

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРОВ УРАВНЕНИЙ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ В ПОЛИМЕРАХ*

М. В. Турбин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12 октября 2010 г.

Аннотация: в работе были рассмотрены возмущения в виде бегущей волны установившейся концентрации для системы, описывающей аномальную диффузию в полимерной пленке. Показано, что все возмущения со временем затухают. Получена визуализация аттракторов для изучаемой задачи.

Ключевые слова: аномальная диффузия, полимерная пленка, аттракторы пространства траекторий, визуализация аттракторов.

Abstract: in this paper travelling wave perturbations of stable concentration for system of anomalous diffusion in plastic film were under consideration. It is shown that all perturbations damps as $t \rightarrow \infty$. A visualisation of attractors of the problem was presented.

Key words: anomalous diffusion, plastic film, attractors of a trajectory space, visualisation of attractors.

ВВЕДЕНИЕ

Полимерные материалы используются в самых различных областях промышленности, поэтому их изучению посвящено большое число работ. Часто полимеры используются в комбинации с жидкостью, проникающей внутрь его структуры. При этом меняются свойства самого полимера. Оказывается, что распространение проникающей жидкости в полимерном материале может не удовлетворять классическим уравнениям диффузии и требует учёта релаксационных свойств полимера.

В данной работе исследуется одна из таких моделей, описывающая диффузию в пленках. (Подробнее о различных моделях аномальной диффузии см. в [1]—[3]). А именно в области $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2, \bar{\Omega} = [-R; R] \times [0; 1]$, на промежутке времени $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ рассмотрим следующую систему уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + E\Delta \sigma, (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \beta\sigma = \mu u + \nu \frac{\partial u}{\partial t}, (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

В данной системе координаты x, y и время t являются независимыми переменными, а u и σ — зависимыми переменными, функциями от x, y, t . Коэффициенты D, E, β, μ, ν — положительные константы. Отметим, что иногда это не постоянные коэффициенты, а функции от u и σ (подробнее о моделях и результатах для них см. в [4]—[6]).

При рассмотрении конкретных задач о визуализации аттракторов часто исследуются либо стационарные решения, либо эволюция решений на достаточно большом временном промежутке. Более того, отыскивая численно стационарное течение, часто используют метод установления, при котором стационарное течение ищется как предел нестационарных течений при неограниченном увеличении времени. Именно таким образом мы и будем искать аттракторы для системы уравнений (1), (2). Данный подход к исследованию таких типов задач был предложен в работе М. В. Турбина и С. К. Кондратьева [7]. В данной работе для краткости мы часто будем ссылаться на результаты [7].

Для системы (1)—(2) рассматривается краевая задача с граничным условием

$$u \Big|_{y=0} = u \Big|_{y=1} = 0. \quad (3)$$

Наш подход к изучению предельных режимов флуктуаций нулевой концентрации заклю-

* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009—2013 годы” (госконтракт № П941).

© Турбин М. В., 2011

чается в том, что мы рассмотрим некоторый класс его возмущений, назвав его пространством траекторий, и будем исследовать траекторные и фазовые аттракторы этого пространства траекторий.

1. УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЕГО СВОЙСТВА

В данном параграфе мы для краевой задачи (1)–(3) выведем уравнения для малых возмущений (колебаний) нулевой концентрации u .

1.1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

Предположим с самого начала, что при отсутствии возмущений мы имеем установившуюся нулевую концентрацию полимера, то есть:

$$u(x, y, t) \equiv 0, \quad \sigma(x, y, t) \equiv 0. \quad (4)$$

Будем предполагать, что изменение концентрации колеблется около этих средних значений, и будем использовать тильду для обозначения флуктуаций. Таким образом, мы полагаем, что

$$u(x, y, t) = \tilde{u}(x, y, t), \quad (5)$$

$$\sigma(x, y, t) = \tilde{\sigma}(x, y, t). \quad (6)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1)–(2), получим систему

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = D\Delta \tilde{u} + E\Delta \tilde{\sigma}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial t} + \beta \tilde{\sigma} = \mu \tilde{u} + \nu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (8)$$

Данные уравнения линейны, будем искать их решения в виде комплексных функций. Тогда можно свести данную систему уравнений в частных производных (7)–(8) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что даст очевидные преимущества при дальнейшем исследовании. Имея это в виду, будем искать решение в следующем виде:

$$\hat{u}(x, y, t) = \mathbf{u}(y)e^{i\alpha(x-ct)}; \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}(x, y, t) = \mathbf{w}(y)e^{i\alpha(x-ct)}. \quad (10)$$

Здесь «крышечка» обозначает «предварительное» комплексное решение. Далее с его помощью мы найдем действительное решение, отмеченное ранее тильдой. В (9), (10) величина α представляет собой волновое число (вещественное положительное число), а c — скорость

волны возмущения ($c \in \mathbb{C}$, при этом $\text{Re } c$ — скорость распространения волны, а величина $\text{Im } c$ характеризует скорость изменения амплитуды). Жирным шрифтом в выражениях (9), (10) обозначены комплексные функции \mathbf{u}, \mathbf{w} , зависящие только от неизвестной y . Часто решение такого вида называют решением типа «бегущей волны». При положительной мнимой части величины c происходит экспоненциальный рост возмущений со временем, при отрицательной правой части соответственно происходит затухание возмущений со временем с экспоненциальной скоростью. В случае $\text{Im } c = 0$ мы получаем постоянные незатухающие колебания. Подробнее см. в [7].

Поясним введение функций \hat{u} и $\hat{\sigma}$. Если мы найдём пару $\hat{u}, \hat{\sigma}$, которая является решением (7), (8), тогда решением также будет следующий набор функций:

$$\bar{\hat{u}}(x, y, t) = \bar{\mathbf{u}}(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}; \quad (11)$$

$$\bar{\hat{\sigma}}(x, y, t) = \bar{\mathbf{w}}(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}. \quad (12)$$

Это свойство следует из того факта, что в первоначальных уравнениях (7), (8) не содержится никаких комплексных величин. Таким образом можно построить чисто действительное решение системы уравнений (7), (8), положив:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, t) &= \frac{1}{2}(\hat{u}(x, y, t) + \bar{\hat{u}}(x, y, t)) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}(y)e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{\mathbf{u}}(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}) = \text{Re } \hat{u}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x, y, t) &= \frac{1}{2}(\hat{\sigma}(x, y, t) + \bar{\hat{\sigma}}(x, y, t)) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{w}(y)e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{\mathbf{w}}(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}) = \text{Re } \hat{\sigma}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (9), (10) в систему (7), (8), преобразуя полученные выражения и исключая экспоненциальные множители, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -i\alpha \mathbf{u}(y) \alpha c + D\alpha^2 \mathbf{u}(y) - D\mathbf{u}''(y) + \\ + E\alpha^2 \mathbf{w}(y) - E\mathbf{w}''(y) = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$-i\alpha c \mathbf{w}(y) + \beta \mathbf{w}(y) - \mu \mathbf{u}(y) + i\nu \alpha c \mathbf{u}(y) = 0. \quad (16)$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной y .

При этом в силу граничного условия (3) функция \mathbf{u} должна удовлетворять условиям:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(1) = 0. \quad (17)$$

Дальнейшее исследование задачи (15)—(17) разобьём на три этапа в зависимости выполнения или невыполнения следующих двух условий:

$$i\alpha c - \beta \neq 0, \quad (18)$$

$$-\mu + i\nu\alpha c \neq 0. \quad (19)$$

Условия (18), (19) возникают из уравнения (16). А именно, выражение $(i\alpha c - \beta)$ — это коэффициент перед \mathbf{w} , а $(-\mu + i\nu\alpha c)$ — коэффициент перед \mathbf{u} в уравнении (16). Если не выполнено ни одно из условий (18), (19), то уравнение (16) обращается в верное равенство при любых \mathbf{u}, \mathbf{w} . Также из равенств

$$i\alpha c - \beta = 0, \quad -\mu + i\nu\alpha c = 0$$

получаем, условие на коэффициенты исходной задачи $\beta = \frac{\mu}{\nu}$, которое противоречит физическому смыслу задачи. Поэтому мы не будем рассматривать ситуацию, когда не выполняется ни одно из условий (18), (19).

Первый случай. Пусть выполнены оба условия (18), (19). Выражая теперь \mathbf{w} из уравнения (16)

$$\mathbf{w}(y) = \frac{(-\mu + i\nu\alpha c)}{i\alpha c - \beta} \mathbf{u}(y), \quad (20)$$

подставляя его в (15) и приводя подобные, получим уравнение:

$$\begin{aligned} &-(\alpha^2 c^2 + i\alpha c\beta + iD\alpha^3 c - D\alpha^2 \beta - \\ & - E\alpha^2 \mu + iE\alpha^3 \nu c) \mathbf{u}(y) - \\ & -(D\beta + E\mu - iD\alpha c - iE\nu\alpha c) \mathbf{u}''(y) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Причём функция \mathbf{u} должна удовлетворять граничным условиям (17).

Замечание 1.1. Полностью аналогично выражая \mathbf{u} из уравнения (16) и подставляя его в (15) получим уравнение:

$$\begin{aligned} &-(\alpha^2 c^2 + i\alpha c\beta + iD\alpha^3 c - D\alpha^2 \beta - \\ & - E\alpha^2 \mu + iE\alpha^3 \nu c) \mathbf{w}(y) - \\ & -(D\beta + E\mu - iD\alpha c - iE\nu\alpha c) \mathbf{w}''(y) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Причём в силу граничного условия (17) из уравнения (16) получаем, что функция \mathbf{w} должна удовлетворять граничным условиям

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}(1) = 0. \quad (23)$$

Таким образом при выполнении условий (18), (19) мы получили, что (15)—(17) эквивалентна краевой задаче (21), (17).

Второй случай. Пусть выполняется условие (18) и не выполняется условие (19). Тогда

вместо уравнения (16) мы имеем уравнение:

$$-i\mathbf{w}(y)\alpha c + \beta\mathbf{w}(y) = 0$$

Откуда мы получаем, что $\mathbf{w} \equiv 0$. Таким образом из уравнение (15) можно переписать в виде:

$$-i\alpha c\mathbf{u}(y) + \alpha^2 D\mathbf{u}(y) - D\mathbf{u}''(y) = 0. \quad (24)$$

И как и раньше функция \mathbf{u} должна удовлетворять граничным условиям (17). Таким образом задача (15)—(17) в данном случае будет эквивалентна задаче (24), (17).

Третий случай. Пусть выполнено условие (19) и не выполнено условие (18), то есть $i\alpha c - \beta = 0$. Тогда уравнение (16) упростится:

$$-\mu\mathbf{u}(y) + i\nu\mathbf{u}(y)\alpha c = 0.$$

Откуда мы получаем только тривиальное решение $\mathbf{u} \equiv 0$. Таким образом данный случай не представляет никакого интереса для наших исследований.

1.2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Для полученных краевых задач нам потребуются некоторые свойства из теории краевых задач.

На отрезке $y \in [0, 1]$ рассмотрим дифференциальное выражение

$$l_0(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}'' \quad (25)$$

На линейном многообразии \mathfrak{D} , задаваемом краевыми условиями (17), дифференциальное выражение (25) задает дифференциальный оператор, который обозначим через L_0 . Нас будут интересовать спектральные свойства этого оператора.

Заметим, что оператор L_0 является (формально) самосопряженным. Действительно, для произвольной функции $\mathbf{z} \in C^2[-1, 1]$, умножая дифференциальное выражение (25) на $\bar{\mathbf{z}}$ и два раза проинтегрировав произведение по частям, получим формулу Лагранжа:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-\mathbf{v}'') \bar{\mathbf{z}} dy &= -\mathbf{v}'(1)\bar{\mathbf{z}}(1) + \mathbf{v}'(0)\bar{\mathbf{z}}(0) + \\ & + \mathbf{v}(1)\bar{\mathbf{z}}'(1) - \mathbf{v}(0)\bar{\mathbf{z}}'(0) + \int_0^1 \mathbf{v}(-\bar{\mathbf{z}}'') dy, \end{aligned}$$

то есть

$$\int_0^1 l_0(\mathbf{v}) \bar{\mathbf{z}} dy = P(\eta, \zeta) + \int_0^1 \overline{\mathbf{v}l_0(\mathbf{z})} dy, \quad (26)$$

где $P(\eta, \zeta)$ — билинейная форма относительно значений функций \mathbf{v}, \mathbf{z} на концах отрезка.

Отсюда следует, что дифференциальное выражение (25) является самосопряженным и что краевые условия (17) также являются самосопряженными. Отсюда получаем, что оператор L_0 , порожденный этими дифференциальным выражением и краевыми условиями, самосопряженный (см. [8], с. 20—22).

Рассмотрим спектральную задачу

$$L_0 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

то есть

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{v}'' &= \lambda \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}(0) &= 0, \\ \mathbf{v}(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Отметим, что не всякое число λ является собственным значением этой задачи. Например, при $\lambda = 0$ задача (27) имеет только нулевое решение. Следовательно, множество собственных значений оператора L_0 не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек (см. [8] с. 25—26). Так как оператор L_0 самосопряженный, то все его собственные значения вещественны (см. [8] с. 31).

Покажем, что оператор L_0 положительно определен. Действительно,

$$\begin{aligned} (L_0 \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_0^1 (-\mathbf{v}''(y)) \overline{\mathbf{v}(y)} dy = \\ &= -\mathbf{v}'(y) \overline{\mathbf{v}(y)} \Big|_0^1 + \int_0^1 \mathbf{v}'(y) \overline{\mathbf{v}'(y)} dy = \int_0^1 |\mathbf{v}'(y)|^2 dy \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что собственные значения оператора L_0 неотрицательны, а вспоминая, что $\lambda = 0$ не является собственным значением, в итоге имеем, что все собственные значения оператора L_0 положительны.

Таким образом задачу (27) можно переписать в следующем виде:

$$-\mathbf{v}'' = \omega^2 \mathbf{v}, \quad (28)$$

$$\mathbf{v}(0) = 0, \quad (29)$$

$$\mathbf{v}(1) = 0. \quad (30)$$

Подставляя общий интеграл

$$\mathbf{v}(y) = A \cos(\omega y) + B \sin(\omega y)$$

уравнения (28) в краевые условия (29), (30), получим, что $A = 0$, $\sin \omega = 0$. Следовательно,

$$\omega = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом собственными значениями будут

$$\omega_n^2 = (\pi n)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$\mathbf{v}_n(y) = \sin(\pi n y), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

1.3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ (21), (17).

Отметим, что если коэффициент при старшей производной в уравнении (21) равен нулю, то в силу граничных условий (17) задача (21), (17) имеет единственное (тривиальное) решение. Следовательно, те значения параметров α, c , при которых коэффициент при \mathbf{u}'' обращается в 0, нам не подходят. Поэтому будем считать, что он отличен от нуля. Тогда мы можем разделить уравнение (21) на коэффициент перед \mathbf{u}'' . Получим следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}''(y) + \frac{(\alpha^2 c^2 + i\alpha c \beta + iD\alpha^3 c - D\alpha^2 \beta - E\alpha^2 \mu + iE\alpha^3 \nu c)}{(D\beta + E\mu - iD\alpha c - iE\nu\alpha c)} \mathbf{u}(y) &= 0, \\ \mathbf{u}(0) &= 0, \\ \mathbf{u}(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Из результатов параграфа 1 следует, что задача (33) может иметь нетривиальное решение только при выполнении условий:

$$\operatorname{Re} \frac{(\alpha^2 c^2 + i\alpha c \beta + iD\alpha^3 c - D\alpha^2 \beta - E\alpha^2 \mu + iE\alpha^3 \nu c)}{(D\beta + E\mu - iD\alpha c - iE\nu\alpha c)} = (\pi n)^2, \quad (34)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\operatorname{Im} \frac{(\alpha^2 c^2 + i\alpha c \beta + iD\alpha^3 c - D\alpha^2 \beta - E\alpha^2 \mu + iE\alpha^3 \nu c)}{(D\beta + E\mu - iD\alpha c - iE\nu\alpha c)} = 0. \quad (35)$$

Сразу отметим, что последняя система не имеет решений, у которых $\operatorname{Im} c = 0$. Это можно получить аналитически, если подставить $\operatorname{Im} c = 0$ в систему (34), (35). Таким образом исходная задача (1)—(3) не имеет незатухающих колебаний.

Если же $\operatorname{Im} c \neq 0$ то система (34), (35) существенно усложняется и выписать аналитическую формулу для решения не представляется возможным. Однако, в ходе многочисленных вычислений для различных значений параметров D, E, β, μ, ν , имеющих физический смысл, были получены схожие результаты. А именно, система (34), (35) совместна только если $\operatorname{Im} c < 0$. На рисунке приведен типичный график зависимости (в обозначениях на рисунке $a = \operatorname{Re} c, b = \operatorname{Im} c$):

При тех значениях α и c , при которых графики на рисунке пересекаются, существует решение системы (34), (35) и, следовательно, существует решение краевой задачи (33).

1.4. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ (24), (17).

Перепишем краевую задачу (24), (17) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}''(y) + \left(\frac{i\alpha c}{D} - \alpha^2 \right) \mathbf{u}(y) &= 0, \\ \mathbf{u}(0) &= 0, \\ \mathbf{u}(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Здесь как и ранее без ограничения общности мы предположили, что $D \neq 0$ и разделили уравнение (24) на D , поскольку в противном случае (если $D = 0$) краевая задача (24), (17) имеет только тривиальное решение $\mathbf{u} \equiv 0$.

Если $\text{Re } c \neq 0$, то задача (36) имеет только тривиальное решение $\mathbf{u} \equiv 0$.

Если же $\text{Re } c = 0$, то первое уравнение задачи (36) имеет вид:

$$\mathbf{u}''(y) + \left(-\frac{\alpha \text{Im } c}{D} - \alpha^2 \right) \mathbf{u}(y) = 0.$$

И, таким образом, из результатов параграфа 1.2 мы получаем, что задача (36) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполнено неравенство:

$$\text{Im } c < -\alpha D. \quad (37)$$

Напомним, что исходя из физического смысла задачи $D > 0$ и $\alpha > 0$.

Таким образом при всех α и c , удовлетворяющих (37) и (18) и не удовлетворяющих условию (19), существует решение краевой задачи (24), (17). При этом как и в предыдущем пункте задача имеет решение только если $\text{Im } c < 0$.

2. АТТРАКТОРЫ ПРОСТРАНСТВА ТРАЕКТОРИЙ

Сначала мы приведём необходимые определения и факты из теории траекторных аттракторов. Более подробно это изложено в работе [7] (см. также [9]—[11]). Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, и пусть

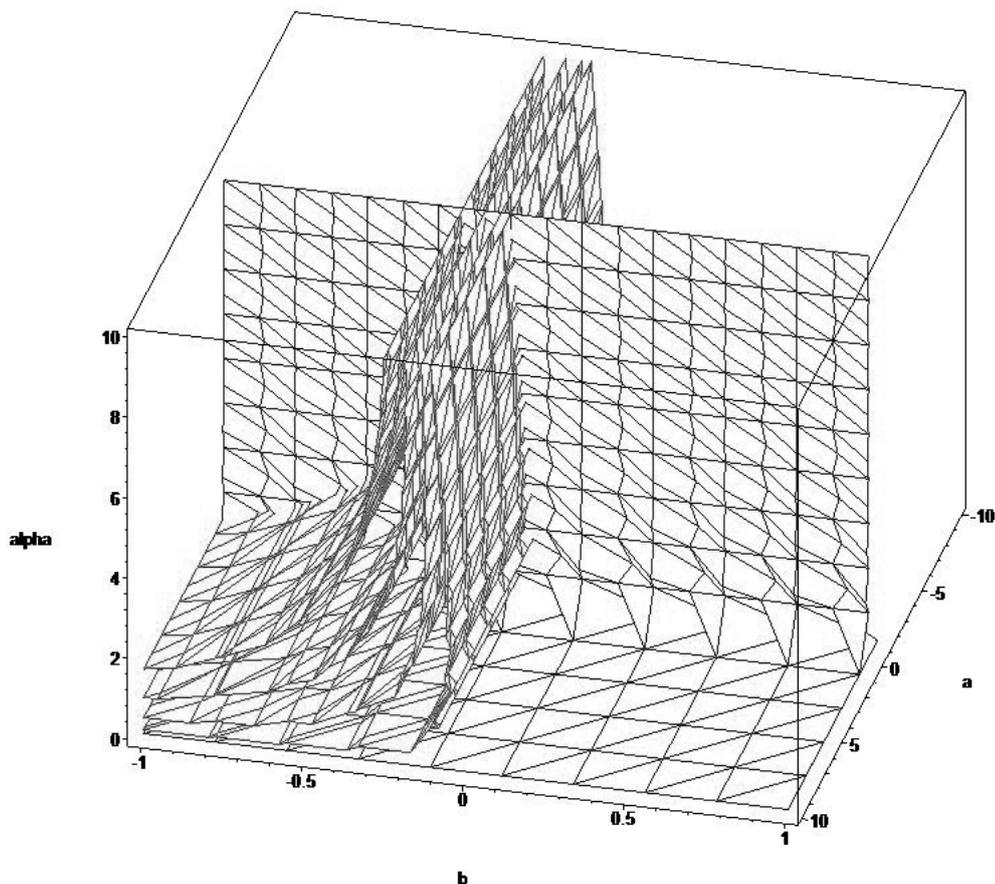


Рис. 1

$C_b(\mathbb{R}_+; E)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на \mathbb{R}_+ и принимающих значения в E , с нормой

$$\|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} = \sup_{t \geq 0} \|\varphi(t)\|_E.$$

На пространстве $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ действуют линейные ограниченные операторы сдвига $\mathbf{T}(t)$ ($t \geq 0$) по следующему правилу:

$$(\mathbf{T}(t)\varphi)(s) = \varphi(s+t) \quad (s \geq 0).$$

Очевидно, что $\mathbf{T}(t_1)\mathbf{T}(t_2) = \mathbf{T}(t_1 + t_2)$, и $\mathbf{T}(0)$ — тождественный оператор; семейство $\{\mathbf{T}(t)\}_{t \geq 0}$ называется *полугруппой трансляций*.

Будем рассматривать также пространство $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ с нормой

$$\|(\varphi, \gamma)\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}} = \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} + |\gamma|. \quad (38)$$

Для всякого множества $P \subset C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ будем обозначать

$$\tilde{P} = \{(\varphi, \gamma) : (\varphi, \gamma) \in P\}.$$

При этом множество \tilde{P} нередко будем рассматривать как подпространство метрического пространства $C_b(\mathbb{R}_+; E)$.

На пространстве $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ зададим операторы сдвига формулой

$$\mathbf{T}(t)(\varphi, \gamma) = (\mathbf{T}(t)\varphi, \gamma) \quad (t \geq 0).$$

Множество P из $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ или из $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ будем называть *трансляционно инвариантным*, если $\mathbf{T}(t)P \subset P, (t \geq 0)$ и *строго трансляционно инвариантным*, если $\mathbf{T}(t)P = P, (t \geq 0)$.

Рассмотрим некоторое непустое множество $\mathcal{H}^+ \subset C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$, которое будем называть *пространством траекторий*; каждый элемент $(\varphi, \gamma) \in \mathcal{H}^+$ будем называть *траекторией*.

Определение 2.1. Будем называть множество $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{H}}^+$ траекторным аттрактором пространства \mathcal{H}^+ , если оно обладает следующими свойствами:

(i) множество \mathcal{U} замкнуто в $\tilde{\mathcal{H}}^+$ и ограничено в норме пространства $C_b(\mathbb{R}_+; E)$;

(ii) множество \mathcal{U} строго трансляционно инвариантно;

(iii) для любого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в пространстве $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$, выполняется *условие притягивания*:

$$\sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \|\mathbf{T}(t)\varphi - \psi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (39)$$

Определение 2.2. Будем называть множество $\mathcal{A} \subset E$ фазовым аттрактором про-

странства \mathcal{U} , если оно обладает следующими свойствами:

(i) множество \mathcal{A} замкнуто и ограничено в E ;

(ii) для любого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в пространстве $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$, выполняется *условие притягивания*:

$$\sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{f \in \mathcal{A}} \|\varphi(t) - f\|_E \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (40)$$

Фазовый аттрактор будем называть *минимальным*, если он удовлетворяет условию

(iii) множество \mathcal{A} является наименьшим (по включению), удовлетворяющим условиям (i), (ii).

2.1. АТТРАКТОРЫ ПРОСТРАНСТВА ВОЗМУЩЕНИЙ

Как уже было сказано, мы рассматриваем возмущения установившейся нулевой концентрации вида

$$\Phi(x, y, t) = \operatorname{Re}(\tilde{\Phi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}), \quad (41)$$

$$(x, y, t) \in [-R, R] \times [0, 1] \times \mathbb{R}_+,$$

где $\tilde{\Phi}(y) = (\mathbf{u}(y), \mathbf{w}(y))$ — решение задачи (15)—(17) с некоторыми значениями параметров $\alpha > 0, c \in \mathbb{C}$, а Re в данном случае, как и ниже в аналогичных, означает взятие действительной части каждой компоненты вектора из пространства \mathbb{C}^2 .

Пусть $c = a + ib : a, b \in \mathbb{R}$, тогда равенство (41) можно записать в виде

$$\Phi(x, y, t) = \left[\operatorname{Re}(\tilde{\Phi}(y)e^{i\alpha(x-at)}) \right] e^{\alpha bt}. \quad (42)$$

Отсюда непосредственно следует оценка

$$\max_{x, y} |\Phi(x, y, t)| = \max_{-1 \leq y \leq 1} |\tilde{\Phi}(y)| e^{\alpha bt}. \quad (43)$$

На самом деле,

$$\begin{aligned} |\Phi(x, y, t)| &= \left| \operatorname{Re} \tilde{\Phi}(y) e^{i\alpha(x-at)} \right| e^{\alpha bt} = \\ &= \left(\left(\operatorname{Re} \mathbf{u}(y) e^{i\alpha(x-at)} \right)^2 + \left(\operatorname{Re} \mathbf{w}(y) e^{i\alpha(x-at)} \right)^2 \right)^{1/2} e^{\alpha bt} \leq \\ &\leq \left(|\mathbf{u}(y)|^2 + |\mathbf{w}(y)|^2 \right)^{1/2} e^{\alpha bt} = |\tilde{\Phi}(y)| e^{\alpha bt}. \end{aligned}$$

Откуда и получается (43).

Из соотношений (42), (43) ясно, что ненулевые возмущения вида (41) могут по-разному вести себя при $t \rightarrow \infty$ в зависимости от $\operatorname{Im} c$: если $\operatorname{Im} c < 0$, то возмущение затухает, если $\operatorname{Im} c = 0$, то возмущение будет являться периодическим, если же $\operatorname{Im} c > 0$, то амплитуда возмущения возрастает и решение уходит на бесконечность. Как было установлено в параг-

рафах 1.3 и 1.4, в нашем случае возможны только затухающие возмущения ($\text{Im}c < 0$). Наше пространство траекторий будет состоять из возмущений именно такого вида.

Далее, необходимо отметить, что каждое затухающее возмущение со временем стремится к нулю, однако, множество всех затухающих возмущений не будет равномерно стремиться к нулю, поскольку скорость затухания каждого возмущения определяется величиной $\alpha \text{Im}c$, которая может быть сколь угодно близка к нулю. Таким образом, для выделения класса множеств, которые будут равномерно притягиваться к аттрактору, нужно учитывать значение величины $\alpha \text{Im}c$ для соответствующих возмущений. Это обстоятельство приводит к тому, что элементами пространства траекторий должны быть пары, состоящие из функции и числового параметра, характеризующего скорость затухания. В этом состоит основное отличие подхода, предложенного в работе [7], от подхода работ [9], [10], [11].

Рассмотрим замкнутую область

$$\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x \leq R, 0 \leq y \leq 1\}.$$

В качестве фазового пространства примем банахово пространство $E = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, состоящее из непрерывных ограниченных вектор-функций, определенных на $\bar{\Omega}$, с нормой

$$\|v\|_E = \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} |v(x, y)|.$$

Определение 2.3. Пространством траекторий системы (15)—(16) или пространством возмущений будем называть множество

$$\mathcal{H}^+ \subset C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R},$$

состоящее из пар (φ, γ) , где функция $\varphi \in C_b(\mathbb{R}_+; E)$ задается равенством

$$\varphi(t)(x, y) = \Phi(x, y, t), \quad (44)$$

в правой части которого стоит возмущение вида (41), соответствующее некоторым значениям параметров $\alpha > 0$, $c \in \mathbb{C}$, $\text{Im}c < 0$, которое удовлетворяет неравенству

$$|\Phi(x, y, t)| \leq R_0 \quad (x, y, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+,$$

с раз и навсегда установленной постоянной R_0 (например, $R_0 = 1$); число же $\gamma > 0$ определяется равенством:

$$\gamma = (-\alpha \text{Im}c)^{-1}.$$

Замечание 2.1. Пространство траекторий непусто: оно заведомо содержит пару $(0, 0)$, где первый нуль означает возмущение, тождес-

твенно равное нулю.

Замечание 2.2. Множество $\tilde{\mathcal{H}}^+$ ограничено в $C_b(\mathbb{R}_+; E)$: для любой функции $\varphi \in \tilde{\mathcal{H}}^+$ имеем

$$\|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} \leq R_0.$$

Замечание 2.3. Пространство траекторий трансляционно инвариантно, то есть

$$\mathbf{T}(\tau)(\mathcal{H}^+) \subset \mathcal{H}^+ \quad (\tau \geq 0).$$

Доказательство данного утверждения может быть найдено в [7].

Лемма 2.1. Для любой траектории $(\varphi, \gamma) \in \mathcal{H}^+$ имеет место оценка

$$\|\varphi(t)\|_E \leq R_0 e^{-t/\gamma} \quad (t \geq 0). \quad (45)$$

Доказательство. Утверждение немедленно следует из определения пространства траекторий и оценки (43).

Лемма 2.2. Траекторным аттрактором пространства траекторий \mathcal{H}^+ является множество $\mathcal{U}_1 = \{0\}$, состоящее из нулевого возмущения (принадлежащего $C_b(\mathbb{R}_+; E)$). Минимальным фазовым аттрактором пространства \mathcal{H}^+ является множество $\mathcal{A} = \{0\}$, состоящее из нулевой функции (принадлежащей E).

Доказательство данного утверждения может быть найдено в [7].

Мы не приводим непосредственных рисунков, поскольку аттрактор, как установлено выше, представляет собой в данном случае одноточечное множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Edwards D. A.* A mathematical model for a dissolving polymer / D. A. Edwards, D. S. Cohen // *AIChE J.* — 1995. — V. 18. — P. 2345—2355.
2. *Cohen D. S.* Shock formation in a multidimensional viscoelastic diffusive system / D. S. Cohen, A. B. White, Jr., T. P. Witelski // *SIAM J. Appl. Math.* — 1995. — V. 55, № 2. — P. 348—368.
3. *Cohen D. S.* Sharp fronts due to diffusion and viscoelastic relaxation in polymers / D. S. Cohen, A. B. White, Jr. // *SIAM J. Appl. Math.* — 1991. — V. 51, № 2. — P. 472—483.
4. *Vorotnikov D. A.* Weak solvability for equations of viscoelastic diffusion in polymers with variable coefficients / D. A. Vorotnikov // *J. Differential Equations.* — 2009. — V. 246, № 3. — P. 1038—1056.
5. *Vorotnikov D. A.* Dissipative solutions for equations of viscoelastic diffusion in polymers / D. A. Vorotnikov // *J. Math. Anal. Appl.* — 2008. — V. 339. — P. 876—888.
6. *Воротников Д. А.* О повторяющейся концентрации и периодических режимах при аномальной

диффузии в полимерах / Д. А. Воротников // Матем. сборник. — 2010. — Т. 201, вып. 1. — С. 59—80.

7. Турбин М. В. Визуализация аттракторов для математической модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров / М. В. Турбин, С. К. Кондратьев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2010. — № 2. — С. 210—236.

8. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

9. Cheryzhov V. V. Attractors for equations of mathematical physics / V. V. Cheryzhov, M. I. Vishik.

— Providence, RI : AMS Colloquium Publications. — 2002. — 363 p.

10. Zvyagin V. G. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov. — Berlin, New York : Walter de Gruyter, 2008. — 232 p.

11. Звягин В. Г. Аттракторы для уравнений моделей движения вязкоупругих сред : учебное пособие / В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. — 266 с.

Турбин Михаил Вячеславович — кандидат физико-математических н., доцент кафедры алгебры и топологических методов анализа математического факультета. Воронежский государственный университет

E-mail: mrmike@math.vsu.ru

Тел.: 8-950-755-86-04

Turbin Mikhail Vyacheslavovich — Cand. Sc. (Phys. and Math.), associate professor at the Chair of Algebra and Topological Methods of Analysis of Mathematical Department, Voronezh State University

E-mail: mrmike@math.vsu.ru

Tel.: 8-950-755-86-04