

# ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ АСИНХРОННОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗИ

Ю. Н. Прибытков, В. К. Маршаков

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 21.06.2011 г.

**Аннотация.** В работе выполнен анализ пропускной способности асинхронной системы связи, основанной на передаче и распознавании ортогональных сигналов. Рассмотрены асимптотические характеристики системы связи при  $M$ -ичной модуляции и неизвестных временных запаздываниях информационных символов.

**Ключевые слова:** асинхронная связь, пропускная способность, ортогональные сигналы.

**Abstract.** Capacity of asynchronous communication system based on the transfer and recognition of orthogonal signals is analyzed. Asymptotical characteristics of communication system with  $M$ -ary modulation and unknown delays of information symbols are considered.

**Key words:** asynchronous communication, capacity, orthogonal signals.

## ВВЕДЕНИЕ

Для определения качества системы связи и оценки достижимой скорости передачи данных зачастую используют известный подход, основная идея которого состоит в следующем. Задаются приемлемым значением вероятности ошибки сообщения или бита, отношением сигнал/шум и шириной полосы канала связи. Затем вычисляют максимальное значение бит в секунду, которое можно передать через канал при заданных условиях, используя выбранные способы модуляции, кодирования и обработки сигнала на приемной стороне. Очевидно, что одним из основных факторов, определяющих максимальную скорость передачи в реальной системе связи, является помехоустойчивость алгоритмов обработки сигнала и оценки его информационных и неинформационных параметров. В качестве верхней границы скорости передачи, которая соответствует идеальному способу обработки сигнала и безошибочному приему сообщений, может быть использована известная формула К. Шеннона для пропускной способности канала связи  $C = \Delta f \log_2(1 + P/(N_0 \Delta f))$ . Здесь  $\Delta f$  — ширина полосы канала передачи данных,  $P$  — средняя мощность полезных сигналов,  $N_0$  — односторонняя спектральная плотность мощности аддитивного гауссовского белого шума. Следует отметить, что скорость передачи равная пропускной способности может быть полу-

чена при использовании в качестве полезного сигнала стационарного гауссовского случайного процесса неограниченной длительности. Тем не менее, пропускная способность может быть использована для проверки состоятельности сочетания методов модуляции, кодирования и алгоритмов обработки сигнала на приемной стороне.

Рассмотрим  $M$ -ичную модуляцию ортогональными сигналами, при которой каждый из передаваемых сигналов представляет собой один из сигналов, имеющих одинаковые энергии, длительности  $T$ , и содержащие  $k = \log_2(M)$  бит информации. Как известно [1], такая модуляция эффективно может быть использована при сравнительно низких отношениях сигнал/шум на информационный бит  $z_b < 10 - 12$  dB,  $z_b^2 = E_b/N_0 = PT/N_0 k$  и достаточно большой полосе канала, дающей возможность генерировать сравнительно большое число ортогональных сигналов. В [1,2] и др. на основе анализа зависимостей вероятностей ошибочного приёма бита информации от отношения сигнал/шум  $z_b^2$  для когерентного и некогерентного синхронного прима показано, что с увеличением числа ортогональных сигналов  $M$  и полосы  $\Delta f$  в пределе достигается безошибочная передача любого бита информации, если  $z_b > -1.6$  dB. При этом максимальная скорость безошибочной передачи стремится к пределу, который определен формулой К. Шеннона для неограниченной полосы

сигнала  $\lim_{\Delta f \rightarrow \infty} C = P/(N_0 \ln 2)$ . Отсюда следует, что скорость передачи данных в синхронных системах связи как при когерентном, так и некогерентном приеме ортогональных сигналов асимптотически может достигать пропускной способности используемого канала связи.

Однако в большинстве практических приложений временные запаздывания принимаемых сигналов нельзя считать известными. Такая ситуация соответствует асинхронным системам связи. В некоторых из них для временной синхронизации используют специальные пилот-сигналы, которые позволяют ещё до принятия полезной информации выполнить временную синхронизацию. В результате этого демодуляция информационных символов в таких асинхронных системах связи основывается также на синхронных алгоритмах различения полезных сигналов. В тоже время, если временная синхронизация заранее невозможна, то выделение полезной информации из принимаемых данных приходится выполнять с использованием алгоритмов совместного различения сигналов и оценки их временных запаздываний.

В связи с этим определённый интерес представляет анализ скорости передачи в асинхронной системе связи, использующей  $M$ -ичную модуляцию при неизвестных временных положениях информационных ортогональных сигналов.

### СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ В АСИНХРОННЫХ СИСТЕМАХ

Положим, что информационный символ асинхронной системы связи представляет собой один из ортогональных сигналов  $s_i(t - \tau_i)$   $i = 1 \dots M$ , принимаемый на фоне аддитивного белого гауссовского шума с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . Эти сигналы имеют одинаковые энергии  $E$ , длительности  $T$  и неизвестные временные положения  $\tau_i \in [t_1, t_2]$ , где  $T_0 = t_2 - t_1$  — величина априорного интервала возможных значений  $\tau_i$ . В демодуляторе приёмного устройства по принятым данным должно быть выполнено совместное различение принятого полезного сигнала и оценка его временного положения. Одним из часто используемых алгоритмов такого совместного различения — оценивания является алгоритм максимального правдоподобия. Применение этого алгоритма может

быть обосновано, например, тем, что он является асимптотически байесовским при неограниченном увеличении сигнал/шум и приёме «гладких» (дифференцируемых) сигналов [3]. Если полезные сигналы не дифференцируемы [3], то асимптотическая оптимальность максимально правдоподобного алгоритма совместного различения и оценивания не доказана. Тем не менее, и при приёме недифференцируемых сигналов также будем считать, что для совместного различения и оценивания используется алгоритм максимального правдоподобия.

Обозначим  $p_s$  — средняя вероятность ошибочного решения при приёме информационного символа  $s_i(\cdot)$ . Согласно [1,2] и др. в отсутствии кодирования вероятность ошибки на бит может быть записана как

$$p_b = p_s \cdot 2^{k-1} / (2^k - 1) = p_s M / 2(M - 1), \quad (1)$$

где  $k = \log_2(M)$  — число бит в информационном символе. Обобщая, приведённые в [3], результаты на случай различения  $M$  сигналов с неизвестными временными положениями, имеем

$$p_s = \frac{M-1}{M} \left( 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_N^M(x) dF_S(x) \right) = \frac{M-1}{M} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_N^M(x)) dF_S(x) \right), \quad (2)$$

где  $F_S(x)$  и  $F_N(x)$  — функции распределения значений максимумов нормированного логарифма функционала отношения правдоподобия (ЛФОП) в сигнальной и шумовой областях соответственно. При определении этих законов распределения следует различать приём дифференцируемых и недифференцируемых сигналов.

Под недифференцируемыми обычно понимаются [3,4] и др. сигналы, для которых автокорреляционная функция (при когерентном приёме) или её огибающая (некогерентный приём) в точке её максимума дважды не дифференцируема, а её поведение в окрестности этого максимума аппроксимируется зависимостью  $S(\tau) \approx S_m [1 - |\tau|/\delta + o(|\tau|)]$ ,  $\delta > 0$ , где  $S_m$  — величина максимума, а  $\delta$  — эффективная длительность автокорреляционной функции (её огибающей) различаемых сигналов. Подобная модель полезных сигналов обычно имеет место в телекоммуникационных системах с кодовым разделением каналов [6].

Согласно [3], при когерентном приёме функции распределения  $F_S(x)$  и  $F_N(x)$  можно представить в виде

$$F_{S\ acnd}(x) = \Phi(x-z) - 2 \exp(3z^2/2 - xz) \Phi(x-2z) + \exp(4z^2 - 2xz) \Phi(x-3z), \quad (3)$$

$$F_{N\ acnd}(x) = \begin{cases} \exp\left(-m \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\right), & x \geq 1 \\ 0, & x < 1, \end{cases} \quad (4)$$

где  $m = T_0/\delta$  — приведенная длина априорного интервала возможных временных положений информационных символов,  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$  — интеграл вероятности,

$$z^2 = 2PT/N_0 = 2 \log_2(M) z_b^2 \quad (5)$$

— отношение сигнал/шум для принятого сигнала. Подставляя (3) и (4) в (2) и учитывая (1), получим среднюю вероятность ошибки бита при различении информационных сигналов с неизвестными временными положениями:

$$p_{b\ acnd} = ze^{\frac{3z^2}{2}} \int_1^\infty \left(1 - \exp\left(-mM \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right)\right) \times \left(e^{-zx} \Phi(x-2z) + e^{5z^2/2-2xz} \Phi(x-3z)\right) dx. \quad (6)$$

На рис. 1 сплошными линиями изображены зависимости средней вероятности  $p_b$  от отношения сигнал/шум  $z_b$  на бит переданной информации для приведённого интервала  $m = 10$  и двух значений  $M$ . Следует отметить снижение средней вероятности  $p_{b\ acnd}$  с увеличением числа различаемых сигналов при фиксированных значениях остальных параметров условий приёма. Подобная же зависимость  $p_b(M)$  имеет место и для синхронных систем связи. Причём асимп-

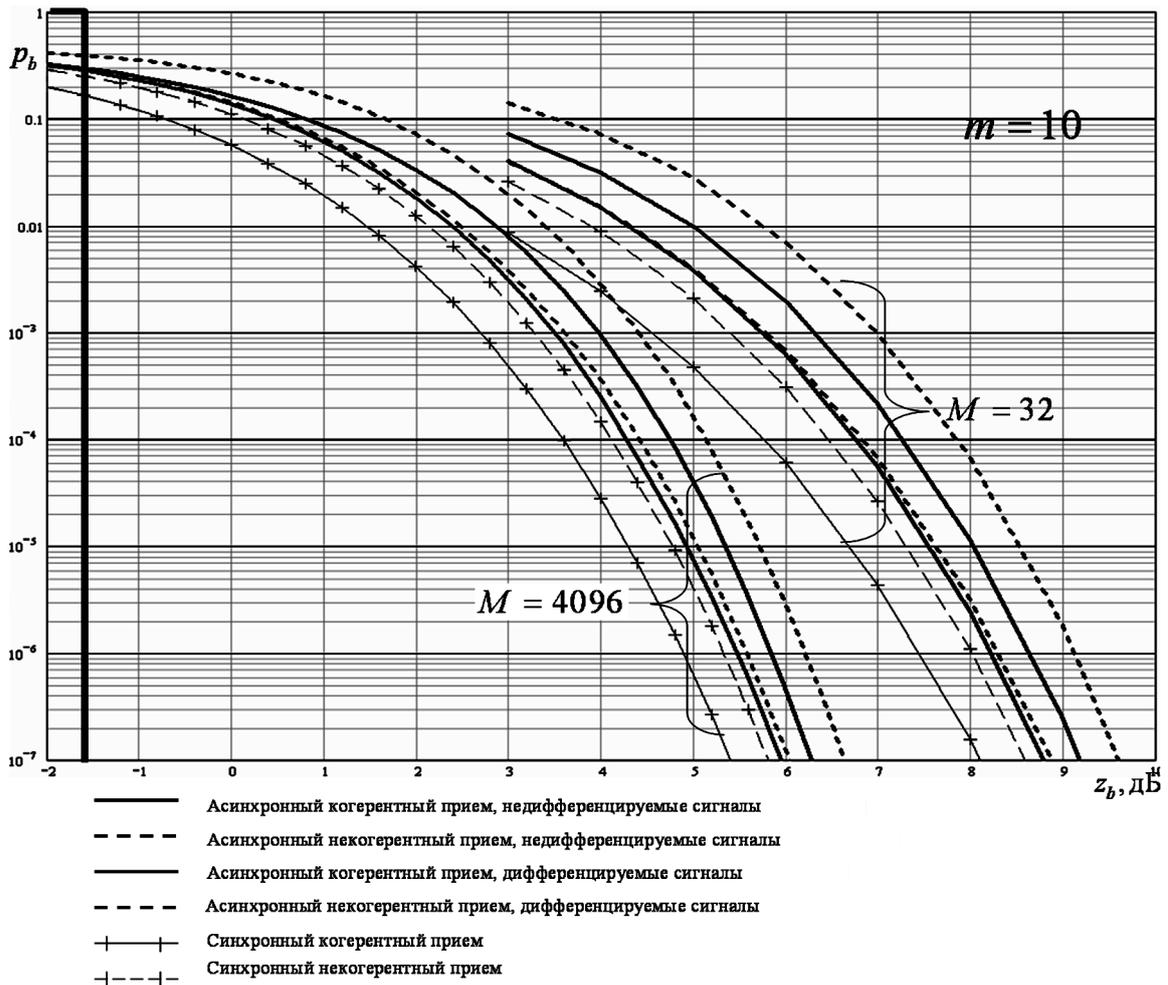


Рис. 1. Зависимости вероятностей битовых ошибок от отношения сигнал/шум на бит

асимптотическое поведение вероятностей  $p_b$  при неограниченном увеличении  $M$ , как для асинхронных, так и для синхронных систем оказывается одинаковым. Действительно, если в (6) сделать замену переменных  $y = x - \sqrt{2z_b^2 \log_2 M}$  и учесть (5), то

$$p_{s\ acnd} = \frac{M-1}{M} \int_{1-\sqrt{2z_b^2 \log_2 M}}^{\infty} \left(1 - F_{N\ acnd}^M \left(t + \sqrt{2z_b^2 \log_2 M}\right)\right) \times \\ \times W_{S\ acnd} \left(t + \sqrt{2z_b^2 \log_2 M}, z_b, M\right) dt,$$

где  $W_{S\ acnd}(x, z_b, M) = dF_{N\ acnd}(x)/dx$  — плотность вероятности величины максимума нормированного ЛФОП в сигнальной области. Можно показать, что эта плотность вероятности стремится к гауссовской с нулевым средним и единичной дисперсией при неограниченном увеличении числа сигналов  $M$ . С другой стороны

$$\lim_{M \rightarrow \infty} F_{N\ acnd}^M \left(t + \sqrt{2z_b^2 \log_2 M}\right) = \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \left( -m \frac{M \sqrt{z_b^2 \log_2 M}}{\sqrt{\pi}} \exp(-z_b^2 \log_2 M) \right) = \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \left( -m \frac{\sqrt{z_b^2 \log_2 M}}{\sqrt{\pi}} M^{1-\frac{z_b^2}{\ln 2}} \right) = \begin{cases} 0, & z_b^2 \leq \ln 2, \\ 1, & z_b^2 > \ln 2. \end{cases}$$

Поэтому, очевидно, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} p_{s\ acnd} = \begin{cases} 1, & z_b^2 \leq \ln 2, \\ 0, & z_b^2 > \ln 2. \end{cases} \quad (7)$$

Предельная зависимость (7) представлена на рис.1 сплошной жирной линией. Таким образом, в асинхронной системе, также как и в синхронной, алгоритмы когерентного приема позволяют достигать сколь угодно малой вероятности ошибки различения сигналов при условии

$$z_b^2 > \ln 2. \quad (8)$$

Это условие определяет максимально достижимую скорость передачи при фиксированной мощности сигнала. Действительно, подставляя (5) в (8) найдем, что для достижения безошибочной передачи данных при неограниченном увеличении числа сигналов необходимо выполнение неравенства  $PT/(N_0 \log_2(M)) > \ln 2$ . Соблюдение этого условия приводит к ограничению скорости передачи  $R = (\log_2 M)/T < P/(N_0 \ln 2)$ . Таким образом, в асинхронной системе при когерентном приеме возможно обеспечение скоростей

передачи, достигающих пропускной способности канала.

Рассмотрим теперь случай асинхронной системы связи, когда в качестве информационных символов используются ортогональные радиосигналы с неизвестными начальными фазами. При этом демодулятор информационных символов должен содержать некогерентный алгоритм совместного различения радиопульсов и оценки их неизвестных временных положений.

Согласно [3], для некогерентного приема и при недифференцируемой огибающей автокорреляционной функции различаемых сигналов имеем

$$F_{S\ acnd}(x) \approx 1 - Q(z, x) - 2e^{-xz} \times \\ \times \int_0^x ye^{-\frac{(y-z)^2}{2}} I_0(yz) dy + \\ + 3e^{\frac{3z^2-2xz}{2}} \int_0^z ye^{-\frac{(y-2z)^2}{2}} I_0(yz) dy, \quad (9)$$

$$F_{N\ acnd}(x) = \begin{cases} \exp(-mx^2 \exp(-x^2/2)), & x \geq \sqrt{2} \\ 0, & x < \sqrt{2}, \end{cases} \quad (10)$$

где  $I_0(y)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка,  $Q(z, x) = \int_x^{\infty} ye^{-\frac{y^2+z^2}{2}} I_0(yz) dy$

— функция Маркума. Подставляя выражения (8) и (9) в (2), с учетом (1) получим искомую вероятность ошибки бита для случая асинхронного некогерентного приема  $p_{b\ acnd}$ . На рис. 1 зависимости  $p_{b\ acnd}$  от отношения сигнал/шум  $z_b$  представлены пунктирными линиями. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно показать, что при выполнении условия (8) максимальная скорость передачи стремится к пропускной способности канала. При этом вероятность ошибки на бит информации стремится к нулю.

Рассмотрим теперь асинхронную систему связи, использующую дифференцируемые сигналы. Для определения вероятностей ошибок различения можно воспользоваться общими асимптотически точными выражениями из [3, 4] для распределения максимума ЛФОП в сигнальной и шумовой областях, конкретизируя их для рассматриваемых условий приема. На основе этих выражений с учетом (1) можно получить вероятности ошибок информационных бит в следующем виде:

— при когерентном приеме

$$p_{b\ acd} = \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left( 1 - \exp\left(-\frac{\xi M}{2\pi} e^{-x^2/2}\right) \right) \times \\ \times \left( e^{z^2/2-x^2/4} D_{-\frac{1}{2}}(2z-x) \right) dx;$$

— при некогерентном приеме

$$p_{b\ acnd} = \frac{z}{2} \int_1^\infty \left( 1 - \exp\left(-\frac{\xi Mx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) \right) \times \\ \times \left( e^{3z^2/2-xz} \Phi(x-2z) \right) dx,$$

где  $D_{-\frac{1}{2}}(x)$  — функция параболического цилиндра, а  $\xi$  — приведённая длина априорного интервала возможных временных положений дифференцируемых различаемых сигналов  $s_i(\cdot)$ . Величина  $\xi$  является аналогом  $m$ , введённой для недифференцируемых  $s_i(\cdot)$ . Так, если автокорреляционные функции (или огибающие) дифференцируемых импульсов имеют гауссовскую форму, а их эквивалентные длительности равны  $\delta$ , то  $\xi = m\sqrt{\pi/2}$  [3]. Зависимости вероятностей ошибки бита при когерентном  $p_{b\ scd}$  и некогерентном  $p_{b\ scnd}$  приеме подобных дифференцируемых символов нанесены на рис. 1 тонкими сплошными (когерентный приём) и пунктирными (некогерентный приём) линиями. Как следует из рис. 1 поведение за-

висимостей  $p_{b\ scd}$  и  $p_{b\ scnd}$  от отношения сигнал/шум  $z_b$  для различных значений  $M$  и  $m$  аналогично поведению  $p_{b\ acnd}$  и  $p_{b\ acnd}$  в случае недифференцируемых сигналов. Также можно показать, что при неограниченном увеличении числа ортогональных дифференцируемых сигналов скорость передачи в асинхронной системе связи стремится к пропускной способности канала, при заданных ограничениях на мощность сигнала.

Таким образом, как в синхронных, так и в асинхронных системах связи, использующих ортогональные сигналы, можно достигать скоростей передачи данных сколь угодно близких к пропускной способности канала связи, за счет увеличения числа сигналов. Причем этот результат достижим, как при когерентном, так и некогерентном приёме. Поэтому можно сделать вывод об асимптотической оптимальности использования алгоритма максимального правдоподобия для совместного различения - оценивания при передаче данных с применением  $M$ -ичной модуляции и неизвестных временных задержках информационных дифференцируемых и недифференцируемых ортогональных сигналов. Тем не менее, незнание задержки сигнала в асинхронной системе приводит не только к усложнению обработки на приемной

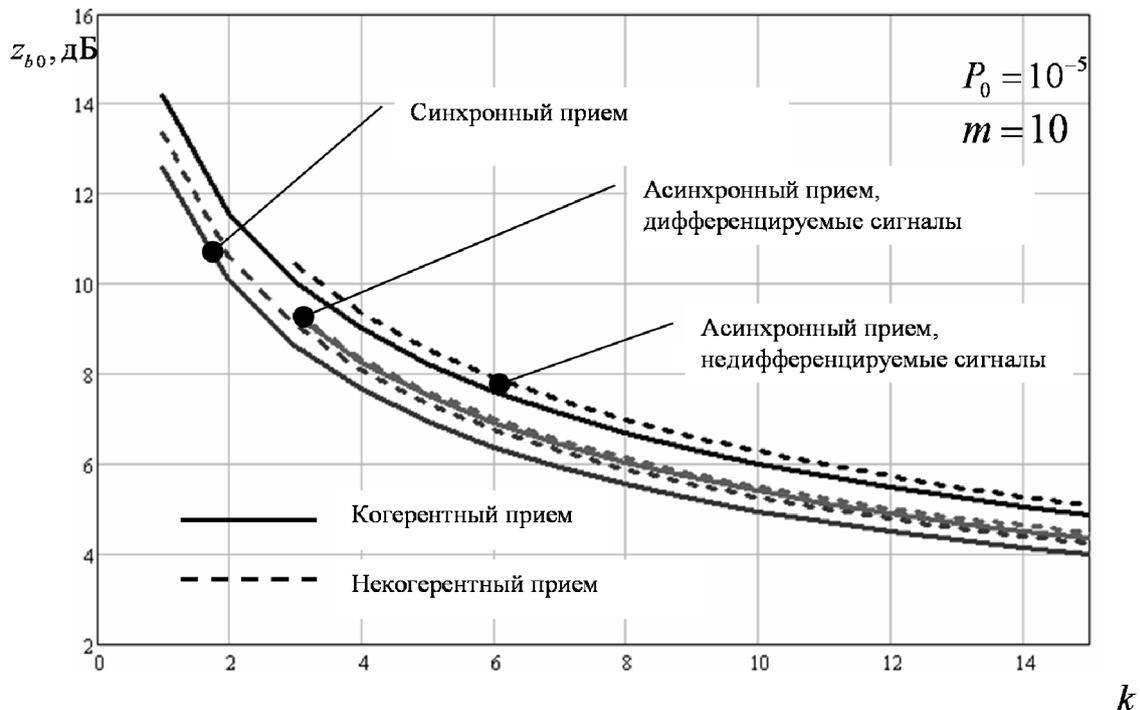


Рис. 2. Зависимости порогового отношения сигнал/шум от числа бит в символе

стороне, но и к проигрышу по помехоустойчивости по сравнению с синхронными системами передачи данных. Для иллюстрации этого на рис. 1 тонкими сплошными и пунктирными линиями с крестиками построены зависимости  $P_{b\ scd}$  и  $P_{b\ sncd}$  от отношения сигнал/шум  $z_b$  при синхронном когерентном и некогерентном приеме, рассчитанные по известным результатам из [1, 2]. С этой же целью на основе численного расчета была найдена зависимость порогового отношения сигнал/шум для информационного бита  $z_{b0}$ , обеспечивающего заданный уровень вероятности ошибки  $P_0$  при фиксированном числе ортогональных сигналов  $M$ .

Результаты численного решения уравнения  $P_0 = p(z_b, M)$  для  $P_0 = 10^{-5}$  приведены на рис. 2. Эти результаты показывают, что увеличение числа ортогональных сигналов приводит к снижению порогового отношения сигнал/шум для информационного сигнала  $z_{b0}$ .

Кроме того, на рис. 3 показан проигрыш в отношении сигнал/шум  $z_{b0}/z_{b0c}$ , относительно случая когерентного приема в синхронной системе, для которого пороговое отношение сигнал/шум обозначено  $z_{b0c}$ . Как следует из рис. 3 проигрыш в пороговом отношении сигнал/шум в асинхронной системе, обусловленный незна-

нием задержки недифференцируемого сигнала не превышает  $2dB$  для вероятности битовой ошибки  $P_0 = 10^{-5}$ . Причем, дифференцируемые сигналы обеспечивают меньшие потери в пороговом отношении сигнал/шум, чем недифференцируемые, для которых значение проигрыша не превышает  $0.8dB$ .

Для оценки скорости передачи информации в асинхронной и синхронной системах, предположим, что ортогональные сигналы получены с использованием частотных каналов, разнесенных по частоте на величину  $1/T$ . Тогда можно оценить спектральную эффективность системы связи, как  $R/\Delta f = M^{-1} \log_2 M$ . На рис.4 представлена зависимость спектральной эффективности от порогового отношения сигнал/шум.

Тонкой линией с крестиками на рис.4 показано значение спектральной эффективности, соответствующей пропускной способности канала. Этот рисунок иллюстрирует сходимость скорости передачи в синхронных и асинхронных системах к пропускной способности канала при увеличении числа сигналов. Тем не менее, следует сказать, что увеличение числа ортогональных сигналов приводит к снижению спектральной эффективности. Следовательно,

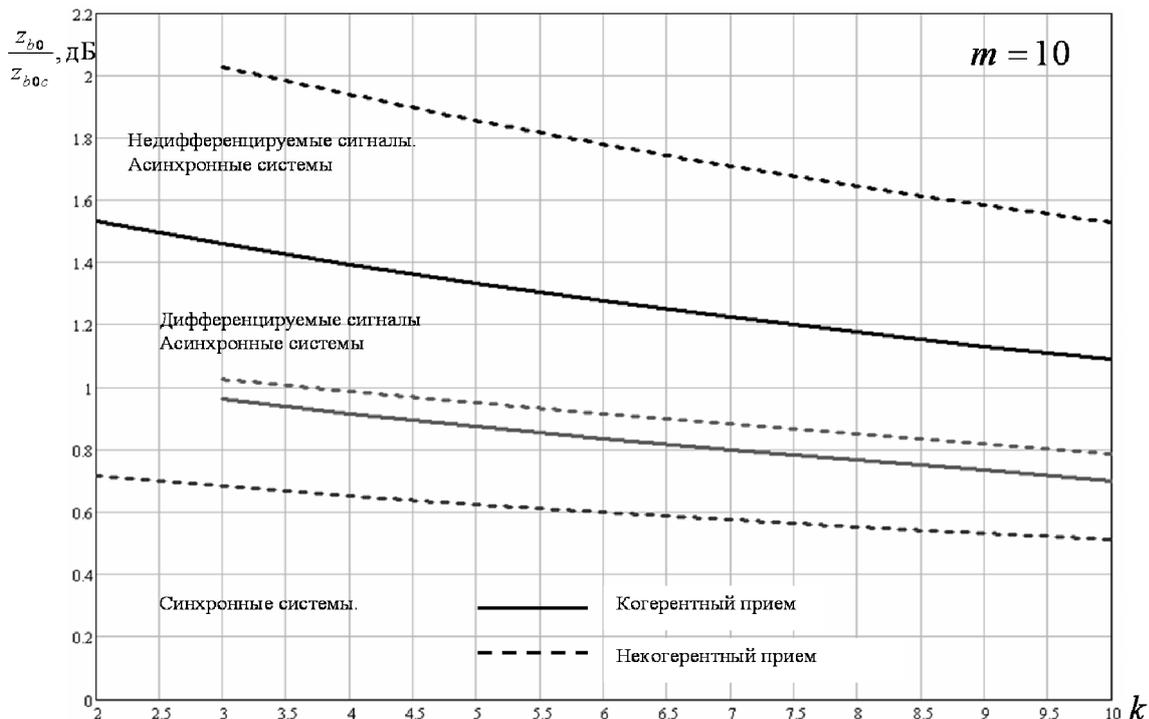


Рис. 3. Проигрыш в величине порогового отношения сигнал/шум для асинхронных систем

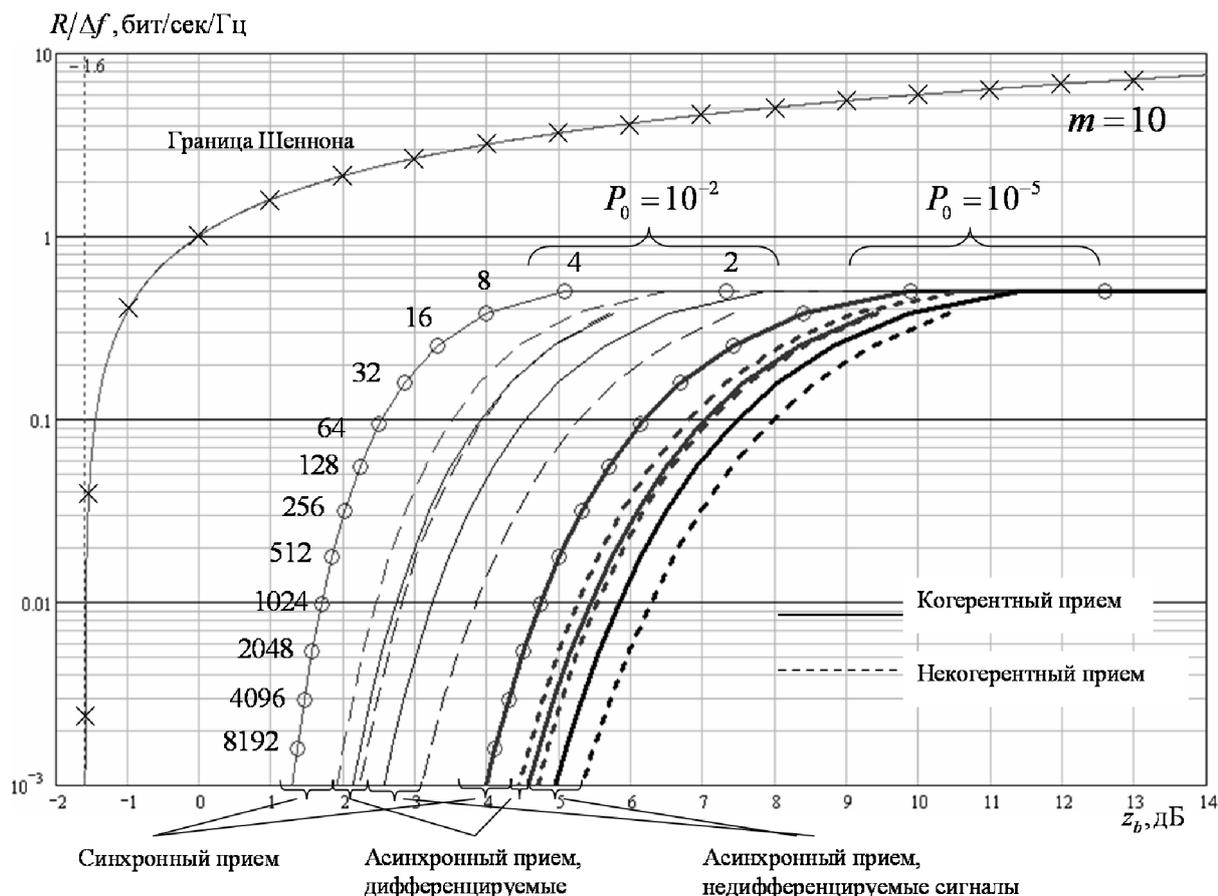


Рис. 4. Кривые частотно – энергетической эффективности

применение в системах связи  $M$ -ичной модуляции ортогональными сигналами оправдано при значениях спектральной эффективности существенно меньших 1.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что использование оптимальных алгоритмов совместного различения сигналов и оценки их неизвестных временных запаздываний в асинхронных системах связи позволяет обеспечивать сходимость скорости передачи к пропускной способности канала за счет увеличения числа сигналов. При этом незнание задержки сигнала в асинхронной системе приводит к проигрышу в пороговом отношении сигнал шум порядка единиц децибел относительно синхронных систем. Причем использование недифференцируемых сигналов в асинхронных системах обуславливает больший проигрыш, чем применение дифференцируемых сигналов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прокис Дж. Цифровая связь: пер. с англ. / Дж. Прокис; под ред. Д. Д. Кловского.- М.: Радио и связь, 2000. — 800 с.
2. Витерби Э. Д. Принципы когерентной связи: пер. с англ. / Э. Д. Витерби; под ред. Б. Р. Левина — М.: Сов.радио, 1970. — 392 с.
3. Трифонов А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
4. Куликов Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
5. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. — М: Радио и связь, 1983. — 320 с.
6. Viterby A. J. CDMA: principals of Spread Spectrum Communication / A. J. Viterby. — Reading: Addison-Wesley Publishing C., 1995. — 245 p.

*Ю. Н. Прибытков, В. К. Маршаков*

*Прибытков Юрий Николаевич — к.ф.-м.н.,  
доцент, Воронежский государственный уни-  
верситет*

*Тел. (473) 220-89-16*

*E-mail: ypribytkov@kodofon.vrn.ru*

*Маршаков Владимир Кириллович —  
к.ф.-м.н., доцент, Воронежский государствен-  
ный университет*

*Тел. (473) 220-89-16*

*E-mail: mvk@phys.vsu.ru*

*Pribytkov Yuri N. — Ph.D, Assistant of Radio  
Physics Chair, Voronezh State University*

*Tel. (473) 220-89-16*

*E-mail: ypribytkov@kodofon.vrn.ru*

*Marshakov Vladimir K. — Ph.D Associated  
Professor of Radio Physics Chair, Voronezh State  
University*

*Tel. (473) 220-89-16*

*E-mail: mvk@phys.vsu.ru*