УДК 543.544

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ РЕШЕНИЙ СКАЛЯРНОГО И МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

В. Н. Орлов

Российский государственный социальный университет филиал в г. Чебоксары

Поступила в редакцию 30.09.2010 г.

Аннотация. Приведен эффективный критерий существования подвижных особых точек решений скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати в комплексной области.
Ключевые слова: точный критерий, подвижная особая точка, дифференциальное уравнение Риккати, существование, задача Коши.

Abstract: The existence of the effective criteria of movable special points of solutions of Riccati's scalar and matrix differential equations in the complex area is given.
Kej words: exact criteria, movable special points, Riccati's differential equations, existence, Cauchy problem.

ВВЕДЕНИЕ

К скалярному дифференциальному уравнению Риккати, не разрешаемому в общем случае в квадратурах, приводят задачи: из теории оптимального управления, в частности при построении оптимальных фильтров Калмана—Бьюси [1-6]; при определенных значениях параметров к нему сводятся нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка — уравнения Пенлеве [7—9]. К матричному дифференциальному уравнению Риккати, также не разрешаемому в квадратурах, приводит задача из экономики — формирование портфеля ценных бумаг [10].

Характерной особенностью рассматриваемых уравнений является наличие у решений подвижных особых точек, которые не позволяют применять известные приближенные аналитические и численные методы к решению этих уравнений в силу не адаптированности этих методов к указанным точкам. Немецкому математику Фуксу принадлежит классификация особых точек дифференциальных уравнений на неподвижные и подвижные [11].

Определение 1. Особые точки интегралов дифференциальных уравнений, положение которых не зависит от начальных данных, определяющих эти интегралы, называют неподвижными особыми точками.

Определение 2. Особые точки интегралов дифференциальных уравнений, положение которых зависит от начальных данных, называют подвижными особыми точками.

Если положение неподвижных особых точек интегралов определяется непосредственно по самому дифференциальному уравнению, то задача определения положения подвижных особых точек по виду уравнения на данный момент времени пока остается открытой.

В связи с этим предпринимались попытки решения указанных уравнений [12—20], но все они не представляли единого подхода, либо представляли лишь асимптотику [21].

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Предлагаемый вариант приближенного решения дифференциальных уравнений Риккати основан на решении следующих задач:

1) доказательство теорем существования решений как в области аналитичности, так и окрестности подвижной особой точки.

2) построение аналитического приближенного решения рассматриваемых уравнений в области аналитичности и окрестности подвижной особой точки.

3) исследование влияния возмущения исходных данных и подвижной особой точки на аналитические приближенные решения.

4) получение подвижной особой точки решений рассматриваемых уравнений с заданной точностью.

Указанные задачи решены в работах [22—27]. В данной работе предлагается новый критерий существования подвижной особой точки в комплексной области. Он, в отличие от существующего [25], основан в доказательстве на понятии неправильной линии. Такой подход делает алгоритм поиска подвижной особой точки более эффективным с точки зрения оптимальности вычислительного процесса.

Скалярное дифференциальное уравнение Риккати

$$y'(z) = P(z)y^2(z) + Q(z)y(z) + R(z)\,, \qquad (1)$$

где $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ — аналитические функции в рассматриваемой области. С помощью замены переменной

$$y(z) = \frac{u - \dfrac{1}{2}\left(Q(z) + \dfrac{P'(z)}{P(z)}\right)}{P(z)}$$

уравнение (1) приводится к виду

$$u'(z) = u^2(z) + r(z)\,,$$

где

$$r(z) = -\left(\frac{1}{4}\left(Q(z) + \frac{P'(z)}{P(z)}\right)^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\left(Q'(z) + \frac{P''(z)}{P(z)} - \left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)^2\right)\right) + R(z)P(z)$$

в каждой области, в которой $P(z)$ не обращается в нуль [28].

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(z) = y^2(z) + r(z)\,, \qquad (2)$$

$$y(z_0) = y_0 \qquad (3)$$

и задачу

$$w_1'(z) = -1 - r(z)\cdot w_1^2(z)\,, \qquad (4)$$

$$w_1(z_0) = w_{1,0}\,, \qquad (5)$$

полученную из (2)—(3) с помощью инверсии

$$y(z) = \frac{1}{w_1(z)}\,.$$

Представим решение уравнения (4) в виде

$$w_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$$

и рассмотрим два фазовых пространства

$$\mathbf{\Phi}_1 = \{x, y, u_1(x,y)\}\,,\ \mathbf{\Phi}_2 = \{x, y, v_1(x,y)\}\,,$$

характеризующие решение уравнения (4).

Напоминаем определения [25].

Определение 3. Линию в некоторой области комплексной плоскости назовем правильной, если для координат точек этой линии существует взаимно однозначное соответствие.

Определение 4. Линию в некоторой области комплексной плоскости назовем неправильной в направлении оси Ox (Oy), если на этой линии существуют, по крайней мере, две точки, имеющие одинаковые вторые (первые) координаты.

Определение 5. Неправильную линию в направлении осей Ox и Oy назовем просто неправильной линией.

Теорема 1. Для того, чтобы z^* была подвижной особой точкой решения $y(z)$ задачи Коши (2)-(3) для дифференциального уравнения Риккати, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области G_1 *($z^* \in G_1$)* фазовых пространств $\mathbf{\Phi}_1$ *и* $\mathbf{\Phi}_2$ функции $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$ являлись непрерывными относительно своих аргументов и меняли знаки при переходе через точку $z^*(x^*, y^*)$, двигаясь последовательно вдоль некоторых линии l_1 и l_2 неправильных в направлении осей OX и OY соответственно ($z^* \in l_1 \subset G_1$, $z^* \in l_2 \subset G_1$, $l_1 \in \mathbf{\Phi}_1$, $l_2 \in \mathbf{\Phi}_2$).

Доказательство. *Необходимость.* z^* — подвижная особая точка решения задачи Коши (2)—(3). На основании теоремы существования решения задачи Коши (2)—(3) в окрестности подвижной особой точки [24] имеем

$$y(z) = (z - z^*)^\rho \cdot \sum_0^\infty C_n (z - z^*)^n\,, \qquad (6)$$

где $\rho = -1$, $C_0 = -1$. Следовательно, существует некоторая окрестность G_1 точки z^*, в которой решение $y(z)$ будет определяться главной частью в формуле (6):

$$y(z) = O\left(-\frac{1}{z - z^*}\right).$$

Тогда в силу инверсии для решения $w_1(z)$ уравнения (4) в области G_1 будем иметь

$$w_1(z) = O(-(z - z^*))\,.$$

При этом

$$\operatorname{sign}(u_1(x,y)) = \operatorname{sign}(-x + x^*)\,,$$

$$\operatorname{sign}(v_1(x,y)) = \operatorname{sign}(-y + y^*)\,.$$

Выбираем в качестве неправильной линии в направлении оси OX прямую l_1: $y = \text{const}$

(фиксируем переменную y). Двигаясь вдоль неправильной линии l_1, с учетом связи решений задач (2)-(3), (4)-(5) и теоремы существования решения задачи (2)-(3) в окрестности подвижной особой точки [24], функция $u_1(x,y) \in C(G_1)$ ($C(G_1)$ - класс непрерывных функций в области G_1) и меняет знак при переходе через точку x^*. Повторяем эту процедуру. В качестве неправильной линии в направлении оси OY берём прямую l_2: $x = x^* = \text{const}$, фиксируем переменную x. Получаем аналогичный результат для функции $v_1(x,y)$: $v_1(x,y) \in C(G_1)$ и меняет знак при переходе через точку y^*. Таким образом, $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y) \in C(G_1)$, и меняют знак при переходе через точку z^*. Тем самым завершаем первую часть теоремы.

Достаточность. Выбираем в качестве неправильной линии в направлении оси OX прямую l_1: $y = \text{const}$. Тогда в силу условия настоящей теоремы и теоремы существования решения в окрестности подвижной особой точки [24], функция $u_1(x, \text{const})$ на концах некоторого отрезка $[x_1, x_2] \subset G_1$ принимает значения разных знаков. Следовательно, в силу теоремы Больцано—Коши существует точка x^*, в которой $u_1(x^*, \text{const}) = 0$. Аналогичным образом, выбирая для движения в качестве неправильной линии в направлении оси OY прямую l_2: $x = \text{const} = x^*$, получаем точку y^*, в которой $v_1(x^*, y^*) = 0$. В итоге $u_1(x^*, y^*) = v_1(x^*, y^*) = 0$. Учитывая связь $y(z)$ и $w_1(z)$, получаем доказательство теоремы.

Рассмотрим нестационарное матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$Y'(z) = -A \cdot Y(z) \cdot A^T - Y(z) \cdot C \cdot Y(z) + X(z), \quad (7)$$

где $Y(z)$, $A(z)$, $C(z)$, $X(z)$ — матрицы размерности $m \times m$.

Предположим, что $A(z)$ и $C(z)$ являются непрерывными в некоторой облас-ти. Тогда с помощью преобразований $Y = (Z + B) \cdot C^{-1}$ или $Y = C^{-1} \cdot (Z + B)$, уравнение (7) приводится соответственно к виду

$$Z' = -G \cdot Z - Z^2 + Q$$

или виду

$$Z' = -Z \cdot G - Z^2 + Q$$

в каждой области, в которой $D(C(z)) \neq 0$ [28], где в первом случае

$$G = A - B,, \; B = C^{-1} \cdot C' - C^{-1} \cdot A^T \cdot C,$$
$$Q = B \cdot C^{-1} \cdot C' - A \cdot B - B \cdot C^{-1} \cdot A^T \cdot C -$$
$$-B^2 + X \cdot C - B',$$

а во втором —

$$G = A^T + B, \; B = C' \cdot C^{-1} - C \cdot A \cdot C^{-1},$$
$$Q = C \cdot X - B^2 + B \cdot A^T + C' \cdot C^{-1} \cdot B -$$
$$-C \cdot A \cdot C^{-1} \cdot B - B'.$$

Рассмотрим задачу Коши для нестационарного матричного дифференциального уравнения Риккати

$$Y'(z) = -A(z) \cdot Y(z) - Y^2(z) + B(z), \quad (8)$$

$$Y(z_0) = Y_0. \quad (9)$$

С помощью инверсии $Y(z) = Y_1^{-1}(z)$ из (8) получаем матричное дифференциальное уравнение

$$Y_1'(z) = A(z)Y_1(z) + I - Y_1(z)B(z)Y_1(z). \quad (10)$$

Представим решение уравнения (10) в виде

$$Y_1(z) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

где $P(x,y) = \left\| p_{ij}(x,y) \right\|$ и $Q(x,y) = \left\| q_{ij}(x,y) \right\|$, $i, j = 1, \ldots, m$. Обозначим

$$\mathbf{\Phi}_{ij} = \{x, y, p_{ij}(x,y)\} \text{ и } F_{ij} = \{x, y, q_{ij}(x,y)\}$$

фазовые пространства решения уравнения (10).

Теорема 2. Для того, чтобы z^* была подвижной особой точкой решения *Y(z)* задачи Коши (8)—(9) для матричного дифференциального уравнения Риккати, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области G_2 ($z^* \in G_2$) фазовых пространств $\mathbf{\Phi}_{ij}$ и F_{ij} функции $p_{ij}(x,y)$ и $q_{ij}(x,y)$ являлись непрерывными относительно своих аргументов и меняли знак при переходе через точку $z^*(x^*, y^*)$, двигаясь последовательно вдоль некоторых линий l_3 и l_4 неправильных в направлении осей OX и OY соответственно ($z^* \in l_3 \subset G_2$, $z^* \in l_4 \subset G_2$, $l_3 \in \mathbf{\Phi}_{ij}$, $l_4 \in F_{ij}$).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Критерий, предлагаемый в работе [25], использует в доказательстве понятие правильной линии, а это на практике требует, на первом этапе, её нахождение. Один из вариантов такой правильной линии может быть часть окружности с центром в начале координат и проходящая через подвижную особую точку z^*. При этом сама точка z^* является неизвестной. Процедура нахождения такой правильной линии связано с минимизацией значений

$\left\{\left|u_1\left(x,y\right)\right|,\left|v_1\left(x,y\right)\right|\right\}$ в случае скалярного уравнения Риккати и значений $\left\{\left|P\left(x,y\right)\right|,\left|Q\left(x,y\right)\right|\right\}$ в случае матричного уравнения. На втором этапе осуществляется движение по этой линии. В декартовой системе координат движение по окружности заменяется на движение по ломанной вдоль этой окружности, когда поочередно фиксируется одна из переменных. Эта операция повторяется до получения подвижной особой точки с заданной точностью. Второй вариант — это осуществлять движение по окружности в полярных координатах. В этом случае движение по окружности заменяется на движение по вписанной ломанной в эту окружность, и также завершается получением подвижной особой точки с заданной точностью. По критерию, предлагаемому в данной работе, выбор неправильной линии осуществляется фиксированием одной из переменных и, двигаясь по выбранной линии, получаем одну из координат подвижной особой точки. Повторяя эту процедуру со второй переменной, при этом в качестве фиксированного значения первой переменной будет одна из координат подвижной особой точки, получаем и вторую координату этой особой точки. Таким образом, предлагаемый критерий является эффективнее с точки зрения оптимальности вычислительного процесса за счет простоты выбора линии движения и существенного сокращения объема вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сю Д., Майер А.* Современная теория автоматического управления и ее приложение/ Д. Сю, А. Майер// — М.: Машиностроение, 1972. — 552 с.: ил.

2. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. — М.: Наука, 1971. —396 с.: ил.

3. *Kalman R.* Contribution to the Theory of optimal control/ R. Kalman // Boletin de la Sociedad Mathematica Mexanica. Sequnda serie. — 1960. — V. 5, N 1. — P. 102—119.

4. *Горин В.А., Конаков А.П., Попов Н.С.* Исследование работы дозатора кормов/ В.А. Горин, А.П. Конаков, Н.С. Попов // Механизация и электрофикация с.-х. — 1981. — № 1. — С. 24—26.

5. *Bucy R.S.* Optimal Filtering for Correlated Noise/ R.S. Bucy // J. of Mat. Analysis and Applications. — 1967. — V. 20, N 1. — P. 1—8.

6. *Kalman R., Bucy R.* New resulats in linear filtering and prediction theory / R. Kalman, R. Bucy // J. Basic Engr.(ASME Trans.). — 1961. — V. 83D. — P. 95—108.

7. *Bureau F.J.* Les equations differentielles du second ordre a points critiques dixes. I. Les integrales de l'equation A2 de Painleve/ F.J. Bureau // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. — 1983. — V. 69, N 2. — P. 80—104.

8. *Bureau F.J.* Les equations differentielles du second ordre a points critiques dixes. III. Les integrales de l'equation A3 de Painleve/ F.J. Bureau // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. — 1983. — V. 69, N 11. — P. 614—640.

9. *Bureau F.J.* Les equations differentielles du second ordre a points critiques dixes. II. Les integrales de l'equation A4 de Painleve / F.J. Bureau// Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. — 1983. — V. 69, N 7—9. — P. 397—433.

10. *Lystad L.P.* The Riccati equation — an economic fundamental equation which deseribes marginal movement in time / L.P. Lystad, P.-O. Nyman, R. Heibakk // Model., Identif. and Contr. — 2006. — 27, N 1. — C. 31—41.

11. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений : 2-е изд. / В.В. Голубев. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 436 с.

12. *Еругин Н.П.* К теории уравнения Риккати /Н.П. Еругин // Докл. АН БССР. — 1958. — Т. 2, № 9. — С. 359—362.

13. *Фильчаков П.Ф.* Про один ефективний метод розв'язання задачи Коші для нелінійних диференціальных рівнянь/ П.Ф. Фильчаков // Докл. АН УССР, сер. А. — 1967. — № 1. — С. 43—47.

14. *Фильчаков П.Ф.* Решение нелинейных и линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем при помощи степенных рядов/ П.Ф. Фильчаков // Укр. матем. журнал. — 1969. — Т. 21, № 2. — С. 220—237.

15. *Фильчаков П.Ф.* Численные и графические методы прикладной математики/ П.Ф. Фильчаков // — Киев: Наукова думка, 1970. — 800 с.: ил.

16. *Синявский М.Т.* Про один численный метод визначення особливых точок интегралов систем нелинейных дифференциальных рівнянь / М.Т. Синявский // Докл. АН УССР, сер. А. — 1969. — № 7. — С. 597—599.

17. *Callier F.M., Willems J.L.* Report on a convergence criterion of the solution of the Riccati differential equation/ F.M. Callier, J.L. Willems // Circuit Theory and Design: Proc. Eur. Conf. The Hague, 25—28 Aug. 1981. — Amsterdam a.o. — 1981. — P. 526—530.

18. *Laub Al.* Schur techniques for Riccati differential equations/ Alan Laub // J. Lect. Notes and Inf. — 1982. — V. 39. — P. 165—174.

19. *Sasagawa T.* On the finite escape phenomena for matrix Riccati equations/ T. Sasagawa // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1982. — V. 27, N 4. — P. 977—979.

20. *Common A.K., Roberts D.E.* Solutions of the Riccati equation and their relation to the Toda lattice/ A.K. Common, D.E. Roberts // JK. Phys. A: Mat. and Gen. — 1986. — V. 19, N 10. — P. 1889—1898.

21. *Лосева Н.В.* Исследование нестационарных дифференциальных уравнений Риккати при помощи рядов Вольтера/ Н.В. Лосева// Автореф. канд. ... физ.-мат. наук. — Л.: ЛГУ, 1981. — 18 с.

22. *Орлов В.Н.* Исследование приближенного решения с подвижными полюсами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений/ В. Н. Орлов// Автореф. канд. ... физ.-мат. наук. — Минск: БГУ, 1989. — 18 с.

23. *Орлов В.Н.* Определение подвижной особой точки решения уравнения Риккати на конечном отрезке / В.Н. Орлов// Ленингр. гос. пед. ин-т. — Л., 1982. — 11 с. — Деп. ВИНИТИ 01.06.82, № 2705-82 Деп.

24. *Орлов В.Н.* Исследование приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для дифференциальных уравнений Риккати/ В.Н. Орлов // Известия ИТА ЧР. — Чебоксары, 2001. — С. 182—188.

25. *Орлов В.Н.* Критерии существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати/ В.Н. Орлов // Вестник Самарского ГУ. Естеств.-научн. серия. — 2006. — № 6/1(46). — С. 64—69.

26. *Орлов В.Н.* Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати / В.Н. Орлов // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. — Санкт-Петербург, 2008. — № 4. — С. 102—108.

27. *Орлов В.Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов //Вестник МАИ. — Москва, 2008. Т.15.№ 5.— С.128-135.

28.*Камкэ Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям/ Э. Камкэ// — М.: Наука, 1971. — 576 с.

Орлов В. Н. — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики, информатики и моделирования Чебоксарского филиала РГСУ

Тел. 8-906-131-21-72

E-mail: Orlowvn@rambler.ru

Orlov Viktor N. — Ph. D., head of a Department Mathematics, Information Technology and Modeling at the Cheboksary Branch of the Russian State Social University

E-mail: Orlowvn@rambler.ru