УДК 517.984

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ*

М. Ш. Бурлуцкая

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 23.05.2011 г.

Аннотация. В данной работе получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций простейшего функционально-дифференциального оператора с инволюцией. Найденные формулы могут быть использованы, например, при решении смешанных задач с инволюцией.
Ключевые слова: инволюция, функционально-дифференциальный оператор, асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака.

Abstract. In this paper are received asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions of the simplest functional-differential operator with involution. The found formulas can be used, for example, when solving mixed problems with involution.
Key words: involution, functional differential operator, the asymptotic form of eigenvalues and eigenfunctions, Dirac system.

Рассматривается простейший функционально-дифференциальный оператор с инволюцией L, порожденный дифференциальным выражением:

$$(Ly)(x) = y'(1-x) + q(x)y(x),$$

где $q \in C^1[0,1]$, областью определения которого является совокупность всех $y \in C^1[0,1]$, удовлетворяющих краевому условию $y(0) = 0$. Такие операторы и операторы с инволюцией более общего вида возникают при исследовании большого класса спектральных задач (см. работы [1], [2] и библиографию в них).

В данной работе найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора L. Полученные формулы могут быть использованы, например, при решении смешанных задач с инволюцией, порождающих краевые задачи для таких операторов (см. [3]).

1. Рассмотрим спектральную задачу для оператора L :

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{1}$$

$$y(0) = 0. \tag{2}$$

Приведем задачу (1)—(2) к задаче в пространстве непрерывно-дифференцируемых вектор-функций размерности 2. Заменим в (1) x на $1-x$:

$$y'(x) + q(1-x)y(1-x) = \lambda y(1-x). \tag{3}$$

Положим $z(x) = \big(z_1(x), z_2(x)\big)^T$ (T — знак транспонирования), где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$. Тогда из (1) и (3) получим систему

$$-z_2'(x) + q(x)z_1(x) = \lambda z_1(x),$$

$$z_1'(x) + q(1-x)z_2(x) = \lambda z_2(x),$$

которая в векторно-матричной форме имеет вид

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{4}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x) \end{pmatrix}$, и $z_1(x) = z_2(1-x)$. Более того, справедливо следующее утверждение [3, Лемма 12].

Лемма 1. *Число λ является собственным значением, а $y(x)$ собственной функцией краевой задачи (1)-(2) тогда и только тогда, когда $z(x) = \big(z_1(x), z_2(x)\big)^T = \big(y(x), y(1-x)\big)^T$ является ненулевым решением системы (4) с краевыми условиями*

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-4383.2010.1).

$$z_1(0)=0, \quad z_1(1/2)=z_2(1/2). \qquad (5)$$

Лемма 2. *Замена* $z=\Gamma v$, *где* $v=\left(v_1,v_2\right)^T$, $\Gamma=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$ *приводит систему (4) к виду:*

$$v'(x)+P_1(x)v(x)=\lambda D^{-1}v(x), \qquad (6)$$

где $D^{-1}=\operatorname{diag}(-i,i)$, $P_1(x)=\left(p_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{2}$,

$p_{11}(x)=-p_{22}(x)=-\frac{i}{2}\left[q(x)+q(1-x)\right]$,

$p_{12}(x)=p_{21}(x)=\frac{1}{2}\left[-q(x)+q(1-x)\right]$.

Доказательство. Матрица Γ приводит B к диагональному виду с помощью преобразования $\Gamma^{-1}B\Gamma=D$, где $D=\operatorname{diag}(i,-i)$. Поэтому заменив в (4) $z=\Gamma v$, получим (6), где $P_1(x)=D^{-1}\Gamma^{-1}P(x)\Gamma$. Компоненты $P_1(x)$ вычисляются непосредственно. □

Лемма 3. *Замена* $v_1(x)=h_1(x)u_1(x)$, $v_2(x)=h_2(x)u_2(x)$, $h_k(x)=e^{-\int_0^x p_{kk}(t)\,dt}$, $k=1{,}2$ *приводит систему (6) к виду*

$$u'(x)+Q(x)u(x)=\lambda D^{-1}u(x), \qquad (7)$$

где $Q(x)=\begin{pmatrix}0 & q_2(x)\\ q_1(x) & 0\end{pmatrix}$,

$$q_1(x)=\frac{1}{2}\left[q(1-x)-q(x)\right]e^{i\left[\int_0^x q(t)\,dt+\int_{1-x}^1 q(t)\,dt\right]},$$

$$q_2(x)=\frac{1}{2}\left[q(1-x)-q(x)\right]e^{-i\left[\int_0^x q(t)\,dt+\int_{1-x}^1 q(t)\,dt\right]}.$$

Доказательство. Записывая (6) в покомпонентном виде и выполняя указанную замену, придем к системе

$$h_1(x)u_1'(x)+p_{12}(x)h_2(x)u_2(x)=-\lambda i h_1(x)u_1(x),$$

$$h_2(x)u_2'(x)+p_{21}(x)h_1(x)u_1(x)=\lambda i h_2(x)u_2(x),$$

откуда, учитывая, что $h_1(x)=h_2^{-1}(x)$, получим

$$u_1'(x)+p_{12}(x)h_2^2(x)u_2(x)=-\lambda i u_1(x),$$

$$u_2'(x)+p_{21}(x)h_1^2(x)u_1(x)=\lambda i u_2(x),$$

Вычисляя $h_k^2(x)$, придем к утверждению леммы. □

Замечание. Легко проверить, что функции $h_k(x)$ удовлетворяют соотношению

$$h_1(x)=e^{i\int_0^1 q(t)\,dt}h_2(1-x). \qquad (8)$$

Для удобства обозначим в (7) $\mu=-\lambda i$. Тогда $\lambda D=\mu\widetilde{D}$, где $\widetilde{D}=\operatorname{diag}(1,-1)$ и уравнение (7) примет вид:

$$u'(x)+Q(x)u(x)=\mu\widetilde{D}u(x). \qquad (9)$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (9)

Уравнение (9) представляет собой двумерное уравнение Дирака. Спектральные свойства подобных уравнений активно исследуются (см. [4]—[8]). Для общего решения уравнения (9) известна следующая асимптотическая формула

$$u(x,\mu)=U(x,\mu)e^{\mu\widetilde{D}x}c, \qquad (10)$$

где $U(x,\mu)=E+O\left(\mu^{-1}\right)$, E — единичная матрица 2×2, $c=\left(c_1,c_2\right)^T$ — произвольный вектор, матрица-функция $O\left(\mu^{-1}\right)$, регулярна* в полуплоскостях $Re\mu\ge 0$ и $Re\mu\le 0$ при $|\mu|$ достаточно больших. В [4] приводится описание нового элементарного метода получения этой формулы, предложенный А.П. Хромовым. Этот метод позволяет достаточно просто найти уточненные асимптотические формулы для решения уравнения (9), а именно, справедливо утверждение.

Теорема 1. Если $Re\,\mu\ge 0$, $q_j\in C^1[0{,}1]$, то для общего решения уравнения (9) имеем следующую асимптотическую формулу:

$$u(x,\mu)=U(x,\mu)e^{\mu\widetilde{D}x}c,$$

где $U(x,\mu)=\left(u_{ij}(x,\mu)\right)_{i,j=1,2}$, $c=\left(c_1,c_2\right)^T$ — произвольный вектор и

$$u_{11}(x,\mu)=1+\frac{1}{2\mu}\int_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{12}(x,\mu)=\frac{1}{2\mu}\left(q_2(x)-q_2(1)e^{-2\mu(1-x)}+\right.$$

$$\left.+\int_x^1 e^{2\mu(x-t)}q_2'(t)\,dt\right)+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{21}(x,\mu)=-\frac{1}{2\mu}\left(q_1(x)-q_1(0)e^{-2\mu x}-\right.$$

$$\left.-\int_0^x e^{-2\mu(x-t)}q_1'(t)\,dt\right)+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{22}(x,\mu)=1-\frac{1}{2\mu}\int_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right).$$

---

* Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.

Доказательство. При доказательстве теоремы будут использоваться оценки, справедливые при $Re\,\mu \geq 0$ и $q \in C^1[0,1]$, легко следующие из формулы интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\int_t^x e^{-2\mu\tau} q(\tau)\,d\tau = O\left(\mu^{-1} e^{-2\mu t}\right),\\ \int_t^x e^{2\mu\tau} q(\tau)\,d\tau = O\left(\mu^{-1} e^{2\mu x}\right).\end{gathered} \tag{11}$$

Уравнение (9) в покомпонентной записи имеет вид:

$$u_1'(x) - \mu u_1(x) = -q_2(x) u_2(x), \tag{12}$$

$$u_2'(x) + \mu u_2(x) = -q_1(x) u_1(x). \tag{13}$$

Проинтегрировав (12), (13), и выполнив замену $w_1(x) = u_1(x)e^{-\mu x}$, $w_2(x) = u_2(x)e^{\mu x}$, получим

$$w_1(x) = c_1 - \int_0^x e^{-2\mu t} q_2(t) w_2(t)\,dt, \tag{14}$$

$$w_2(x) = c_2 - \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) w_1(t)\,dt. \tag{15}$$

Подставим (15) в (14):

$$\begin{gathered}w_1(x) = c_1 - c_2 \int_0^x e^{-2\mu t} q_2(t)\,dt +\\ + \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) w_1(t)\,dt \int_t^x e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau.\end{gathered} \tag{16}$$

Положим $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Тогда, учитывая (11), получим $w_1(x) = 1 + O\left(\mu^{-1}\right)$.

Подставляя эту оценку в правую часть (16), получим

$$\begin{gathered}w_1(x) = 1 + \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt \int_t^x e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau +\\ + \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) O\left(\mu^{-1}\right) dt \int_t^x e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau.\end{gathered}$$

В силу (11) последнее слагаемое имеет оценку $O\left(\mu^{-2}\right)$. Так как

$$\begin{gathered}\int_t^x e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2\mu} e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\Big|_t^x +\\ + \frac{1}{2\mu}\int_t^x e^{-2\mu\tau} q_2'(\tau)\,d\tau,\end{gathered}$$

то

$$\begin{gathered}w_1(x) = 1 + \frac{1}{2\mu}\int_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt -\\ - \frac{1}{2\mu}\int_0^x e^{2\mu(t-x)} q_1(t) q_2(t)\,dt +\\ + \frac{1}{2\mu}\int_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt \int_t^x e^{-2\mu\tau} q_2'(\tau)\,d\tau + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) =\\ = 1 + \frac{1}{2\mu}\int_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right).\end{gathered}$$

Подставляя теперь это выражение в (15) получим

$$\begin{gathered}w_2(x) = -\int_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\left[1 + \frac{1}{2\mu}\int_0^t q_1(\tau) q_2(\tau)\,d\tau +\right.\\ \left. + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right] dt == -\int_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt -\\ - \frac{1}{2\mu}\int_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt \int_0^t q_1(\tau) q_2(\tau)\,d\tau + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) e^{2\mu x} =\\ = -\frac{1}{2\mu}\left[e^{2\mu x} q_1(x) - q_1(0) -\right.\\ \left. - \int_0^x e^{2\mu t} q_1'(t)\,dt\right] + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) e^{2\mu x}.\end{gathered}$$

Отсюда для решений системы (12)—(13) имеем

$$\begin{gathered}u_1(x) = w_1(x) e^{\mu x} =\\ = \left(1 + \frac{1}{2\mu}\int_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right) e^{\mu x},\\ u_2(x) = w_2(x) e^{-\mu x} =\\ -\frac{1}{2\mu}\left[q_1(x) - q_1(0) e^{-2\mu x} - \int_0^x e^{2\mu(t-x)} q_1'(t)\,dt\right] e^{\mu x} +\\ + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) e^{\mu x}.\end{gathered} \tag{17}$$

Положим теперь в (14)—(15) $c_1 = \int_0^1 e^{-2\mu t} q_2(t) w_2(t)\,dt$, $c_2 = 1$ (см. [4]). Подставляя (14) в (15), получим

$$w_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt \int_t^1 e^{-2\mu\tau} q_2(\tau) w_2(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

откуда $w_2(x) = 1 + O(\mu^{-1})$. Подставим эту оценку снова в правую часть (18):

$$w_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt \times$$

$$\times \int_t^1 e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau + O(\mu^{-2}).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt \int_t^1 e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^x e^{-2\mu t} q_2(t)\,dt \int_0^t e^{2\mu\tau} q_1(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^x e^{-2\mu t} q_2(t) \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[q_1(t) e^{2\mu t} - q_1(0) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\mu} \int_0^t e^{2\mu\tau} q_1'(\tau)\,d\tau \right\} dt + O(\mu^{-2}) =$$

$$= \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

получим:

$$w_2(x) = 1 - \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \quad (19)$$

Подставим (19) в (14):

$$w_1(x) = \int_x^1 e^{-2\mu t} q_2(t) w_2(t)\,dt = \int_x^1 e^{-2\mu t} q_2(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{2\mu} \int_x^1 e^{-2\mu t} q_2(t)\,dt \int_0^t q_1(\tau) q_2(\tau)\,d\tau + \quad (20)$$

$$+ O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \int_x^1 e^{-2\mu t} q_2(t)\,dt.$$

Выполняя в первом интеграле интегрирование по частям, во втором — замену порядка интегрирования и применяя оценки (11) , получим из (20)

$$w_1(x) = \frac{1}{2\mu} \left[q_2(x) e^{-2\mu x} - q_2(1) e^{-2\mu} + \right.$$

$$\left. + \int_x^1 e^{-2\mu t} q_2'(t)\,dt \right] + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) e^{-2\mu x}. \quad (21)$$

Таким образом из (21) и (19):

$$u_1(x) = w_1(x) e^{\mu x} =$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left[q_2(x) - q_2(1) e^{2\mu(x-1)} + \int_x^1 e^{2\mu(x-t)} q_2'(t)\,dt \right] e^{-\mu x} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) e^{-\mu x},$$

$$u_2(x) = w_2(x) e^{-\mu x} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \right) e^{-\mu x}.$$

Отсюда и из (17) следует утверждение теоремы. □

Аналогичный результат может быть получен при $Re\mu \le 0$.

Всюду далее для определенности будем считать, что $Re\mu \ge 0$, соответственно $Im\lambda \ge 0$ (противоположный случай рассматривается аналогично).

3. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ (4)—(5)

По леммам 2, 3 для решения системы (4) имеем $z(x,\lambda) = \Gamma H(x) u(x,\mu)$, где $H(x) = \mathrm{diag}(h_1(x), h_2(x))$, $\mu = -\lambda i$ и $u(x,\mu)$ — решение системы (9). Поэтому

$$\begin{aligned} z_1(x) &= c_1 e^{\mu x} \left[h_1(x) u_{11}(x) - i h_2(x) u_{21}(x) \right] + \\ &\quad + c_2 e^{-\mu x} \left[h_1(x) u_{12}(x) - i h_2(x) u_{22}(x) \right], \\ z_2(x) &= c_1 e^{\mu x} \left[-i h_1(x) u_{11}(x) + h_2(x) u_{21}(x) \right] + \\ &\quad + c_2 e^{-\mu x} \left[-i h_1(x) u_{12}(x) + h_2(x) u_{22}(x) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

(здесь для удобства аргументы λ и μ у соответствующих функций опущены). Из краевых условий (5) получим следующее уравнение для собственных значений

$$\begin{vmatrix} u_{11}(0) - i u_{21}(0) & u_{12}(0) - i u_{22}(0) \\ e^{\frac{\mu}{2}} \begin{bmatrix} h_2\left(\frac{1}{2}\right) u_{21}\left(\frac{1}{2}\right) - \\ -h_1\left(\frac{1}{2}\right) u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} & e^{-\frac{\mu}{2}} \begin{bmatrix} h_2\left(\frac{1}{2}\right) u_{21}\left(\frac{1}{2}\right) - \\ -h_1\left(\frac{1}{2}\right) u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

Для получения простейших асимптотических оценок собственных значений используем сначала u_{ij} из (10). Обозначая $[1] = 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)$, имеем

$$u_{kk}(x,\mu) = [1], \; u_{kj}(x,\mu) = O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad (24)$$
$$k, j = 1, 2, k \ne j.$$

Поэтому уравнение (23) примет вид

$$\begin{vmatrix} [1] & -i[1]+O\left(\dfrac{1}{\mu}\right) \\ e^{\frac{\mu}{2}}\left[-h_1\left(\dfrac{1}{2}\right)[1]+O\left(\dfrac{1}{\mu}\right)\right] & e^{-\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\dfrac{1}{2}\right)[1]+O\left(\dfrac{1}{\mu}\right)\right] \end{vmatrix}=0,$$

или

$$e^{-\frac{\mu}{2}}h_2\left(\frac{1}{2}\right)[1]-ie^{\frac{\mu}{2}}h_1\left(\frac{1}{2}\right)[1]=0. \qquad (25)$$

Из соотношения (8) имеем

$$\frac{h_2(1/2)}{h_1(1/2)}=\frac{h_2(1/2)}{h_2(1/2)}e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}=e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}.$$

Поэтому из (25) получим

$$e^{\mu}=-ie^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}[1]=e^{-\pi i/2-2\pi ni-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}e^{O(1/\mu)},$$

откуда

$$\mu_n=-\left(\frac{\pi}{2}+\int\limits_0^1 q(t)\,dt\right)i-2\pi ni+O(1/\mu), \quad (26)$$

и $O\left(\frac{1}{\mu}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$. Вычисляя отсюда $\lambda_n=-\mu_n/i$, придем к следующему утверждению:

Теорема 2. *Для собственных значений λ_n задачи (4)—(5) имеют место асимптотические формулы:*

$$\lambda_n=\lambda_n^0+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{где } \lambda_n^0=2\pi n+a, \quad (27)$$

$a=\pi/2+\int\limits_0^1 q(t)\,dt,\ n=\pm n_0,\pm(n_0+1),\ldots,$ *и* n_0 *— некоторое достаточно большое натуральное число.*

Для того чтобы найти уточненные оценки для собственных значений, воспользуемся в уравнении (23) значениями $u_{ij}(1/2)$ и $u_{ij}(0)$, вычисленными по уточненным формулам из теоремы 1 при $\mu=\mu_n$. При этом всюду далее через α будем обозначать различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), через α_n такие константы, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$.

Лемма 4. *Для любого целого числа k, любой функции $s\in C[0,1]$ и $p=\pm1$ имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$e^{k\mu_n}=\alpha+O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (28)$$

$$\int\limits_0^{1/2}e^{2p\mu_n t}s(t)\,dt=\alpha_n+O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (29)$$

$$\int\limits_0^{1}e^{2p\mu_n t}s(t)\,dt=\alpha_n+O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (30)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что $e^{O(1/n)}=1+O\left(\frac{1}{n}\right)$, получим

$$e^{k\mu_n}=e^{-2\pi kni-kai+O(1/n)}=e^{-kai}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

откуда следует (28). Далее

$$\int\limits_0^{1/2}e^{2\mu_n t}s(t)\,dt=\int\limits_0^{1/2}e^{-4\pi nit}e^{-2ait}e^{O(1/n)}s(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{1/2}e^{-4\pi nit}e^{-2ait}s(t)\,dt+$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\right)\int\limits_0^{1/2}e^{-4\pi nit}e^{-2ait}s(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1}e^{-2\pi nit}e^{-ait}s\left(\frac{t}{2}\right)dt+O\left(\frac{1}{n}\right)=\alpha_n+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Здесь первое слагаемое, обозначенное α_n, есть коэффициент Фурье непрерывной функции $b(x)=\frac{1}{2}e^{-aix}s\left(\frac{x}{2}\right)$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi nix}\}$ на отрезке $[0,1]$ (в силу неравенства Бесселя $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$), а во втором интегральном слагаемом использовали ограниченность подынтегральных функций. Аналогично

$$\int\limits_0^{1}e^{2\mu_n t}s(t)\,dt=\int\limits_0^{1}e^{-4\pi nit}e^{-2ait}s(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right)=$$

$$=c_{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\{c_{2n}\}$ — подпоследовательность коэффициентов Фурье непрерывной функции $b(x)=e^{-2aix}s(x)$, и следовательно выполняется (30).

Аналогично доказываются (29), (30) при $p=-1$. □

Лемма 5. *Для значений функций $u_{ij}(x,\mu_n)$ из теоремы 1 справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$u_{11}(0)=1+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{12}(0)=\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{22}(0)=1+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{21}(0)=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{11}\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{12}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{22}\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{21}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(аргумент μ_n для удобства опускаем).

Доказательство. Оценки для $u_{11}(0)$, $u_{22}(0)$ очевидны. Далее, учитывая лемму 4 и оценку

$$\frac{1}{\mu_n}=\frac{1}{2\pi ni}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}=$$
$$=\frac{1}{2\pi ni}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

имеем:

$$u_{21}(0)=-\frac{1}{2\mu_n}\left\{q_1(0)-q_1(0)\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{12}(0)=\frac{1}{2\mu_n}\left\{q_2(0)-q_2(1)e^{-2\mu_n}+\right.$$
$$\left.+\int_0^1 e^{-2\mu_n t}q_2'(t)\,dt\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{11}\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2\mu_n}\int_0^{1/2} q_1(t)q_2(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{22}\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{21}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2\mu_n}\left\{q_1(\frac{1}{2})-q_1(0)e^{-\mu_n}-\right.$$
$$\left.-e^{-\mu_n}\int_0^{1/2} e^{2\mu_n t}q_1'(t)\,dt\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$u_{12}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\mu_n}\left\{q_2\left(\frac{1}{2}\right)-q_2(1)e^{-\mu_n}+\right.$$
$$\left.+e^{\mu_n}\int_{1/2}^1 e^{-2\mu_n t}q_2'(t)\,dt\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(в последнем выражении интеграл $\int\limits_{1/2}^{1}$ заменой $t=\tau+1/2$ сводится к интегралу (29)). □

Теорема 3. *Для собственных значений λ_n задачи (4)—(5) имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad(31)$$

где $n=\pm n_0,\pm(n_0+1),\ldots;$ λ_n^0 определяется также, как и в теореме 2.

Доказательство. Используя в уравнении (23) оценки из леммы 5, получим

$$e^{-\frac{\mu}{2}}h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$$
$$=ie^{\frac{\mu}{2}}h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

и следовательно,

$$e^{\mu}=-ie^{-i\int_0^1 q(t)\,dt}\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$$
$$=e^{-\pi/2i-2\pi ni-i\int_0^1 q(t)\,dt}e^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Поэтому для μ_n имеем следующие уточненные асимптотические формулы:

$$\mu_n=-\lambda_n^0 i+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда следует (31). □

4. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ (1)—(2).

В силу леммы 1 собственная функция, отвечающая значению λ_n, есть $y_n(x)=z_1(x,\lambda_n)$, где $z_1(x,\lambda_n)$ определена соотношением из (22), и следовательно

$$\begin{gathered} y_n(x) = c_1 p[h_1(x)e^{-\lambda_n ix}u_{11}(x,\mu_n) - \\ -ih_2(x)e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x,\mu_n)] + \\ + c_2[h_1(x)e^{\lambda_n ix}u_{12}(x,\mu_n) - \\ -ih_2(x)e^{\lambda_n ix}u_{22}(x,\mu_n)]. \end{gathered} \tag{32}$$

Теорема 4. *Для собственных функций оператора L имеет место асимптотическая формула*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$$

где $y_n^0(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)}h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)$, а функция $h_2(x)$ из леммы 3.

Доказательство. Воспользуемся оценками (24) и полученной из них асимптотикой (27) для собственных значений.

Из (32) и краевого условия $y_n(0)=0$ имеем

$$\begin{gathered} c_1\left[u_{11}(0) - iu_{21}(0)\right] + c_2\left[u_{12}(0) - iu_{22}(0)\right] = \\ = c_1[1] - ic_2[1] = 0, \end{gathered}$$

откуда $c_1 = c_2 i[1]$. Положим $c_2 = 1$, тогда $c_1 = i[1]$. Так как $e^{-\lambda_n ix} = e^{-\lambda_n^0 ix}[1]$, $e^{\lambda_n ix} = e^{\lambda_n^0 ix}[1]$, то из (32) и (24) получим

$$\begin{gathered} y_n(x) = i[1]e^{-\lambda_n ix}\left[h_1(x)[1] - ih_2(x)O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right] + \\ + e^{\lambda_n ix}\left[h_1(x)O\left(\tfrac{1}{n}\right) - ih_2(x)[1]\right] = \\ = ie^{-\lambda_n^0 ix}[1]\left[h_1(x) + O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right] + \\ + e^{\lambda_n^0 ix}[1]\left[-ih_2(x) + O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right] = \\ = i\left(e^{-\lambda_n^0 ix}h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)\right) + O\left(\tfrac{1}{n}\right). \end{gathered}$$

Положим $y_n^0(x) = i\left(e^{-\lambda_n^0 ix}h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)\right)$. Из (8) следует, что

$$\begin{gathered} h_1(x) = e^{-\pi/2i}e^{\pi/2i + i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}h_2(1-x) = \\ = -ie^{ai}h_2(1-x) = -ie^{\lambda_n^0 i}h_2(1-x). \end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered} y_n^0(x) = e^{-\lambda_n^0 ix}e^{\lambda_n^0 i}h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x) = \\ = e^{\lambda_n^0 i(1-x)}h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x), \end{gathered}$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Чтобы получить более тонкие оценки для собственных функций, используем уточненные оценки (31) для собственных значений и асимптотики из теоремы 1.

Теорема 5. *Для собственных функций оператора L имеет место уточненная асимптотическая формула*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $y_n^0(x)$ определяется также как в теореме 4, и

$$\begin{gathered} \Omega_{1n}(x) = \frac{1}{n}\Big[b(x)e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)e^{\lambda_n^0 ix} + \\ + b(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 ix}\Big], \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \Omega_{2n}(x) = \frac{1}{n}\Bigg[b(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\left(\tfrac{x+t}{2}\right)dt + \\ + b(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\left(\tfrac{x-t}{2}\right)dt + b(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\left(\tfrac{x+t}{2}\right)dt + \\ + b(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\left(\tfrac{x-t}{2}\right)dt\Bigg], \end{gathered}$$

(через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора).

Доказательство. Из (32) и краевого условия $y_n(0)=0$ имеем уравнение

$$\begin{gathered} c_1\left[u_{11}(0,\mu_n) - iu_{21}(0,\mu_n)\right] + \\ + c_2\left[u_{12}(0,\mu_n) - iu_{22}(0,\mu_n)\right] = 0, \end{gathered} \tag{33}$$

или, используя оценки из леммы 5,

$$c_1\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + c_2\left[-i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 0,$$

откуда

$$c_1 = ic_2\left[1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \tag{34}$$

Так как $e^{\pm\lambda_n ix} = e^{\pm\lambda_n^0 ix}\left(1 + \frac{\alpha}{n}x + \frac{\alpha_n}{n}x\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то по теореме 1, получим:

$$\begin{gathered} e^{-\lambda_n ix}u_{11}(x,\mu_n) = e^{-\lambda_n^0 ix}\left(1 + \frac{\alpha}{n}x + \frac{\alpha_n}{n}x\right)\times \\ \times\left(1 + \frac{b(x)}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ = e^{-\lambda_n^0 ix}\left(1 + \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha_n}{n}b(x)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{gathered} \tag{35}$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{22}(x,\mu) = e^{\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{\alpha}{n}x+\frac{\alpha_n}{n}x\right)\times \\ \times\left(1+\frac{b(x)}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)= \\ = e^{\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha_n}{n}b(x)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{36}$$

$$e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x,\mu) = e^{-\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{\alpha}{n}x+\frac{\alpha_n}{n}x\right)\times \\ \times\left(\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha}{n}e^{2\lambda_n^0 ix}+ \right. \\ \left. +\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{2\lambda_n^0 i(x-t)}q_1'(t)\,dt\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)= \\ =\frac{b(x)}{n}e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}e^{\lambda_n^0 ix}+ \\ +\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)}q_1'(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{12}(x,\mu) = e^{\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{\alpha}{n}x+\frac{\alpha_n}{n}x\right)\times \\ \times\left(\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha}{n}e^{2\lambda_n^0 i(1-x)}+ \right. \\ \left. +\frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{-2\lambda_n^0 i(x-t)}q_2'(t)\,dt\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)= \\ =\frac{b(x)}{n}e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}e^{-\lambda_n^0 ix}+ \\ +\frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее

$$\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)}q_1(t)\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^x e^{\lambda_n^0 i\tau}q_1'\left(\frac{x-\tau}{2}\right)d\tau= \\ =\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1(\frac{x+t}{2})\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt,$$

$$\int\limits_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt=e^{-\lambda_n^0 ix}\int\limits_0^1 e^{2\lambda_n^0 it}q_2'(t)\,dt- \\ -\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt= \\ =\alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt.$$

Поэтому

$$e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x,\mu)=\frac{b(x)}{n}e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}e^{\lambda_n^0 ix}+ \\ +\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt+ \\ +\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{37}$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{12}(x,\mu)=\frac{b(x)}{n}e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}e^{-\lambda_n^0 ix}+ \\ +\frac{\alpha_n}{n}e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt+ \\ +\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{38}$$

Полагая $c_2 = 1$ и подставляя (34)—(38) в (32), получим утверждение теоремы. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев А. А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом / А. А. Андреев // Труды 2-го межд. семинара "Диффер. уравнения и их приложения". — Самара, 1998. — С. 5—18.

2. *Бурлуцкая М. Ш.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов, А. С. Луконина, А. П. Хромов // Докл. РАН. — 2007. — Т. 414. № 4. — С. 443—446.

3. *Бурлуцкая М. Ш.* О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. : Физика. Математика. — Воронеж, 2010. — № 2. — С. 26—33.

4. *Хромов А. П.* Об асимптотике решений уравнения Дирака / А. П. Хромов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронеж. зимн. мат. школы. — Воронеж, 2011. — С. 346—347.

5. *Митягин Б. С.* Сходимость разложений по собственным функциям оператора Дирака / Б. С. Митягин // Доклады Академии наук. — 2003. — Т. 393. № 4. — С. 456—459.

6. *Джаков П.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / П. Джаков, Б. С. Митягин // УМН. — 2006. — Т. 61. № 4. — С. 77—182.

7. *Баскаков А. Г.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 3—28.

8. *Дербушев А. В.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с краевым условием Дирихле / А. В. Дербушев // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Физика. Математика. — Воронеж, 2010. — № 2. — С. 61—72.

Бурлуцкая Мария Шаукатовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Тел.: (473) 242-44-20,

Burlutskaya Maria Shaukatovna, candidate of science, senior lecturer, Voronezh State University
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Tel.: (473) 242-44-20