

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АНИЗОТРОПИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю. С. Радченко, С. В. Миляев

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 6.09.2011 г.

**Аннотация.** В работе предложен метод определения анизотропии изображений на основе анализа двумерных спектров сигналов и спектральных плотностей мощности. Предложены интегральные характеристики анизотропии. Приведены результаты эксперимента на текстурах с различным направлением анизотропии, которые подтвердили применимость предложенного метода.

**Ключевые слова:** неоднородность изображения, текстура, интегральная мера анизотропии, преобразование Фурье, дискретное косинусное и чебышевское преобразование.

**Annotation.** In this paper we propose a novel method for estimating image anisotropy based on analysis of signal 2D-spectrum and spectral density. Integral characteristics of anisotropy are proposed. Provided experiments on real images with different directions of anisotropy proved usefulness of proposed methods.

**Key words:** image irregularity, texture, integral measure of anisotropy, Fourier transform, discrete cosine and Chebyshev transform.

**Введение.** Реальные изображения, содержащие границы фрагментов, контуры, разнообразные текстуры, являются анизотропными. Исследование анизотропии может быть самостоятельной задачей при обнаружении и распознавании текстур, объектов, границ фрагментов, так и вспомогательной задачей при адаптивной обработке изображений.

Как правило, анизотропия исследуется и оценивается в пиксельном пространстве изображения. Например, в [1, 2] строится корреляционный тензор градиента фрагментов изображений. В [3] исследуется специфический вид анизотропии — криволинейные трубчатые структуры. Однако оценка анизотропии путем анализа спектров фрагментов изображений в публикациях отсутствует, хотя ряд задач цифровой обработки изображений решается на основе анализа спектров. Знание частотной анизотропии помогает более эффективно использовать такие алгоритмы обработки изображений как оконное сглаживание эффекта Гиббса, прогноз спектральных компонент блоков при внутрикадровом кодировании, анизотропная фильтрация [4].

В данной статье предложено определение анизотропии фрагментов изображений на ос-

нове спектрального гармонического анализа Фурье, анализа преобразований DCT и GDCT блоков изображений.

**1. Анализ спектров анизотропных двумерных сигналов.** Пусть задан двумерный сигнал  $s(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ . Свойства сигнала по координатам  $(x, y)$  различные. В [1, 2] это отличие характеризуется компонентами градиента  $\nabla s(x, y)$ :  $\partial s(x, y) / \partial x$ ,  $\partial s(x, y) / \partial y$ . В данной работе предлагается другой подход. Количественной мерой, которая определяет характерную протяженность сигнала, является интервал корреляции, или в двумерном случае область корреляции. Построим двумерную автокорреляционную функцию (АКФ) сигнала

$$R(X, Y) = \frac{\int \int s(x, y) s(x + X, y + Y) dx dy}{\int \int (s(x, y))^2 dx dy}. \quad (1)$$

АКФ сигнала удовлетворяют соотношениям:  $R(-X, -Y) = R(X, Y)$ ,  $R(-X, 0) = R(X, 0)$ ,  $R(0, -Y) = R(0, Y)$ . Для АКФ имеет место пара преобразований

$$\begin{aligned} S(\omega_x, \omega_y) &= \\ &= \int \int R(X, Y) \exp[-j(X\omega_x + Y\omega_y)] dXdY, \end{aligned}$$

$$R(X, Y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \int S(\omega_x, \omega_y) \exp[j(X\omega_x + Y\omega_y)] d\omega_x d\omega_y. \quad (2)$$

Спектральная плотность мощности  $S(\omega_x, \omega_y) = |G(\omega_x, \omega_y)|^2$ , где спектр сигнала  $G(\omega_x, \omega_y) = \int \int s(x, y) \exp[-j(x\omega_x + y\omega_y)] dx dy$ .

В окрестности положения максимума  $\omega_x = 0, \omega_y = 0$  спектральная плотность  $S(\omega_x, \omega_y)$  имеет вид

$$S(\omega_x, \omega_y) \approx S_{00} - 0.5(S_{11}\omega_x^2 + S_{22}\omega_y^2 + 2S_{12}\omega_x\omega_y), \quad (3)$$

Где

$$\begin{aligned} S_{11} &= -\partial^2 S(\omega_x, \omega_y) / (\partial\omega_x)^2, \\ S_{22} &= -\partial^2 S(\omega_x, \omega_y) / (\partial\omega_y)^2, \\ S_{12} &= -\partial^2 S(\omega_x, \omega_y) / \partial\omega_x \partial\omega_y. \end{aligned} \quad (4)$$

Как видно из (3) спектральная плотность в окрестности максимума представляет собой квадратичную форму (в сечении – эллипс). Поворот осей с помощью преобразования

$$X = u \cos \theta - v \sin \theta \quad \Omega_u = \omega_x \cos \theta - \omega_y \sin \theta \quad (5)$$

$Y = u \sin \theta + v \cos \theta \quad \Omega_v = \omega_x \sin \theta + \omega_y \cos \theta$  приводит квадратичную форму (3) к каноническому виду [5]

$$S(\Omega_u, \Omega_v) = S_{00} - 0.5(\alpha^2 \Omega_u^2 + \beta^2 \Omega_v^2). \quad (6)$$

Здесь  $\theta$  – угол поворота, приводящий к канонической форме

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2S_{12}}{S_{11} - S_{22}}, \quad (7)$$

$\alpha^2 = \lambda_1, \beta^2 = \lambda_2$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  – корни уравнения

$$\begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Причем  $\lambda_1 + \lambda_2 = S_{11} + S_{22}, \lambda_1 \lambda_2 = S_{11} S_{22} - S_{12}^2$

На рис. 1а представлен сигнал в виде прямоугольника, на рис. 1б изображена его АКФ. На рис. 1в показана форма спектральной плотности мощности, на рис. 1г изображены ее сечения.

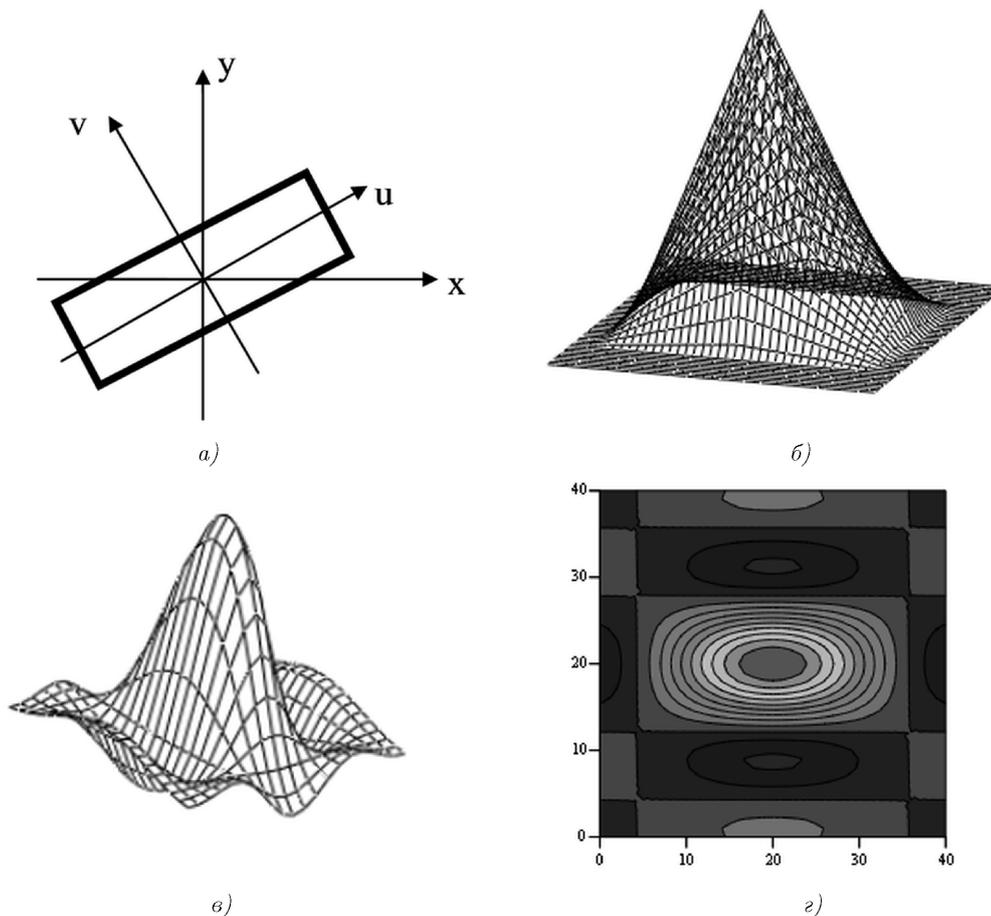


Рис. 1

Набор параметров  $(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$  характеризует неоднородность сигнала  $s(x, y)$  по координатам  $(x, y)$ . Отметим, что характеристики анизотропии, указанные выше, соответствуют характеристикам анизотропии, введенным в [1,2] на основе анализа корреляционного тензора градиента. Однако использование корреляционного тензора градиента проблематично на границах фрагментов, контурах, во всех точках со скачком уровня сигнала. Использованное в данной работе определение параметров анизотропии на основе анализа спектра более корректно, поскольку свободно от скачков в поведении спектров.

Пространственная неоднородность сигнала в общем случае характеризуется параметрами  $(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ . В одних задачах выделяют собственно анизотропию, характеризующуюся отношением  $\gamma^2 = \lambda_1 / \lambda_2$ , и угол ориентации  $\theta$ . В других задачах пространственно-частотная неоднородность зависит интегрально от собственно анизотропии и угла ориентации фрагмента. В данной работе рассматривается именно такой случай. Поэтому под анизотропией понимается пространственно-частотная неоднородность, обусловленная как собственно анизотропией, так и углом поворота неоднородного изображения.

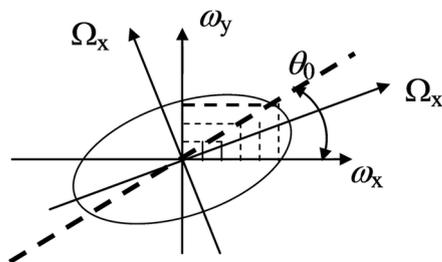


Рис. 2

Интегральная характеристика анизотропии по координатам  $(x, y)$  должна зависеть от параметра  $\gamma = \sqrt{\lambda_1 / \lambda_2}$  и угла ориентации  $\theta$  эллипса (7), (8). На рис. 2 представлен эллипс (3) с произвольными параметрами  $(\gamma, \theta)$  разделенный сечением  $\theta_0 = \pi / 4$ . В области физических частот  $(0 \leq \omega_x, 0 \leq \omega_y)$  это сечение делит площадь эллипса на части  $P_H$  и  $P_L$ . Отношение

$$M = P_H / P_L$$

или

$$M_{db} = 10 \lg(M) = 10(\lg(P_H) - \lg(P_L)) \quad (9)$$

является интегральной мерой спектральной анизотропии. Из геометрических свойств эллипса следует, что

$$M = \frac{\arccos(z_3) - \arccos(z_1)}{\arccos(z_2) + \arccos(z_1)}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= \left\{ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \operatorname{tg}^2((\pi/4) - \theta)} \right\}^{1/2}, \\ z_2 &= \left\{ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \operatorname{tg}^2(\theta)} \right\}^{1/2}, \\ z_3 &= \left\{ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \operatorname{tg}^2((\pi/2) - \theta)} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) можно сделать упрощения, учитывая что  $\operatorname{tg}((\pi/2) - \theta) = c \operatorname{tg}(\theta)$ ,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}(\theta)}{1 + \operatorname{tg}(\theta)}$ .

Из (10), (11), следует, что при  $\theta = 0$ , интегральная характеристика анизотропии равна

$$M = \frac{\arcsin\left(\gamma / \sqrt{1 + \gamma^2}\right)}{\arccos\left(\gamma / \sqrt{1 + \gamma^2}\right)}.$$

То есть  $M$  определяется собственно анизотропией спектральной плотности.

При  $\theta = \pi/4$  интегральная характеристика анизотропии  $M = 1$ . То есть, хотя спектральная плотность  $S(\omega_x, \omega_y)$  относится к неоднородному в пространстве сигналу, с точки зрения интегрального показателя анизотропии  $M$ , спектр имеет одинаковые свойства по обоим координатам, то есть является как бы «изотропным».

Введенная выше метрика  $M$  (или  $M_{db}$ ) опирается на информацию о производных  $S_{11}, S_{22}, S_{12}$  спектральной плотности. Желательно выразить интегральную характеристику анизотропии через операции, не требующие дифференцирования. Из пары соотношений для  $R(X, Y) \leftrightarrow S(\omega_x, \omega_y)$  (2) следует, что

$$\begin{aligned} S_{11} &= \int \int X^2 R(X, Y) dX dY = \int X^2 R(X) dX, \\ S_{22} &= \int \int Y^2 R(X, Y) dX dY = \int Y^2 R(Y) dY, \\ S_{12} &= \int \int XY \cdot R(X, Y) dX dY. \end{aligned} \quad (12)$$

Операции интегрирования свободны от вычислительных проблем, свойственных дифференцированию.

Другой удобной характеристикой неоднородности двумерной спектральной плотности

является отношение энергий

$$M_E = \frac{E_H}{E_L} = \frac{\int_0^\infty d\omega_y \int_0^{\omega_y} d\omega_x S(\omega_x, \omega_y)}{\int_0^\infty d\omega_x \int_0^{\omega_x} d\omega_y S(\omega_x, \omega_y)} \quad (13)$$

в секторах  $\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$  и  $\varphi \in [0, \pi/4]$  квадранта  $0 \leq \omega_x < \infty, 0 \leq \omega_y < \infty, \varphi = \arctg(\omega_y / \omega_x)$ . В качестве примера рассмотрим спектральную плотность вида

$$S(\omega_x, \omega_y) = \exp\left[-(S_{11}\omega_x^2 + S_{22}\omega_y^2 + 2S_{12}\omega_x\omega_y)/2\right]. \quad (14)$$

Производя соответствующие вычисления (подробно представленные в приложении 1), получаем

$$M_E = \frac{\arctg(\gamma \cdot \text{ctg}(\pi/4 - \theta)) - \arctg(\gamma \cdot \text{tg}(\theta))}{\pi - [\arctg(\gamma \cdot \text{ctg}(\pi/4 - \theta)) + \arctg(\gamma \cdot \text{ctg}(\theta))]} \quad (15)$$

Здесь  $\gamma = \sqrt{\lambda_1 / \lambda_2} = \alpha / \beta$ , введенные в (6), (8). При  $\theta = \pi/4$  величина  $M_E = 1$ , при  $\theta = 0$  величина

$$M_E = \frac{\arcsin(\gamma / \sqrt{1 + \gamma^2})}{\arccos(\gamma / \sqrt{1 + \gamma^2})}.$$

В этих частных случаях интегральные показатели неоднородности: геометрический  $M$  и энергетический  $M_E$  совпадают, что говорит об их равноценности для оценки анизотропии в спектральной и пространственной областях.

Рассмотрим теперь дискретный сигнал (координаты сигнала  $(x, y)$  дискретизированы), вписанный в квадратный блок.

Двумерный спектр можно вычислить при разложении по базису дискретного косинусного преобразования – DCT или дискретного чебышевского преобразования – GDCT [6]. Прямые преобразования DCT и GDCT имеют сходный вид

$$\mathbf{C} = (C_{km}) = \Phi_{(i)} \mathbf{S} \Phi_{(j)}^T, \quad k, m = 0 \dots N - 1, \quad (16)$$

где

$$\Phi_{(i)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \cos(\pi k \frac{i + 0.5}{N}) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

а  $\mathbf{S} = [S(i, j)]$  — двумерный блок отсчетов сигнала- для DCT, или сэмплов для GDCT [6]. Двумерная спектральная матрица  $(C_{km}), k, m = 0 \dots N - 1$  в общем случае имеет

неоднородную структуру. Для нее по аналогии с рассмотренным в (13) случае целесообразно также ввести энергетическую характеристику интегральной анизотропии

$$M_E = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=k}^{N-1} C_{km}^2}{\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m C_{km}^2}. \quad (18)$$

Здесь  $k$  номер строки,  $m$  номер столбца спектральной матрицы. С вычислительной точки зрения вместо  $C_{km}^2$  удобнее использовать  $|C_{km}|$ .

**2. Экспериментальный анализ анизотропии.** Пусть  $C_{km}$  — коэффициенты ДКП блока  $s_{ij}, i, j = 0 \dots N - 1$ . Введем метрику:

$$d_H = \sum_{k,m}^{m>k} |C_{km}| \quad (19)$$

которая является мерой анизотропии в горизонтальном направлении. Метрика

$$d_L = \sum_{k,m}^{m<k} |C_{km}| \quad (20)$$

является мерой анизотропии в вертикальном направлении. Тогда определив отношение данных величин как

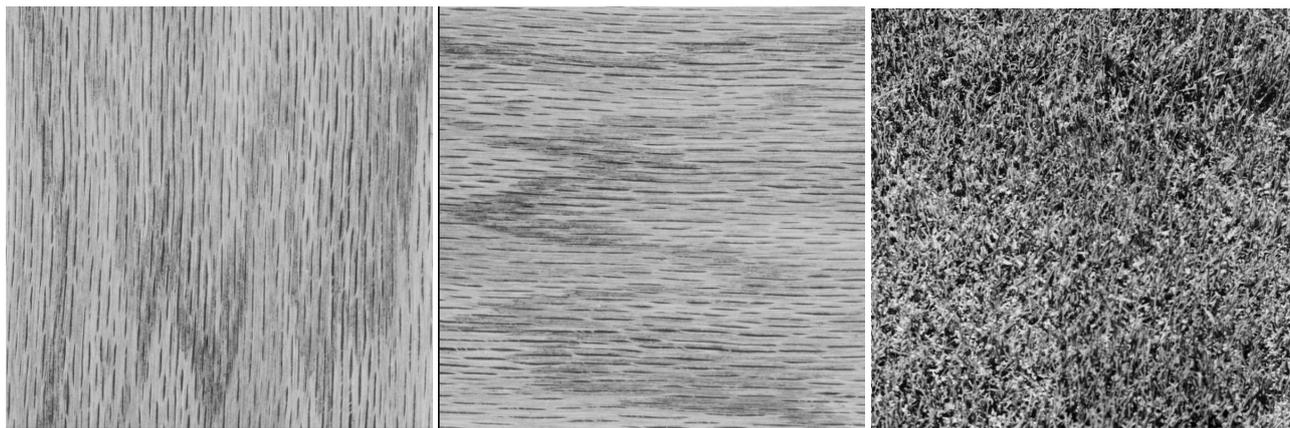
$$M_d = \frac{d_H}{d_L} \quad (21)$$

мы можем судить о величине и направлении анизотропии. Если  $M_d < 1$ , то анизотропия имеет вертикальное направление. Если  $M_d > 1$ , то анизотропия имеет горизонтальное направление. В случае  $M_d \approx 1$  блок является изотропным.

Для экспериментального исследования предложенного метода анализа анизотропии взяты изображения текстур, представленные на рис. 3. На рис. 3а анизотропия имеет вертикальное направление, на рис. 3б анизотропия имеет горизонтальное направление и на рис. 3в изображение изотропно. На рис. 4 показаны коэффициенты дискретного косинусного преобразования  $16 \times 16$  для блоков этих текстур.

Гистограммы метрик  $(d_H, d_L)$  всех блоков исследуемых изображений представлены на рис. 5. Более темная гистограмма соответствует  $d_H$ , более светлая  $d_L$ . В таблице приведены статистические характеристики распределения найденных метрик.

Из полученных гистограмм и статистических характеристик видно, что распределения

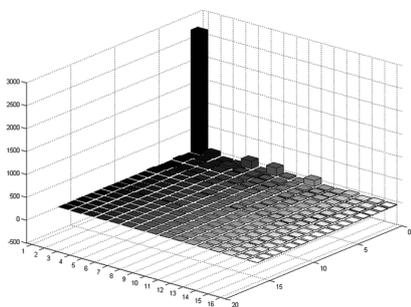


а)

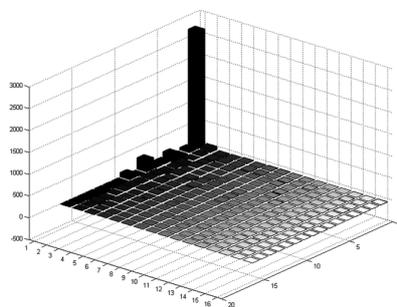
б)

в)

Рис. 3



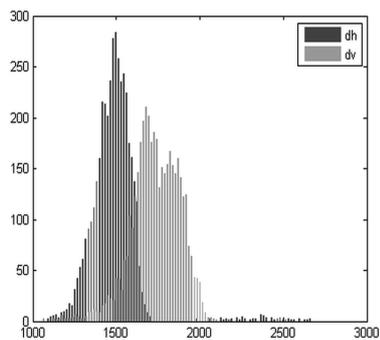
а)



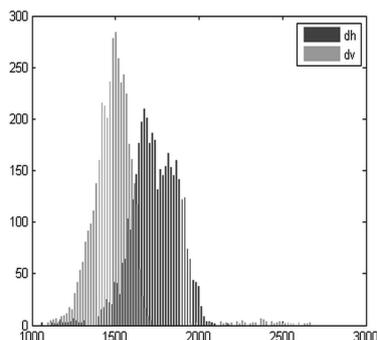
б)

в)

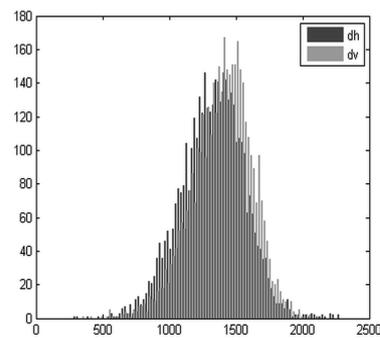
Рис. 4



а)



б)



в)

Рис. 5

Таблица

Тип текстуры	Изотропная	Вертикальная	Горизонтальная
Мат. ожидание $d_H$	1329	1488	1734
Мат. ожидание $d_L$	1394	1734	1488
Дисперсия $d_H$	240	148	141
Дисперсия $d_L$	224	141	148
Мода $d_H$	282	1088	1053
Мода $d_L$	355	1053	1088
Медиана $d_H$	1340	1487	1733
Медиана $d_L$	1411	1733	1487

предложенных метрик направления анизотропии зависят от типа текстуры. На изображениях с вертикальной текстурой, метрики . На изображениях с горизонтальной текстурой, метрики блоков  $M_d < 1, \lg(M_d) < 0$ . На изображениях с изотропной текстурой  $M_d \approx 1$ . Таким образом, анализируя данные метрики можно определить интегральную характеристику анизотропии в блоке изображения, и в соответствии с этим выбрать соответствующий способ обработки изображения.

Заметим, спектральные коэффициенты, расположенные в первой строке и в первом столбце имеют четкие свойства анизотропии по вертикальному и горизонтальному направлению. Таким образом, анализируя коэффициенты преобразования первого столбца и первой строки, можно также определить характеристику анизотропии в блоке.

**Выводы.** Таким образом, в данной статье был предложен способ оценки неоднородности изображения на основе анализа спектров. Предложены метрики для определения интегральной анизотропии. Проведенные эксперименты на изображениях с различным характером текстур показали применимость данного подхода.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

После приведения к каноническому виду (6) квадратичной формы для спектральной плотности (14) получаем подынтегральную функцию вида  $f(x, y) = \exp(-\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2)$ . Для функции  $f(x, y) = \exp(-\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2)$  интегралы по областям  $\{0 \leq x < \infty, k_1 x \leq y \leq k_2 x\}$  и  $\{0 \leq x < \infty, k_3 x \leq y \leq k_1 x\}$  имеют вид

$$E_H = \int_0^\infty dx \exp(-\alpha^2 x^2) \int_{k_1 x}^{k_2 x} \exp(-\beta^2 y^2) dy$$

$$E_L = \int_0^\infty dx \exp(-\alpha^2 x^2) \int_{k_3 x}^{k_1 x} \exp(-\beta^2 y^2) dy$$

Где  $k_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ ,  $k_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{ctg}(\theta)$ ,  $k_3 = -\operatorname{tg}(\theta)$ .

Далее воспользуемся интегралами [7]

$$\int_0^x \exp(-\alpha^2 z^2) dz = (\sqrt{\pi} / 2\alpha) \operatorname{erf}(\alpha x)$$

$$\int_0^\infty \exp(-\beta^2 z^2) \operatorname{erf}(\alpha z) dz = (1 / \beta\sqrt{\pi}) \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Тогда

$$M_E = \frac{E_H}{E_L} =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}(\gamma^{-1} \cdot \operatorname{ctg}(\theta)) - \operatorname{arctg}(\gamma^{-1} \cdot \operatorname{tg}(\pi/4 - \theta))}{\operatorname{arctg}(\gamma^{-1} \cdot \operatorname{tg}(\pi/4 - \theta)) + \operatorname{arctg}(\gamma^{-1} \cdot \operatorname{tg}(\theta))},$$

где  $\gamma = \alpha / \beta$ . Далее используются формулы преобразования обратных тригонометрических функций:

$$\operatorname{arctg}(z) + \operatorname{arcctg}(z) = \pi / 2,$$

$$\operatorname{arcctg}(z) = \operatorname{arctg}(1/z), z > 0.$$

$$\operatorname{arctg}(z) = \operatorname{arcctg}(1/z), z > 0.$$

После преобразований получается

$$M_E = \frac{\operatorname{arctg}(\gamma \cdot \operatorname{ctg}(\pi/4 - \theta)) - \operatorname{arctg}(\gamma \cdot \operatorname{tg}(\theta))}{\pi - [\operatorname{arctg}(\gamma \cdot \operatorname{ctg}(\pi/4 - \theta)) + \operatorname{arctg}(\gamma \cdot \operatorname{ctg}(\theta))]}.$$

Для проверки частных случаев используются формулы

$$\operatorname{arctg}(z) = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right),$$

$$\operatorname{arcctg}(z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Vliet L. J.* Estimators for orientation and anisotropy in digitized images / Vliet L. J., Verbeek P. W. // in Proc. of the First Annual Conference of the Advanced School for Computing and Imaging (ASCI'95) — Heijen, Netherland. — 16—18 May 1995. — P. 442—450.
2. *Jiang X.* On orientation and anisotropy estimation for online fingerprint authentication / X. Jiang // IEEE Trans. Of Signal Processing. — October 2005. — Vol. 53, No. 10. — P. 4038—4049.
3. *Benmansour F.* Tubular anisotropy segmentation / Benmansour F., Cohen L. // in Proc. of the Second International Conference of the Scale Space and Variational Methods in Computer Vision (SSVM 2009) — Voss, Norway. — 1—5 June 2009. — P. 100—108.
4. *Радченко Ю. С.* Исследование алгоритмов для устранения эффекта Гиббса на изображении / Ю. С. Радченко, Т. А. Радченко, А. Н. Позднякова // Труды XVII международной научно-технической конференции «Кибернетика и высокие технологии XXI века —С&Т2011». — Воронеж: 2011. — Т. 1. — С. 55—61.
5. *Ефимов Н. В.* Квадратичные формы и матрицы. / Ефимов Н. В. — М: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1967. — 159 с.

6. Радченко Ю. С. Сравнительный алгоритм сжатия изображений на основе дискретного косинусного (DCT) и чебышевского (GDCT) преобразований / Ю. С. Радченко, Т. А. Радченко, А. В. Бу-

*Радченко Ю. С., доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет*  
*Тел. (473)220-89-16*  
*E-mail: ysradchenko@yandex.ru*

*Миляев С. В. аспирант, Воронежский государственный университет*  
*Тел. (473)255-31-96*  
*E-mail: sergey.milyaev@mail.ru*

лыгин // Цифровая обработка сигналов. — 2006. — № 4. — С. 15—19.

7. Коротков Н. Е. Интегралы для приложений интеграла вероятностей. / Коротков Н. Е. — Воронеж: ФГУП «ВНИИС», 2002. — 800 с.

*Radchenko Y.S., doctor of science, Professor, Voronezh State University*  
*Tel. (473)220-89-16*  
*E-mail: ysradchenko@yandex.ru*

*Milyaev S. V., Postgraduate student, Voronezh State University*  
*Tel. (473)255-31-96*  
*E-mail: sergey.milyaev@mail.ru*