z' = C(t,z),\ 0 < t < 1,\ z \in R^n. \quad (10)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) при любом $t_0 \in [0,\ 1]$ автономная система (9) не имеет ненулевых ограниченных решений;

2) для любого ненулевого решения $z(t)$ системы (10)

либо $A_0(z(0), z(1)) - C(0, z(0)) \notin L_+(Q(0,\cdot))$,

либо $A_1(z(0), z(1)) - C(1, z(1)) \notin L_-(Q(1,\cdot))$,

где $L_+(Q(0,\cdot))$ — множество точек всех траекторий автономной системы $u' = Q(0,u)$, ограниченных при $t > 0$, а $L_-(Q(1,\cdot))$ — множество точек всех траекторий автономной системы $u' = Q(1,u)$, ограниченных при $t < 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда при любом возмущении* (f, h_0, h_1) *множество решений краевой задачи (7), (8) либо пусто, либо ограничено по норме пространства* $C^1([0,1]; R^n)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [15].

Обозначим через $\mathbf{P}_m$ множество четверок (Q, C, A_0, A_1) отображений Q, C, A_0, A_1, удовлетворяющих условиям 1), 2). Две четверки (Q, C, A_0, A_1), $(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$ из $\mathbf{P}_m$ назовем гомотопными и обозначим $(Q, C, A_0, A_1) \sim (\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$, если их можно соединять непрерывной линией, целиком лежащей в $\mathbf{P}_m$. В работе [15], по аналогии с работой [12], доказана следующая теорема о гомотопической инвариантности свойства разрешимости.

Теорема 2. *Если краевая задача (7), (8) разрешима для четверки* $(Q, C, A_0, A_1) \in \mathbf{P}_m$, *то она разрешима и для любой четверки* $(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1) \in \mathbf{P}_m$, *гомотопной* (Q, C, A_0, A_1).

Таким образом, исследование разрешимости краевой задачи (7), (8) сводится к задаче гомотопии четверки (Q, C, A_0, A_1) к более простой $(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$, для которой можно выяснить, разрешима или неразрешима краевая задача. А разрешимость краевой задачи для $(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$ можно исследовать, вычисляя вращение бесконечномерного вполне непрерывного векторного поля, порожденного краевой задачей, на сферах больших радиусов пространства $C^1([0,1]; R^n)$.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ

Приведем достаточные условия на Q, C, A_0, A_1, при выполнении которых имеет место включение $(Q, C, A_0, A_1) \in \mathbf{P}_m$ и возможно построение гомотопии $(Q, C, A_0, A_1) \sim (\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$, из которой следует разрешимость краевой задачи (7), (8).

Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:

I. Отображения Q, C, A_0, A_1 представимы в виде

$$Q(t,y) = |y|^{m-1} Jy, \; C(t,y) = Dy, \tag{11}$$

$$A_0(x,y) = A_{00}x + A_{01}y, \; A_1(x,y) = A_{10}x + A_{11}y, \tag{12}$$

где $m > 1$, J, D, A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11} — квадратные матрицы (постоянные) порядка n, матрица J не имеет мнимых собственных значений, невырождена матрица

$$E = \Pi_-(A_{00} + A_{01}e^D - D) + \\ +\Pi_+(A_{10} + A_{11}e^D - De^D), \tag{13}$$

здесь Π_-, Π_+ — матрицы операторов проектирования в подпространства $L_-(Q)$, $L_+(Q)$.

II. Отображения Q, C, A_0, A_1 представимы в виде

$$Q(t,y) = Q_0(y), \; C(t,y) = Dy,$$

$$A_0(x,y) = A_{00}x + A_{01}y, \; A_1(x,y) = A_{10}x + A_{11}y,$$

где $Q_0(\lambda y) \equiv \lambda^m Q_0(y)$, $m > 1$, автономная система $u' = Q_0(u)$ не имеет ненулевых ограниченных решений, вращение $\gamma(Q_0)$ конечномерного поля $Q_0 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ на единичной сфере S^{n-1} отлично от нуля, D, A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11} - квадратные матрицы порядка n, матрица $F = A_{00} + A_{01}e^D - D$ невырождена, и имеет место равенство

$$A_{00} + A_{01}e^D - D = A_{10} + A_{11}e^D - De^D.$$

Если выполнено условие I, то имеем:

$$(Q, C, A_0, A_1), (\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1) \in \mathbf{P}_m,$$
$$(Q, C, A_0, A_1) \sim (\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1),$$

где $\tilde{Q}(t,y) = |y|^{m-1} Jy$, $\tilde{C}(t,y) = 0$, $\tilde{A}_0(x,y) = Ex$, $\tilde{A}_1(x,y) = Ex$. Действительно, для отображений Q, C, A_0, A_1, представимых в виде (11), (12), включение $(Q, C, A_0, A_1) \in \mathbf{P}_m$ равносильно условию $\det E \neq 0$, где матрица E определяется формулой (13). Для (Q, C, A_0, A_1), $(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$ имеем $\tilde{E} = E$, откуда следует (Q, C, A_0, A_1), $(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1) \in \mathbf{P}_m$. Для доказательства гомотопности (Q, C, A_0, A_1) и $(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$ построим следующее семейство четверок $(Q(\cdot,\cdot,\lambda)$, $C(\cdot,\cdot,\lambda)$, $A_0(\cdot,\cdot,\lambda)$, $A_1(\cdot,\cdot,\lambda))$, $0 \le \lambda \le 1$, где

$$Q(t,y,\lambda) = |y|^{m-1} Jy, \quad C(t,y,\lambda) = (1-\lambda)Dy,$$

$$A_0(x,y,\lambda) = A_{00}(\lambda)x + A_{01}(\lambda)y,$$

$$A_1(x,y,\lambda) = A_{10}(\lambda)x + A_{11}(\lambda)y,$$

$$A_{01}(\lambda) = (1-\lambda)A_{01}, \quad A_{11}(\lambda) = (1-\lambda)A_{11},$$

$$A_{00}(\lambda) + A_{01}(\lambda)e^{(1-\lambda)D} - (1-\lambda)D =$$

$$= A_{00} + A_{01}e^D - D,$$

$$A_{10}(\lambda) + A_{11}(\lambda)e^{(1-\lambda)D} - (1-\lambda)De^{(1-\lambda)D} =$$

$$= A_{00} + A_{01}e^D - De^D.$$

При каждом $\lambda \in [0,1]$ имеем $E(\lambda) = E$, где

$$E(\lambda) = \Pi_-(A_{00}(\lambda) + A_{01}(\lambda)e^{(1-\lambda)D} - (1-\lambda)D) + \\ +\Pi_+(A_{10}(\lambda) + A_{11}(\lambda)e^{(1-\lambda)D} - (1-\lambda)De^{(1-\lambda)D}).$$

Следовательно, $(Q(\cdot,\cdot,\lambda), C(\cdot,\cdot,\lambda), A_0(\cdot,\cdot,\lambda), A_1(\cdot,\cdot,\lambda)) \in \mathbf{P}_m$, $\lambda \in [0,1]$. Далее, четверка $(Q(\cdot,\cdot,1)$, $C(\cdot,\cdot,1)$, $A_0(\cdot,\cdot,1)$, $A_1(\cdot,\cdot,1))$ линейно гомотопируется к четверке $(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$.

Аналогичным образом, в случае выполнения условия II имеем

$$(Q, C, A_0, A_1), (\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1) \in \mathbf{P}_m,$$
$$(Q, C, A_0, A_1) \sim (\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1),$$

где $\tilde{Q}(t,y) = Q_0(y)$, $\tilde{C}(t,y) = 0$, $\tilde{A}_0(x,y) = Fx$, $\tilde{A}_1(x,y) = Fx$. Гомотопию можно построить следующими формулами:

$$Q(t,y,\lambda) = Q_0(y), \quad C(t,y,\lambda) = (1-\lambda)Dy,$$
$$A_0(x,y,\lambda) = A_{00}(\lambda)x + A_{01}(\lambda)y,$$
$$A_1(x,y,\lambda) = A_{10}(\lambda)x + A_{11}(\lambda)y,$$
$$A_{01}(\lambda) = (1-\lambda)A_{01}, \; A_{11}(\lambda) = (1-\lambda)A_{11},$$
$$A_{00}(\lambda) + A_{01}(\lambda)e^{(1-\lambda)D} - (1-\lambda)D = F,$$
$$A_{10}(\lambda) + A_{11}(\lambda)e^{(1-\lambda)D} - (1-\lambda)De^{(1-\lambda)D} = F.$$

Из результатов работы [14] вытекает, что в условиях I и II для четверки $(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1) \in \mathbf{P}_m$ вращение вполне непрерывного векторного поля, порожденного краевой задачей, на сферах больших радиусов пространства $C^1([0,1];R^n)$ равно $\gamma(\tilde{Q})\gamma(\tilde{A}_0)$. Следовательно, так как $\gamma(\tilde{Q})\gamma(\tilde{A}_0) \neq 0$, краевая задача (7), (8) разрешима. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнено одно из условий I и II. Тогда краевая задача (7), (8) разрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мухамадиев Э.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Докл. АН СССР. —1970. — Т. 194, № 3. —С. 510—513.

2. *Мухамадиев Э.* К теории ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Дифферен. уравнения. — 1974. — Т. 10, № 4. — С. 635—646.

3. *Мухамадиев Э.* О периодических и ограниченных решениях систем двух нелинейных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Докл. АН Тадж. ССР. — 1976. — Т. 19, № 3. —С. 3—6.

4. *Мухамадиев Э.* Об одной формуле для вычисления вращения векторных полей / Э. Мухамадиев // Докл. АН Тадж. ССР. — 1977. — Т. 20, № 5. — С. 11—14.

5. *Миллионщиков В. М.* Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений / В. М. Миллионщиков // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 161, № 1. — С. 43—44.

6. *Массера Ж. Л.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Ж. Л. Массера, Ж. Шеффер. — М.: Мир, 1969. — 712 с.

7. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Наука, 1966. — 331 с.

8. *Красносельский М. А.* Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М.: Наука, 1975. — 512 с.

9. *Байзаев С.* Принцип максимума и теоремы существования ограниченных решений нелинейных эллиптических систем / С. Байзаев // Докл. АН Тадж. ССР. — 1982. — Т. 25, № 9. — С. 3—7.

10. *Мухамадиев Э.* Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Докл. РАН. — 1996. — Т. 351, № 5. — С. 596—598.

11. *Мухамадиев Э.* Гомотопический тип пространства однородных динамических систем / Э. Мухамадиев // Нелинейный анализ и смежные вопросы. Труды Института математики НАН Беларуси, Минск, 1999. — Т. 2. — С. 119—127.

12. *Мухамадиев Э.* К теории двухточечных краевых задач для ОДУ второго порядка / Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов // Дифферен. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 10. — С. 1372—1381.

13. *Наимов А. Н.* К теории двухточечных краевых задач для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Н. Наимов // Докл. АН Респ. Тадж. — 1998.—Т. 41, № 9. — С. 30—34.

14. *Наимов А. Н.* О вычислении вращения одного вполне непрерывного векторного поля / А. Н. Наимов // Докл. АН Респ. Тадж. — 1998. — Т. 41, № 10. — С. 56—61.

15. *Наимов А. Н.* Об априорной оценке и разрешимости третьей двухточечной краевой задачи / А. Н. Наимов, М. В. Быстрецкий // Дифферен. уравнения.— 2010. — Т. 46, № 2. — С. 280—284.

Быстрецкий Михаил Васильевич — аспирант, Вологодский государственный педагогический университет

Тел.: 8-921-714-73-96

E-mail: pmbmv@bk.ru

Наимов Алижон Набиджанович — д. ф.-м. н., профессор, Вологодский государственный-технический университет

Тел.: 8-921-120-22-73

E-mail: nan67@rambler.ru

Bystretsky Mikhail Vasilievich — post-graduate student, Vologda State Pedagogical University

Tel.: 8-921-714-73-96

E-mail: pmbmv@bk.ru

Naimov Alizhon Nabidzhanovich — professor, Vologda State Technical University

Tel.: 8-921-120-22-73

E-mail: nan67@rambler.ru