

# КОНДУКТИВНО-ЛАМИНАРНАЯ ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ КАВЕРНЕ С ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ СТЕНОК

М. И. Слюсарев, Е. Д. Чертов, В. И. Ряжских, А. А. Богер

*Воронежская государственная технологическая академия*

Поступила в редакцию 12.07.2010 г.

**Аннотация.** Предложена модель кондуктивно—ламинарной естественной конвекции ньютоновской тепловыделяющей жидкости в квадратной каверне с постоянной температурой стенок, которая формализована в виде неоднородного бигармонического дифференциального уравнения относительно функции тока, отвечающей условиям “прилипания” и “непротекания” на границах области. Последовательным применением конечного интегрального синус—преобразования по координатам получено аналитическое решение задачи в виде обобщённых рядов Фурье.

**Ключевые слова:** естественная конвекция, кондуктивный режим, аналитическое решение, квадратная каверна.

**Abstract.** A conductive-laminar natural convection model for Newtonian fluids in a square cavity at a constant walls temperature in the presence of volumetric heat sources, which is formalized in the non-homogeneous biharmonic differential equation form for the stream function, satisfying no-slip and impermeable wall boundary conditions, is offered. Subsequent application of finite integral sine transform on coordinates an analytical solution of the problem in the form of generalized Fourier series is received.

**Key words:** natural convection, conductive regime, analytical solution, square cavity.

**Введение.** Проблема идентификации явлений тепломассопереноса тепловыделяющих сред при свободной конвекции с различными тепловыми условиями на границах давно привлекает пристальное внимание исследователей в связи с необходимостью безопасного хранения отработанных радиоактивных жидких сред ядерной энергетики [1], а также при моделировании режимов функционирования химических и биохимических реакторов непроточного типа [2, 3]. Так, например, перед переработкой тепловыделяющих радиоактивных жидкостей их выдерживают во временных хранилищах от нескольких суток до десятков лет с целью уменьшения удельной активности. При временном хранении высокоактивных жидкостных отходов предусматривается их принудительное охлаждение. Нарушение режима хранения может иметь катастрофические последствия [4].

В основе анализа внутренних задач свободной конвекции тепловыделяющих жидкостей лежат классические уравнения Обербека—Бус-

синеска с наличием источников слагаемого в уравнении переноса теплоты [5], поэтому возможности получения их аналитического решения в общей постановке остаются крайне ограниченными [6] и предпочтение отдаётся численным методам [7]. Однако отсутствие тестовых задач вносит сомнения в корректность получаемых результатов при использовании тех или иных алгоритмов. Одним из способов синтеза таких тестов является упрощение исходных уравнений путём принятия физически обоснованных допущений, позволяющих перейти в формат линейной постановки, допускающей аналитическое решение.

**Формулировка задачи.** Уравнения Обербека—Буссинеска в переменных Гельмгольца [8], описывающие свободноконвективное течение вязкой несжимаемой тепловыделяющей жидкости в каверне при постоянной температуре границ, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \\ = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} + \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial X}; \end{aligned} \quad (1)$$

© Слюсарев М. И., Чертов Е. Д., Ряжских В. И., Богер А. А., 2011

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial T}{\partial Y} = \\ = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) + \frac{1}{\text{Pr}}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Omega(X, Y, 0) = \Psi(X, Y, 0) = T(X, Y, 0) = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Psi(0, Y, \theta) = \Psi(1, Y, \theta) = \Psi(X, 0, \theta) = \\ = \Psi(X, 1, \theta) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(0, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Psi(1, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Psi(X, 0, \theta)}{\partial Y} = \\ = \frac{\partial \Psi(X, 1, \theta)}{\partial Y} = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T(0, Y, \theta) = T(1, Y, \theta) = T(X, 0, \theta) = \\ = T(X, 1, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\theta = \tau/\bar{\tau}$ ;  $X = x/h$ ;  $Y = y/h$ ;  $U = \partial \Psi / \partial Y$ ;  $V = -\partial \Psi / \partial X$ ;  $\Omega = \partial V / \partial X - \partial U / \partial Y$ ;  $U = u/w$ ;  $V = v/w$ ;  $T = (t - t_0) \lambda / (qh^2)$ ;  $\text{Pr} = \nu/a$  — число Прандтля;  $\text{Gr} = gh^5 q \beta / (\lambda \nu^2)$  — число Грасгофа;  $\bar{\tau} = h/w$ ;  $w = \nu/h$ ;  $\tau$  — текущее время, с;  $x, y$  — декартовы координаты, м;  $h$  — длина стороны каверны, м;  $u, v$  — компоненты скорости жидкости в направлении осей  $ox$  и  $oy$ , м/с;  $\lambda, \beta, \nu, a$  — коэффициенты теплопроводности, температурного расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, Вт/(м·с),  $\text{K}^{-1}$ ,  $\text{m}^2/\text{с}$ ,  $\text{m}^2/\text{с}$  соответственно;  $t$  — локальная температура жидкости,  $\text{K}$ ;  $t_0$  — температура стенок каверны,  $\text{K}$ ;  $q$  — объёмная мощность тепловыделения в жидкости,  $\text{Вт}/\text{м}^3$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\text{м}/\text{с}^2$ .

В предположении стационарности задачи и малой по абсолютной величине скорости течения жидкости, а также исключив  $\Omega$ , система (1)—(7) может быть упрощена:

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4} = \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial X}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = -1; \quad (9)$$

$$\Psi(0, Y) = \Psi(1, Y) = \Psi(X, 0) = \Psi(X, 1) = 0; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(0, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Psi(1, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Psi(X, 0)}{\partial Y} = \\ = \frac{\partial \Psi(X, 1)}{\partial Y} = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$T(0, Y) = T(1, Y) = T(X, 0) = T(X, 1) = 0. \quad (12)$$

**Решение.** Несопряжённый характер полученной системы (8)—(12) позволяет вначале решить тепловую задачу (9), (12), а затем гидродинамическую (8), (10), (11).

Заметим, что по своей математической постановке задача (9), (12) аналогична задаче напорного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале прямоугольного сечения, решение которой получено в [9]. Но как следует из дальнейших рассуждений, адаптировать его под решение гидродинамической задачи затруднительно из-за различного выбора базисных функций. Поэтому, применив последовательно конечное интегральное синус-преобразование [10] соответственно по переменной  $X$  и  $Y$ , найдём решение тепловой задачи в изображениях

$$T_{XY} = \frac{(\cos \alpha - 1)(\cos \beta - 1)}{\alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2)}; \quad (13)$$

где  $\alpha, \beta$  — характеристические числа, определяемые из уравнений  $\sin \alpha = \sin \beta = 0$ . Оригинал от (13) по формуле обращения [10] приводит к выражению для поля температур

$$\begin{aligned} T(X, Y) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\cos \alpha_k - 1)(\cos \beta_l - 1)}{\alpha_k \beta_l (\alpha_k^2 + \beta_l^2)} \times \\ \times \sin(\alpha_k X) \cdot \sin(\beta_l Y), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\alpha_k = \pi k$ ,  $\beta_l = \pi l$ .

Переформулируем гидродинамическую задачу, переобозначив функцию тока  $\Phi = \Psi/\text{Gr}$  и подставив частную производную по  $X$  от (14) в правую часть (8), в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial Y^4} = \\ = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\cos \alpha_k - 1)(\cos \beta_l - 1)}{\alpha_k \beta_l (\alpha_k^2 + \beta_l^2)} \times \\ \times \alpha_k \cos(\alpha_k X) \cdot \sin(\beta_l Y); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Phi(0, Y) = \Phi(1, Y) = \Phi(X, 0) = \Phi(X, 1) = 0; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(0, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0)}{\partial Y} = \\ = \frac{\partial \Phi(X, 1)}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Вновь применяя последовательно конечное интегральное синус-преобразование по переменным  $X$  и  $Y$  к системе (15)—(17), получим

решение гидродинамической задачи в изображениях

$$\Phi_{XY} = \frac{\lambda E (\cos \lambda - 1) + \mu F (\cos \mu - 1)}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\cos \alpha_k - 1)(\cos \beta_l - 1)}{\alpha_k \beta_l (\alpha_k^2 + \beta_l^2)} \cdot \alpha_k \times \left[ \frac{1}{\lambda + \alpha_k} + \frac{1}{\lambda - \alpha_k} - \frac{\cos(\lambda + \alpha_k)}{\lambda + \alpha_k} - \frac{\cos(\lambda - \alpha_k)}{\lambda - \alpha_k} \right] \times \left[ \frac{\sin(\mu - \beta_l)}{\mu - \beta_l} - \frac{\sin(\mu + \beta_l)}{\mu + \beta_l} \right] \right\}, \quad (18)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — характеристические числа, определяемые из уравнений  $\sin \lambda = \sin \mu = 0$ ;

$$E = F_Y \left[ \frac{\partial^2 \Phi(1, Y)}{\partial X^2} \right] = F_Y \left[ \frac{\partial^2 \Phi(0, Y)}{\partial X^2} \right];$$

$$F = F_Y \left[ \frac{d^2 \Phi_X(1)}{\partial Y^2} \right] = F_Y \left[ \frac{d^2 \Phi_X(0)}{\partial Y^2} \right],$$

где  $\Phi_X = F_X [\Phi]$ ;  $F_X, F_Y$  — операторы конечного интегрального синус-преобразования по переменным  $X$  и  $Y$ .

Результат обращения (18) есть

$$\Phi(X, Y) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda_n E_n (\cos \lambda_n - 1) + \mu_m F_m (\cos \mu_m - 1)}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\cos \alpha_k - 1)(\cos \beta_l - 1)}{\alpha_k \beta_l (\alpha_k^2 + \beta_l^2)} \cdot \alpha_k \times \left[ \frac{1}{\lambda_n + \alpha_k} + \frac{1}{\lambda_n - \alpha_k} - \frac{\cos(\lambda_n + \alpha_k)}{\lambda_n + \alpha_k} - \frac{\cos(\lambda_n - \alpha_k)}{\lambda_n - \alpha_k} \right] \times \left[ \frac{\sin(\mu_m - \beta_l)}{\mu_m - \beta_l} - \frac{\sin(\mu_m + \beta_l)}{\mu_m + \beta_l} \right] \right\} \right\} \sin(\lambda_n X) \sin(\mu_m Y), \quad (19)$$

где  $\lambda_n = \pi n$ ,  $\mu_m = \pi m$ .

Ввиду того, что

$$\lim_{\alpha_k \rightarrow \lambda_n} \left[ \frac{1}{\lambda_n - \alpha_k} - \frac{\cos(\lambda_n - \alpha_k)}{\lambda_n - \alpha_k} \right] = \lim_{\beta_l \rightarrow \mu_m} \frac{\sin(\mu_m - \beta_l)}{\mu_m - \beta_l} = 1$$

и, следовательно, выражения в квадратных скобках в (19) равны 1 при  $\alpha_k = \lambda_n$  и  $\beta_l = \mu_m$ , а в остальных случаях нулю, поэтому оконча-

тельное решение гидродинамической задачи запишется

$$\Psi(X, Y) = 4 \text{Gr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\lambda_n K_n (\cos \lambda_n - 1) + \mu_m K_m (\cos \mu_m - 1)}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} + \frac{(\cos \lambda_n - 1)(\cos \mu_m - 1)}{\mu_m (\lambda_n^2 + \mu_m^2)} \right] \sin(\lambda_n X) \sin(\mu_m Y). \quad (20)$$

Коэффициенты  $K$  в (20) определяются таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям (17), что приводит к необходимости решения линейной системы относительно  $K$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\lambda_n K_n (\cos \lambda_n - 1) + \mu_m K_m (\cos \mu_m - 1)}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} + \frac{(\cos \lambda_n - 1)(\cos \mu_m - 1)}{\lambda_n \mu_m (\lambda_n^2 + \mu_m^2)} \right] \lambda_n = 0. \quad (21)$$

**Анализ решения.** Из (14) и (20) видно, что чётные слагаемые рядов равны нулю, поэтому в расчётах суммирование осуществляется для нечётных индексов. Решение системы (21) осуществлено итерационным методом неполной релаксации [11]. Найденные  $K$  уменьшаются по абсолютной величине с возрастанием номера, что свидетельствует о сходимости полученных решений. Как и следовало ожидать, поле температур представляет собой унимодальную функцию (рис. 1) с максимумом в центре каверны, причём максимальное значение безразмерной температуры, равное  $T_{\max} = 0,0737$ , является инвариантным к теплофизическим и геометрическим характеристикам системы. Подобную структуру имеет и безразмерная функция тока с максимальным значением  $\Psi_{\max} = 0,894 \cdot \text{Gr}$  при числе слагаемых ряда (20)  $n = m = 500$  (рис. 2). Анализ поля скоростей (рис. 3) позволяет более детально раскрыть структуру свободноконвективного течения, которое представляет собой циркуляционный контур с восходящим движением жидкости у одной боковой стенки и нисходящим — у другой. При этом вблизи стенок имеет место возрастание скорости течения от минимальных значений на диагоналях около углов каверны до максимального значения  $V_X(0, 5; 0, 9325)/\text{Gr} = V_Y(0, 5; 0, 9325)/\text{Gr} = 3,173$  при  $n = m = 500$  на осях симметрии, а внутри области образу-

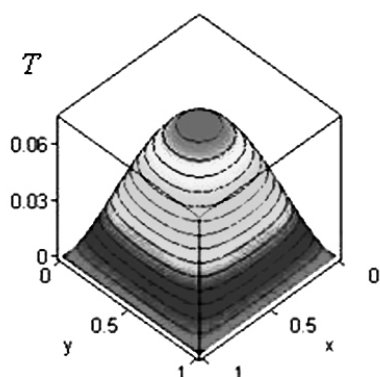


Рис. 1. Поле температур

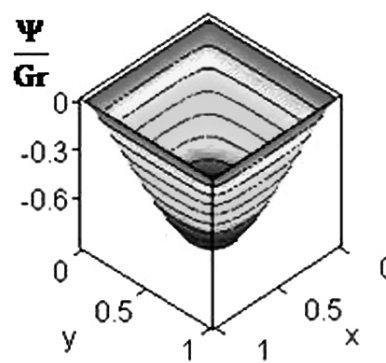


Рис. 2. Функция тока

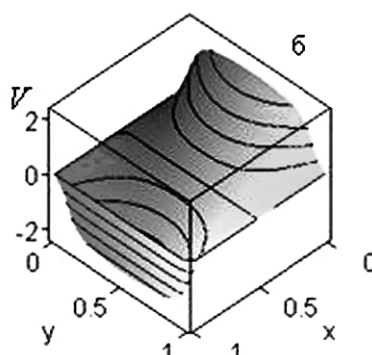
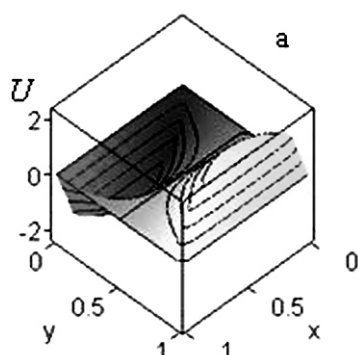


Рис. 3.. Поле скоростей: а —  $V_y = \frac{\partial \Psi}{\partial X}$ ; б —  $V_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial Y}$

ется малоподвижное ядро, для которого по любому направлению к центру скорость плавно уменьшается до нуля.

**Заключение.** Полученное решение может выступать не только как тестовая задача для проверки вычислительных процедур, но и представляет самостоятельный интерес для оценки явлений переноса при свободной конвекции тепловыделяющих жидкостей в замкнутых объемах при небольших числах Грасгофа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Essam P.* Free convection of heat generating fluids in cylindrical tanks // *Nuclear Engineering and Design*. — 1970. — v. 11. № 1. — p. 57 — 68.
2. *Campbell A.N., Cardoso S.S. Hayhurst A.N.* A comparison of measured temperatures with those calculated numerically and analytically for an exothermic chemical reaction inside a spherical batch reactor with natural convection // *Chemical Engineering Science*. — 2007. — v. 62. — № 11. — P. 3068 — 3082.
3. *Kim S.-J., Wang F., Burns M.A., Kurabayashi K.* Temperature — programmed natural convection for micromixing and biochemical reaction in a single

microfluidic chamber // *Analytical Chemistry*. — 2009. — v. 81. — № 11. — pp. 4510 — 4516.

4. *Власов В.К.* Кыштымская авария крупным планом // *Природа*. — 1990. — № 5. — С. 47 — 75.

5. *Holzbecher M., Steiff A.* Laminar and turbulent free convection in vertical cylinders with internal heat generation // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. — 1995. v. 38. — №. 15. — P. 2893 — 2903.

6. *Ibrahim F.S., Elaiw A.M., Bakr A.A.* Effect of the chemical reaction and radiation absorption on the unsteady MHD free convection flow past a semi infinite vertical permeable moving plate with heat source and suction // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2008. v. 13. — №. 6. — P. 1056 — 1066.

7. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.

8. *Геххарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Самакия Б.* Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. В 2-х кн., кн. 1. — М.: Мир, 1991. — 678 с.

9. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.

10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973. — 832 с.

*Слюсарев М. И. — кандидат технических наук, доцент кафедры “Процессы и аппараты химических и пищевых производств” Воронежской государственной технологической академии*

*Тел. (4732)553554*

*E-mail: kafvm@vgta.vrn.ru*

*Чертов Е. Д. — доктор технических наук, ректор Воронежской государственной технологической академии, профессор, заведующий кафедрой технической механики*

*Тел. (4732) 55-35-00*

*E-mail: ched@vgta.vrn.ru*

*Рязжских В. И. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Воронежской государственной технологической академии*

*Тел. (4732)553554*

*E-mail: kafvm@vgta.vrn.ru*

*Богер А. А. — кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики Воронежской государственной технологической академии*

*Тел. (4732)553554*

*E-mail: kafvm@vgta.vrn.ru*

11. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М. — Л.: Гл. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. — 734 с.

*Slyusarev M. I. — Candidate of engineering sciences, Assistant professor, the Department of “Processes and equipment of chemical and food industry” Voronezh State Technological Academy*

*Tel. (4732) 553554*

*E-mail: kafvm@vgta.vrn.ru*

*Chertov E. D. — Doctor of engineering sciences, Rector Voronezh State Technological Academy, Full professor, Head of the Department of Technical Mechanics*

*Tel. (4732) 55-35-00*

*E-mail: ched@vgta.vrn.ru*

*Ryazhskikh V. I. — Doctor of engineering sciences, Head of the department of higher mathematic Voronezh State Technological Academy*

*Tel. (4732) 553554*

*E-mail: kafvm@vgta.vrn.ru*

*Boger A. A. — Candidate of engineering sciences, Assistant professor, the Department of higher mathematic Voronezh State Technological Academy*

*Tel. (4732) 553554*

*E-mail: kafvm@vgta.vrn.ru*