

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ДВИЖЕНИИ ГАЗА

П. П. Сумец

Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж)

Поступила в редакцию 15.09.2010 г.

Аннотация. В данной работе была исследована структура переходного процесса на основе математической модели слабонервновесного газа. Рассматривался случай высокоскоростного течения со сверхзвуковыми скоростями. Особое внимание было уделено влиянию скорости релаксации на характер распределения параметров течения газа в переходной зоне. Получены соотношения, описывающие изменение плотности газа с учетом времени релаксации.

Ключевые слова: релаксация газа, переходный процесс, сверхзвуковое течение.

Abstract. A structure of the transient building on mathematical model for nonequilibrium gas has been investigated. The case of a high-velocity flow was considered. Special attention is paid to speed relaxation influence on distribution of gas parameters in a transitive zone. There have been obtained dependencies describing distribution of the gas density taking into account a relaxation time.

Keywords: gas relaxation, transient, supersonic flow.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс движения газа со сверхзвуковыми скоростями сопряжен с возникновением поверхностей слабого и сильного разрывов, на которых происходит скачек параметров среды [1]. Если полагать, что изменение параметров среды происходит не скачком на поверхности, а непрерывно внутри некой переходной зоны, то возникает необходимость описать этот переходный процесс. В процессе такого описания временной масштаб становится сравним с временем релаксации газа [2, 3].

При движении с большими скоростями обычно вязкостью газа пренебрегают, а сам газ предполагается политропным, уравнение состояния которого отвечает условию локального термодинамического равновесия [2]. То есть считается, что при движении газа происходящие локальные изменения плотности, давления и других параметров газа протекают настолько быстро, что в каждый рассматриваемый момент времени газ находится в некоем равновесном состоянии. Однако, при рассмотрении процесса в масштабах времени, сравнимых с временем переходного процесса (время релаксации) принцип локального равновесия перестает действовать. Такой случай соответствует

движению газа внутри переходной зоны, толщина которой тем меньше, чем больше интенсивность волны. В этом случае за рассматриваемое время переходный процесс не успевает завершиться, и среда находится в неравновесном состоянии [3].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим одномерный случай сверхзвукового течения газа с учетом процессов релаксации. Уравнения движения, неразрывности и изменение энтропии идеального газа, находящегося в неравновесном макроскопическом состоянии имеют вид [4, 5]

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\alpha \frac{t}{\tau}}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$, $v = v(x, t)$, $p = p(x, t)$,

$\rho = \rho(x, t)$, $\tau \ll 1$, $\alpha > 1$.

Здесь $p(x, t)$ — давление, $\rho(x, t)$ — плотность, $v(x, t)$ — скорость газа, $s(x, t)$ — энтропия, τ — характерное время релаксации, α — коэффициент, характеризующий скорость процесса

релаксации. Пусть в газе распространяется стационарная ударная волна со скоростью $G=const$. Будем рассматривать движение газа вблизи ударной волны. Перейдем в систему координат, связанную с подвижной волной. Кроме того, замедлим время в $1/\tau$ раз. Для этого сделаем следующую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = x - Gt, \\ \theta = \frac{t}{\tau}. \end{cases} \quad (2)$$

Согласно такой замене производные будут иметь вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -G \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt} = -G \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \theta} + v \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \theta} + u \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $u = (v - G)$ есть относительная скорость движения газа. С учетом (3) уравнения (1) приобретают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \tau u \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \tau \rho \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \tau u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial \theta} + \tau u \frac{\partial s}{\partial \xi} = e^{-\alpha \theta}. \end{cases} \quad (4)$$

Получим безразмерный вид уравнений (4). Пусть p_0, ρ_0 — характерные значения давления и плотности, $C_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, — скорость звука ($\gamma = c_p / c_v$ — отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме). Тогда имеем следующую систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mu} + \tilde{p} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mu} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial \theta} + \tilde{u} \frac{\partial s}{\partial \mu} = e^{-\alpha \theta}, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\mu = \frac{\xi}{\tau C_0}, \tilde{p} = \frac{p}{p_0}, \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \tilde{u} = \frac{u}{C_0}. \quad (6)$$

Согласно (6), новая координата μ соответствует растяжению координаты ξ . Будем рассматривать движение, когда \tilde{u} мало, то есть,

когда скорость распространения волны G мало отличается от скорости потока v . Пренебрежем в системе (5) величинами порядка \tilde{u} . Получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \tilde{p} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial \theta} = e^{-\alpha \theta}. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим последнее уравнение системы (7). Воспользуемся известными термодинамическими соотношениями

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{c_v}{\tilde{p}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} - \frac{c_p}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\ln \frac{\tilde{p}^{c_v}}{\tilde{\rho}^{c_p}} \right). \quad (8)$$

Подставим (8) в (7) и проинтегрируем получившееся выражение от 0 до θ

$$\tilde{p} = \tilde{\rho}^\gamma \exp \left(\frac{\gamma-1}{\alpha} - \frac{\gamma-1}{\alpha} e^{-\alpha \theta} \right). \quad (9)$$

Здесь учтено, что $c_p - c_v = 1$. С помощью (9) найдем скорость распространения волны сжатия \tilde{C}^2

$$\tilde{C}^2 = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}} = \tilde{\rho}^{\gamma-1} \exp \left(\frac{\gamma-1}{\alpha} - \frac{\gamma-1}{\alpha} e^{-\alpha \theta} \right). \quad (10)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mu} &= \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \mu} = \tilde{C}^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \mu} = \\ &= \tilde{\rho}^{\gamma-1} \exp \left(\frac{\gamma-1}{\alpha} - \frac{\gamma-1}{\alpha} e^{-\alpha \theta} \right) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \mu}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (7) получаем систему уравнений в безразмерном виде для скорости и плотности

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \tilde{p} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \tilde{\rho}^{\gamma-1} \exp \left(\frac{\gamma-1}{\alpha} - \frac{\gamma-1}{\alpha} e^{-\alpha \theta} \right) \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \mu} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (12) по переменной θ , а второе по переменной μ и выразим плотность, получим одно уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \mu^2} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(e^{(\gamma-1)\tilde{p}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mu} \right). \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \ln \tilde{\rho}, \\ \varphi &= \int \exp\left(\frac{\gamma-1}{2\alpha} - \frac{\gamma-1}{2\alpha} e^{-\alpha\theta}\right) d\theta = \\ &= \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{\gamma-1}{2\alpha}\right) Ei\left(1, \frac{\gamma-1}{2\alpha} e^{-\alpha\theta}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

Ei — интеграл Эйлера. Уравнение (13) имеет общее решение

$$\bar{\rho}(\mu, \varphi) = \frac{2}{\gamma-1} \ln|A\mu + B| - \frac{2}{\gamma-1} \ln|A\varphi + C|, \quad (15)$$

где A, B, C — произвольные константы.

Если вернуться к старым безразмерным переменным, то получим решение в автономной форме

$$\tilde{\rho}(\mu, \theta) = \left| \frac{A\mu + B}{\frac{A}{\alpha} \exp\left(\frac{\gamma-1}{2\alpha}\right) Ei\left(1, \frac{\gamma-1}{2\alpha} e^{-\alpha\theta}\right) + C} \right|^{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (16)$$

СТРУКТУРА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Полученная формула (16) описывает распределение плотности в растянутой координате и замедленном времени в подвижной системе координат. Вызывает интерес исследование влияния параметра α на характер распределения. На рисунке 1 показан вариант распределения плотности, иллюстрирующий характер переходного процесса на фронте распространяющейся волны. Видим, что существует зона переходного процесса. Причем, чем больше скорость релаксации α , тем меньше ширина переходной зоны. В равновесном случае $\alpha = \infty$

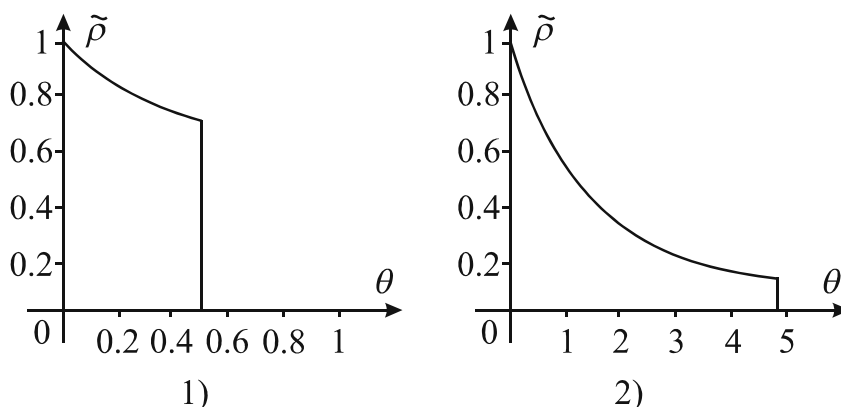


Рис. 1. Распределение плотности при разных значениях параметра α : 1) $\alpha = 10^9$, 2) $\alpha = 10^8$. Значения параметров: $A = 1, C = B = 10, \gamma = 1.4, \mu = 0$

и переходной зоны нет, так как предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{A}{\alpha} \exp\left(\frac{\gamma-1}{2\alpha}\right) Ei\left(1, \frac{\gamma-1}{2\alpha} e^{-\alpha\theta}\right) = A \quad (17)$$

и процесс от времени не зависит.

Рисунок 2 приводит зависимость плотности от времени θ и параметра α . Видим, что при малых значениях α зона релаксации неограниченно растет. Характер изменения подчинен поведению интеграла Эйлера.

В итоге, учет процесса релаксации приводит к следующей схеме (рис.3). Пунктиром обозначены равновесные значения плотности, которые в случае локального термодинамического равновесия в каждый момент времени принимают постоянные значения и сохраняют их в течение промежутка времени релаксации Δ . Непрерывной линией изображены изменения плотности с учетом релаксации, которые носят затухающий характер и стремятся к равновесному значению согласно формуле (16). В масштабе «замедленного» времени переходный интервал равен Δ и зависит от скорости релаксации α . Причем, поскольку переходная зона как бы передвигает передний фронт относительно распространяющейся со скоростью G волны на некоторое расстояние за время релаксации Δ , то абсолютная скорость волны увеличивается до некоторого значения с течением времени. Такое представление согласуется с известными результатами [6, 7]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение можно сказать, что полученная модель привела к следующим результатам. Вблизи фронта распространяющейся с постоянной скоростью волны существует переходная

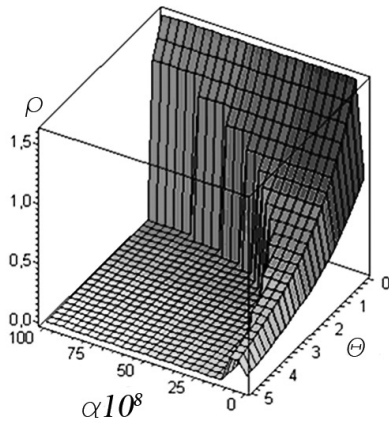


Рис. 2. Зависимость безразмерной плотности от параметра α и безразмерного времени θ при $\mu = 1$, $A = 1$, $B = C = 10$

зона, являющаяся следствием наличия процессов релаксации. Ширина этой зоны зависит от скорости релаксации и тем меньше, чем больше скорость релаксации. Получены зависимости, определяющие поведение плотности газа в переходной зоне. Процесс носит затухающий характер. В предельном случае при бесконечной скорости релаксации переходной зоны нет, что соответствует случаю локального термодинамического равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эртель Г. Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике/ Г. Эртель. — Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. — 776 с.
2. Карлов Н. В. Колебания, волны, структуры/ Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. — М.: Физматлит, 2003. — 496 с.
3. Ландау Л. Д. Теоретическая физика. В 10 т. Т. X. Физическая кинетика/ Л. Д. Ландау, Л. П. Питаевский. — М.: Физматлит, 2002. — 536 с.

Сумец Павел Петрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Воронежского военного авиационного инженерного университета.

E-mail: sumets@yandex.ru

Тел. (4732)-31-11-44

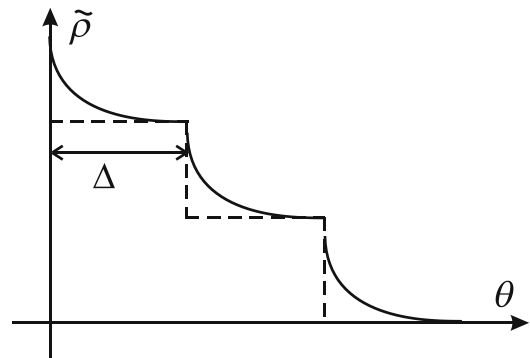


Рис. 3. Схема процесса релаксации

4. Сумец П. П. Учет процессов релаксации при моделировании сверхзвукового течения газа/ П. П. Сумец // Материалы VI всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». Томск: НИИПММ ТГУ, 2008. — С. 498—499.

5. Быкова М.И. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры: монография/ М. И. Быкова, Н. Д. Вервейко, П. П. Сумец, С. А. Шашкина; Воронежский государственный университет. — Воронеж: ИПЦ Воронежского государственного университета, 2010. — 192 с.

6. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса/ С. Л. Соболев // Успехи физических наук. Т. 167. — 1997. — № 10. — С. 1095—1106.

7. Макарян В. Г. Слабые ударные волны в неравновесных средах с отрицательной дисперсией/ В. Г. Макарян, Н. Е. Молевич // Журнал технической физики. Т. 75. — 2005. — № 6. — С. 13—18.

Sumets Pavel Petrovich — the candidate of physical and mathematical sciences, the senior lecture of chair of mathematics of Military aviation engineering university (Voronezh).

E-mail: sumets@yandex.ru

Tel. (4732)-31-11-44