УДК 517.988.8

СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

Нгуен Тьюнг Хуен

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 18.01.2011 г.

Аннотация: в гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение с нелокальным интегральным условием на решение решается приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени неявной схемы Эйлера. Аппроксимация задачи по пространственным переменным ориентирована на метод конечных элементов. Установлены оценки погрешностей приближенных решений, сходимость приближенных решений к точному решению и порядки скорости сходимости.
Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, интегральное условие, проекционно-разностный метод, неявный метод Эйлера.

Abstract: in the Hilbert space the abstract linear parabolic equation with nonlocal integral condition for the solution is resolved approximate by the projection difference method with using implicit Euler scheme to time. Approximation to the spatial variables is oriented on the finite element method. The established error estimations of approximate solutions, the convergence of approximate solution to exact solution and the orders of speed of convergence.
Key words: hilbert space, parabolic equation, integral conditions, projection difference method, implicit Euler scheme.

Пусть дана тройка гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки

$$\left|a(u,v)\right| \leq M_1 \left\|u\right\|_V \left\|v\right\|_V, \quad \mathrm{Re}\, a(u,v) \geq \alpha \left\|u\right\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Очевидно, что форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что для $u, v \in V$ выполняется $a(u,v) = (Au, v)$. Отсюда следует оценка $\left\|A\right\|_{V \to V'} \leq M$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отождествления $H \equiv H'$,, совпадает со скалярным произведением в H.

В пространстве V' на $[0,T]$ рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \int_0^T u(t)dt = \overline{u}. \tag{2}$$

В (2) заданы функция $t \to f(t) \in V'$ и элемент $\overline{u}$. Производные функции здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

В [1] установлена теорема о существовании слабого решения задачи (2). При предложении компактности вложения $V \subset H$, условия $\overline{u} \in D(A)$, где $D(A) = \{v \in V | Av \in H\}$, и $f \in L_1(0,T;H) \bigcap L_2(0,T;V')$ в [1] показано, что задача (2) имеет единственное решение $u(t)$, называемое слабым, такое что $u \in L_2(0,T;V) \bigcap$ $\bigcap C(0,T;H)$, а $u' \in L_2(0,T;V')$. При этом в (2) удовлетворяется почти всюду на $[0,T]$ уравнение и выполняется интегральное условие.

В [2] задача (2) решалась приближенно полудискретным методом Галеркина, который параболическую задачу сводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее задача (2) в сформулированных выше условиях слабой разрешимости будет решаться приближенно проекционно-разностным методом, который является методом полной дискретизации. При этом по времени используется неявная схема Эйлера. В итоге процесс нахождения приближенных решений задачи (2) сводится к нахождению решения конечных линейных систем алгебраических уравнений.

Опишем некоторые факты, связанные с проекционными подпространствами. Через V_h, где h — положительный параметр, обозначим конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\left\|u_h\right\|_{V_h'} = \sup\left|(u_h, v_h)\right|$, где точная верхняя граница берется по $v_h \in V_h$ и $\left\|v_h\right\|_{V_h} = 1$. Нетрудно видеть, что $\left\|u_h\right\|_{V_h'} \le \left\|u_h\right\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортопроектор в пространстве H на V_h. В [3] замечено, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\bar{P}_h : V' \to V_h'$ и для $u \in V'$ справедлива оценка $\left\|\bar{P}_h u\right\|_{V_h'} \le \left\|u\right\|_{V'}$. Отметим также для $u_h \in V_h$ оценку $\left\|u_h\right\|_{V'} \le \left\|P_h\right\|_{V\to V} \left\|u_h\right\|_{V_h'}$ и для $u \in V'$ оценку $\left\|\bar{P}_h u\right\|_{V'} \le \left\|P_h\right\|_{V\to V} \left\|u\right\|_{V'}$. Кроме того, для $u \in V'$ и $v \in H$ справедливо важное соотношение $\left(\bar{P}_h u, v\right) = \left(u, P_h v\right)$ [4].

Рассмотрим в V_h приближенную задачу:

$$\begin{gathered}\left(u_k^h - u_{k-1}^h\right)\tau^{-1} + \bar{P}_h A u_h^k = f_k^h \quad (k = \overline{1, N}),\\ \sum_{k=1}^{N} u_k^h \tau = \bar{u}_h,\end{gathered} \tag{3}$$

где N — натуральное число, $\tau = T / N$, а элементы f_k^h, $\bar{u}_h \in V_h$ определим позже.

Лемма 1. *Задача (3) имеет единственное решение.*

Доказательство. Достаточно установить, что однородная задача имеет только нулевое решение. Пусть $u_k^h \in V_h, (k = \overline{1, N})$ — решение задачи

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + \bar{P}_h A u_k^h = 0, \qquad \sum_{k=1}^{N} u_k^h \tau = 0. \tag{4}$$

Суммируем уравнения в (4) по k от 1 до N. Учитывая, что $\sum_{k=1}^{N} u_k^h \tau = 0$, получаем $u_0^h = u_N^h$.

Умножим теперь (4) скалярно в H на τu_k^h, возьмем удвоенную вещественную часть и, учитывая (1), оценим полученные равенства. Получим оценки

$$\left\|u_k^h\right\|_H^2 - \left\|u_{k-1}^h\right\|_H^2 + \left\|u_k^h - u_{k-1}^h\right\|_H^2 + 2\alpha \left\|u_k^h\right\|_V^2 \tau \le 0.$$

Суммируем последние неравенства по $k = \overline{1, N}$. Учитывая $u_0^h = u_N^h$, получим $u_1^h = u_2^h = ... = u_N^h = 0$. □

Определим необходимый в дальнейшем проектор Ритца. Из теоремы Лакса—Мильграмма [5] для любого элемента $u \in V$ следует существование единственного $u_h \in V_h$ такого, что для любых $u \in V$ выполняется равенство $a\left(u_h, v_h\right) = a\left(u, v_h\right)$. Таким образом, определен оператор $R_h : V \to V_h$, называемый проектором Ритца, такой, что $R_h u = u_h$ и для всех $u \in V$ и $v_h \in V_h$

$$a\left(R_h u, v_h\right) = a\left(u, v_h\right). \tag{5}$$

Заметим, что из (5) для любого $u \in V$ следует равенство $P_h A R_h u = \bar{P}_h A u$. Отметим некоторые свойства оператора R_h, приведенные в [6]. Оператор R_h в пространстве V является линейным и ограниченным, причем выполняется оценка $\left\|R_h u\right\|_V \le M\alpha^{-1} \left\|u\right\|_V$. Кроме того, для любого элемента $v \in V$ справедлива оценка

$$\left\|(I - R_h)v\right\|_V \le M\alpha^{-1} \left\|(I - Q_h)v\right\|_V. \tag{6}$$

где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h.

Считаем далее, что в задаче (3) $f_k^h = \dfrac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{P}_h f(t)dt$ и $\bar{u}_h = R_h \bar{u}$.

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ — решение задачи (2), а u_k^h $(k = \overline{1, N})$ — решение задачи (3). Пусть $z_k^h = u_k^h - \bar{P}_h u(t_k)$. Тогда $z_0^h = z_N^h$.*

Доказательство. К уравнению (2) применим оператор $\bar{P}_h$, полученное равенство интегрируем по t от t_{k-1} до t_k, и делим на τ. Учитывая далее (3), получим тождество

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + \bar{P}_h A z_k^h = \psi_k^h, \tag{7}$$

где $\psi_k^h = \dfrac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{P}_h A\left[u(t) - \bar{P}_h u(t_k)\right]dt$. Просуммируем (7) по k от 1 до N и умножим полученное равенство на τ.

$$z_N^h - z_0^h + \bar{P}_h A \sum_{k=1}^{N} z_k^h \tau = \tau \sum_{k=1}^{N} \psi_k^h. \tag{8}$$

Преобразуем $\sum_{k=1}^{N} z_k^h \tau$. Так как $\bar{u}_h = R_h \bar{u}$, то имеем

$$\sum_{k=1}^{N} z_k^h \tau = R_h \bar{u} - \bar{P}_h \sum_{k=1}^{N} u(t_k)\tau.$$

Кроме того,

$$\tau \sum_{k=1}^{N} \psi_k^h = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{P}_h A\left[u(t) - \bar{P}_h u(t_k)\right]dt =$$

$$= \int_0^T \bar{P}_h Au(t)dt - \bar{P}_h A\bar{P}_h \sum_{k=1}^{N} u(t_k)\tau =$$
$$= \bar{P}_h A\bar{u} - \bar{P}_h A\bar{P}_h \sum_{k=1}^{N} u\left(t_k\right)\tau.$$

Поставим последние равенства в (8). Учитывая равенство $P_h AR_h \bar{u} = \bar{P}_h A\bar{u}$, получим $z_0^h = z_N^h$. □

Как и в сходной ситуации в [7] справедлива

Лемма 3. *Пусть* $u(t)$ *— решение задачи (2), а* u_k^h $(k = \overline{1,N})$ *— решение задачи (3). Для* $z_k^h = u_k^h - \bar{P}_h u(t_k)$ *выполняется оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\left\|z_k^h\right\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N}\left(\left\|z_k^h - z_{k-1}^h\right\|_H^2 + \left\|z_k^h\right\|_V^2 \tau + \right.$$
$$\left. + \left\|\left(z_k^h - z_{k-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{V_h'}^2 \tau\right) \le C\left\{\left\|z_0^h\right\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N}\left\|\psi_k^h\right\|_{V_h'}^2 \tau\right\},$$

где ψ_k^h определена в (7).

Обратим внимание, что значение z_0^h не определено, но в последующем будет получена оценка величины $\left\|z_0^h\right\|_H^2$.

Лемма 4. *Пусть* $u(t)$ *— решение задачи (2), а* u_k^h $(k = \overline{1,N})$ *— решение задачи (3). Выражение* $z_m^h = u_m^h - \bar{P}_h u(t_m)$ *для всех* $m = \overline{1,N}$ *удовлетворяет соотношению*

$$z_m^h = (I + \tau\bar{P}_h A)^{-m} z_0^h + \sum_{k=1}^{m}(I + \tau\bar{P}_h A)^{-m+1-k}\psi_k^h\tau. \quad (10)$$

Доказательство. Из (7) имеем

$$(I + \tau\bar{P}_h A)z_k^h = z_{k-1}^h + \tau\psi_k^h. \quad (11)$$

Докажем что, оператор $I + \tau\bar{P}_h A$ обратим в V_h. Вложение $V \subset H$ непрерывно, поэтому существует $\beta > 0$, что для всех $v \in V$ справедлива оценка $\beta^{1/2}\left\|v\right\|_H \le \left\|v\right\|_V$. Теперь для произвольного $v_h \in V_h$ получим

$$\left\|(I + \tau\bar{P}_h A)v_h\right\|_H \left\|v_h\right\|_H \ge \left|\left((I + \tau\bar{P}_h A)v_h, v_h\right)\right| =$$
$$= \left|\left\|v_h\right\|_H^2 + \tau\left(Av_h, v_h\right)\right| \ge$$
$$\ge \left\|v_h\right\|_H^2 + \tau\alpha\left\|v_h\right\|_V^2 \ge (1 + \tau\alpha\beta)\left\|v_h\right\|_H^2.$$

Отсюда следует обратимость оператора $I + \tau\bar{P}_h A$ в V_h и выполняется оценка

$$\left\|(I + \tau\bar{P}_h A)^{-1}\right\|_{H\to H} \le (1 + \tau\alpha\beta)^{-1}. \quad (12)$$

Представление (10) получается теперь непосредственно из (11). □

Лемма 5. *Пусть* $u(t)$ *— решение задачи (2), а* u_k^h $(k = \overline{1,N})$ *— решение задачи (3). Обозначаем через* $z_k^h = u_k^h - \bar{P}_h u(t_k)$.. *Тогда для* z_k^h *справедлива оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\left\|z_k^h\right\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N}\left(\left\|z_k^h - z_{k-1}^h\right\|_H^2 + \left\|z_k^h\right\|_V^2 \tau + \right.$$
$$\left. + \left\|\left(z_k^h - z_{k-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{V_h'}^2 \tau\right) \le C\sum_{k=1}^{N}\left\|\psi_k^h\right\|_{V_h'}^2 \tau. \quad (13)$$

Доказательство. Так как $z_0^h = z_N^h$, то из (10) следует

$$\left[I - \left(I + \tau\bar{P}_h A\right)^{-N}\right]z_0^h = \sum_{k=1}^{N}\left(I + \tau\bar{P}_h A\right)^{-N+1-k}\psi_k^h\tau. \quad (14)$$

Из (12) получим $\left\|\left(I + \tau\bar{P}_h A\right)^{-N}\right\|_{H\to H} \le$ $\le (1 + \tau\alpha\beta)^{-N} < 1$. Тогда в V_h существует $\left[I - (I + \tau\bar{P}_h A)^{-N}\right]^{-1}$ и

$$\left\|\left[I - \left(I + \tau\bar{P}_h A\right)^{-N}\right]^{-1}\right\|_{H\to H} \le \frac{1}{1 - (1 + \tau\alpha\beta)^{-N}} =$$
$$= \frac{1}{1 - \left[\left(1 + \dfrac{T\alpha\beta}{N}\right)^{\frac{N}{T\alpha\beta}}\right]^{-T\alpha\beta}}.$$

Для оценки последнего выражения рассмотрим функцию $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, где $x \in [1,\infty)$. Известно, что $f(x)$ монотонно возрастая стремится к числу e при $x \to \infty$. Следовательно, $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \le e$ при $x \in [1,\infty)$. Таким образом, для $N \ge T\alpha\beta$ выполняется

$$\left(1 + \frac{T\alpha\beta}{N}\right)^{\frac{N}{T\alpha\beta}} < e.$$

Следовательно

$$\left\|\left[I - (I + \tau\bar{P}_h A)^{-N}\right]^{-1}\right\|_{H\to H} \le \frac{1}{1 - e^{-T\alpha\beta}}.$$

Из (14) теперь получим

$$z_0^h = \left[I - \left(I + \tau\bar{P}_h A\right)^{-N}\right]^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left(I + \tau\bar{P}_h A\right)^{-N+1-k}\psi_k^h\tau\right\}.$$

Значит

$$\left\|z_0^h\right\|_H^2 \le C\left\|\sum_{k=1}^{N}\left(I + \tau\bar{P}_h A\right)^{-N+1-k}\psi_k^h\tau\right\|_H^2. \quad (15)$$

Рассмотрим задачу (7) с условием $z_0^h = 0$. Тогда из (9) следует оценка

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \left(I + \tau \bar{P}_h A \right)^{-N+1-k} \psi_k^h \tau \right\|_H^2 \le C \sum_{k=1}^{N} \left\| \psi_k^h \right\|_{V_h'}^2 \tau.$$

Учитывая оценки (9), (15) и последнюю оценку, получим

$$\max_{1\le k\le N} \left\| z_k^h \right\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \left(\left\| z_k^h - z_{k-1}^h \right\|_H^2 + \left\| z_k^h \right\|_V^2 \tau \right) \le \le C \sum_{k=1}^{N} \left\| \psi_k^h \right\|_{V_h'}^2 \tau. \tag{16}$$

Из (7) получим теперь оценку

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \left(z_k^h - z_{k-1}^h \right) \tau^{-1} \right\|_{V_h'} \tau \le C \left\{ \sum_{k=1}^{N} \left\| \psi_k^h \right\|_{V_h'}^2 \tau + \sum_{k=1}^{N} \left\| z_k^h \right\|_V^2 \tau \right\},$$

из которой и оценки (16) следует оценка (13). □

Для получения сходимости приближенных решений к точному решению предположим, что в пространстве V задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V, то есть $\left\| (I - Q_h) v \right\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$. Здесь, как и ранее, Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h. Заметим, что такая последовательность $\{V_h\}$ предельно плотна и в пространстве H, что следует из оценки для любых $u \in H$ и $v \in V$

$$\left\| (I - P_h) u \right\|_H \le \left\| (I - P_h)(u - v) \right\|_H + \left\| (I - P_h) v \right\|_H \le \le \left\| u - v \right\|_H + \left\| (I - Q_h) v \right\|_H$$

и плотного непрерывного вложения $V \subset H$. Аналогично из оценки для любых $u \in V'$ и $v \in H$

$$\left\| (I - S_h) u \right\|_{V'} \le \left\| u - v \right\|_{V'} + \left\| (I - P_h) v \right\|_{V'},$$

где S_h — ортопроектор в пространстве V'на V_h, и плотного непрерывного вложения $H \subset V'$ следует предельная плотность $\{V_h\}$ и в V'.

Предположим теперь, что подпространства V_h удовлетворяют некоторым условиям, типичным для подпространств типа конечных элементов (напр. [5], [8]),

$$\left\| (I - Q_h) v \right\|_H \le r_1 h \left\| v \right\|_V, \tag{17}$$

$$\left\| v_h \right\|_V \le r_2 h^{-1} \left\| v_h \right\|_H, \tag{18}$$

где r_1 и r_2 не зависят от $v \in V$, $v_h \in V_h$ и h. Условие (18) для метода конечных элементов в приложениях означает равномерное разбиение области пространственных переменных [9]. Из (17) и (18) легко следует [10] необходимая в дальнейшем равномерная по h оценка $\left\| P_h \right\|_{V \to V} \le r_1 r_2 + 1$.

Перед формулировкой утверждения о сходимости отметим, то решение задачи (2) $u \in L_2(0,T;V)$ и, вообще говоря, значение в точке (на множестве меры нуль) $u(t_k) \in V$ не определено. Поэтому вместо $\sum_{k=1}^{N} \left\| u(t_k) - u_k^h \right\|_V^2 \tau$ имеет смысл оценивать

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(t) dt - u_k^h \right\|_V^2 \tau \le \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| u(t) - u_k^h \right\|_V^2 dt.$$

Теорема. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2), а u_k^h, где $k = 1, N$ — решение задачи (3). Пусть $\{V_h\}$ — предельно плотная в V последовательность конечномерных пространств, для которой выполняются условия (17) и (18). Пусть $\tau h^{-2} \to 0$ при $h \to 0$. Тогда при $h \to 0$*

$$\max_{1\le k\le N} \left\| u(t_k) - u_k^h \right\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| u(t) - u_k^h \right\|_V^2 dt + \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \to 0. \tag{19}$$

Доказательство. Учитывая свойства оператора R_h, оценим выражение в правой части (13).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \left\| \psi_k^h \right\|_{V_h'}^2 \tau &= \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{N} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{P}_h A [R_h u(t) - P_h u(t_k)] dt \right\|_{V_h'}^2 \le \\ & C \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| R_h u(t) - P_h u(t_k) \right\|_V dt \right)^2 \le \\ &\le C \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| R_h u(t) - P_h u(t_k) \right\|_V^2 dt \le \\ &\le 2C \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| (R_h - P_h) u(t) \right\|_V^2 dt + \\ &+ 2C \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| P_h \left[u(t) - u(t_k) \right] \right\|_V^2 dt. \end{aligned} \tag{20}$$

Используя равномерную ограниченность $\left\| P_h \right\|_{V \to V}$ и свойство (6), продолжим оценку (20).

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \psi_k^h \right\|_{V_h'}^2 \tau \le C \left\{ \int_0^T \left\| (I - Q_h) u(t) \right\|_V^2 dt + \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| P_h \left[u(t) - u(t_k) \right] \right\|_V^2 dt \right\}. \tag{21}$$

Из условия (18) для $u_h \in V_h$ следует оценка

$$\left\|u_h\right\|_H = \sup_{\substack{v_h \in Vh \\ v_h \neq \Theta}} \frac{\left|(u_h, v_h)\right|}{\left\|v_h\right\|_H} \leq r_2 h^{-1} \left\|u_h\right\|_{V_h'}. \quad (22)$$

С учетом (18) и (22) получим почти при всех $t \in \left(t_{k-1}, t_k\right)$ оценку

$$\left\|P_h\left[u(t) - u(t_k)\right]\right\|_V^2 = \left\|\int_t^{t_k} \bar{P}_h u'(s)ds\right\|_V^2 \leq$$

$$r_2^4 h^{-4} \left\|\int_{t_k}^{t} \overline{P}_h u'(s)ds\right\|_{V_h'}^2 \leq r_2^4 \tau h^{-4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|u'(t)\right\|_{V'}^2 dt.$$

Отсюда следует

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|P_h\left[u(t) - u(t_k)\right]\right\|_V^2 dt \leq \leq r_2^4 \tau^2 h^{-4} \int_0^T \left\|u'(t)\right\|_{V'}^2 dt. \quad (23)$$

Из (21) и (23) следует сходимость к нулю выражения в правой части оценки (13), а значит и слагаемых в левой части (13).

Таким образом стремление к нулю двух первых слагаемых в (19) следует из (13), предельной плотности V_h в V и тождеств

$$u(t_k) - u_k^h = (I - P_h)u(t_k) - z_k^h, \quad (24)$$

$$u(t) - u_k^h = (I - P_h)u(t) + P_h\left[u(t) - u(t_k)\right] - z_k^h. \quad (25)$$

Теперь оценим третье слагаемое в (19). Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^N \left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^N \left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (I - \bar{P}_h)u'(t)dt\right\|_{V'}^2 \tau + \sum_{k=1}^N \left\|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\right\|_{V'}^2 \tau \leq$$

$$\leq \int_0^T \left\|(I - \bar{P}_h)u'(t)\right\|_{V'}^2 dt + C\sum_{k=1}^N \left\|(z_k^h - z_{k-1}^h)P^{-1}\right\|_{V_h'}^2 P. \quad (26)$$

Отметим, что для любого $v \in V'$ при $h \to 0$

$$\left\|(I - P_h)v\right\|_{V'} = \left\|(I - P_h)(v - S_h v)\right\|_{V'} \leq \leq \left(1 + \left\|P_h\right\|_{V \to V}\right)\left\|(I - S_h)v\right\|_{V'} \to 0. \quad (27)$$

Теперь стремление к нулю третьего слагаемого в (19) следует из (13), (26) и (27). □

Далее покажем, что при условии дополнительной гладкости решения $u(t)$ требование $\tau = o(h^2)$ для сходимости можно существенно ослабить. Кроме того, можно получить порядки скорости сходимости, как по времени, так и по пространству.

Лемма 6. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (3) с дополнительной гладкостью*

$$u' \in L_2(0, T; H), \quad (28)$$

а подпространства V_h обладают свойством (18). Тогда справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|P_h\left[u(t) - u(t_k)\right]\right\|_V^2 dt \leq \leq C r_2^2 \tau^2 h^{-2} \int_0^T \left\|u'(t)\right\|_H^2 dt. \quad (29)$$

Доказательство. С учетом (18) получим почти при всех $t \in \left(t_{k-1}, t_k\right)$ оценку

$$\left\|P_h\left[u(t) - u(t_k)\right]\right\|_V^2 = \left\|\int_t^{t_k} P_h u'(s)ds\right\|_V^2 \leq$$

$$\leq r_2^2 h^{-2} \left\|\int_t^{t_k} P_h u'(s)ds\right\|_H^2 \leq C r_2^2 \tau h^{-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|u'(t)\right\|_H^2 dt.$$

Отсюда следует оценка (29). □

Следствие 1. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2) и выполняется условие (28). Пусть $\{V_h\}$ — предельно плотная в V последовательность конечных пространств, для которой выполняются условия (17) и (18). Пусть $\tau h^{-1} \to 0$ при $h \to 0$. Тогда выполняется сходимость (19).*

Доказательство. Стремление к нулю выражения $\sum_{k=1}^N \left\|\psi_k^h\right\|_{V_h'}^2 \tau$ в (13) следует из (21), (29) и предельной плотности V_h в V. В результате, как и ранее, получается сходимости слагаемых в (19). □

Лемма 7. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2) с дополнительной гладкостью*

$$u' \in L_2(0, T; V), \quad (30)$$

а подпространства V_h такие, что $\left\|P_h\right\|_{V \to V}$ равномерно по h ограничены. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|P_h\left[u(t) - u(t_k)\right]\right\|_V^2 dt \leq C\tau^2 \int_0^T \left\|u'(t)\right\|_V^2 dt. \quad (31)$$

Доказательство. Воспользуемся оценкой

$$\left\|u(t) - u(t_k)\right\|_V^2 = \left\|\int_t^{t_k} u'(s)ds\right\|_V^2 \leq \tau \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|u'(t)\right\|_V^2 dt.$$

Отсюда легко следует оценка (31). □

Следствие 2. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2) и выполняется условие (30). Пусть $\{V_h\}$ — предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств и подпространства V_h такие, что $\left\|P_h\right\|_{V \to V}$ равномерно по h ограниченны. Тогда* *при* $h \to 0$ *и* $\tau \to 0$

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2+\sum_{k=1}^N\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2\tau\to 0. \quad (32)$$

Доказательство. Сходимость к нулю первого и третьего слагаемых в левой части (32) устанавливается как и в теореме, но при этом следует учитывать оценку (31). Сходимость к нулю второго слагаемого в левой части (32) следует из оценки

$$\sum_{k=1}^N\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2\tau\le 2\sum_{k=1}^N\int_{tk-1}^{t_k}\left\|u(t_k)-u(t)\right\|_V^2dt+$$
$$+2\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t)-u_k^h\right\|_V^2dt, \quad (33)$$

соответствующих выкладок из теоремы и оценки (31). $\square$

Далее для получения скорости сходимости предполагается, что существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $E\subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ [11]. Например, если оператор A порожден в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с гладкой границей равномерно эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем $H=L_2(\Omega), V=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), E=W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V'=W_2^{-1}(\Omega)$. Если же на границе области Ω задано условие Неймана, то полагаем $H=L_2(\Omega)$, $V=W_2^1(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)$.

Пусть также подпространства V_h такие, что

$$\left\|(Q_h-I)v\right\|_V\le rh\left\|v\right\|_E \quad (v\in E),$$

где константа $r>0$ не зависит от v и h. Условие (34) является типичным для подпространств V_h типа конечных элементов [5], [8].

В [12] показано, что из (34) следует для всех $v\in V$ оценка

$$\left\|(Q_h-I)v\right\|_H\le rh\left\|(Q_h-I)v\right\|_V, \quad (35)$$

из которой очевидно образом получается (17).

Следствие 3. *Пусть* $u(t)$ *— слабое решение задачи (2) такое, что выполняются условия (28) и*

$$u\in L_2(0,T;E). \quad (36)$$

Пусть для подпространств V_h *выполняются (18) и (34). Тогда справедливы оценки*

$$\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t)-u_k^h\right\|_V^2dt\le$$
$$\le C\left\{h^2\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2dt+\tau^2h^{-2}\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_H^2dt\right\}, \quad (37)$$

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2\tau\le$$
$$\le C\left\{h^2\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2dt+\left(h^2+\tau^2h^{-2}\right)\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_H^2dt\right\}. \quad (38)$$

Если к условиям (28) и (36) добавить условие $u\in C([0,T];V)$ *то получим еще одну оценку*

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2\le$$
$$\le C\left\{h^2\left(\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)\right\|_V^2+\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2dt\right)+\right. \quad (39)$$
$$\left.+\tau^2h^{-2}\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_H^2dt\right\}.$$

Доказательство. Оценка (37) следует из (13), (21), (29), (25) и (34). Оценка (39) следует из (13), (21), (29), (24) и (34). Оценка (38) следует из (13), (21), (29), (26), (34) и оценки

$$\left\|(I-P_h)v\right\|_{V'}\le rh\left\|(I-P_h)v\right\|_H \quad (v\in H),$$

полученной в [13] и следующей из (34). $\square$

Полагая в оценках (37), (38) и (39), например, $\tau=h^2$, получим сходимость квадратов соответствующих норм погрешности как h^2.

Если потребовать от решения $u(t)$ еще большей гладкости, можно получить оценки погрешности, в которых параметры τ и h независимы и равносильны.

Следствие 4. *Пусть* $u(t)$ *— слабое решение задачи (2) такое, что выполняются условия (30) и (36) . Пусть подпространства* V_h *удовлетворяют условиям (18) и (34). Тогда справедливы оценки:*

$$\sum_{k=1}^N\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2\tau\le$$
$$\le C\left\{h^2\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2dt+\tau^2\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^2dt\right\},$$

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2\tau\le$$
$$\le C\left\{h^2\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2dt+(\tau^2+h^4)\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^2dt\right\},$$

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2\le$$
$$\le C\left\{h^2\left(\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)\right\|_V^2+\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2dt\right)+\tau^2\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^2dt\right\}.$$

Доказательство следствия 4 проводится подобно доказательству следствия 3, нужно лишь вместо оценки (29) использовать оценку (31). □

Автор благодарна В. В. Смагину за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Критская Е. А., Смагин В. В.* О слабой разрешимости вариационной задач и параболического типа с интегральным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 222—225.

2. *Нгуен Тьюнг Хуен, Смагин В. В.* Сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 144—149.

3. *Вайникко Г. М., Оя П. Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11. — № 7. — С. 1269—1277.

4. *Смагин В. В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, — № 3. — С. 143—160.

5. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 512 с.

6. *Васильева Т. Е., Смагин В. В.* Сходимость проекционного метода для уравнений с несимметричной главной частью // Сборник трудов молодых ученых математ. ф-та Воронежского гос. ун-та. — Воронеж, 2001. — С. 38—42.

7. *Смагин В. В.* Энергетическая сходимость погрешности проекционно-разностного метода для слабо разрешимых параболических уравнений // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1999. — № 4. — С. 114—119.

8. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

9. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. — Ереван. 1979. — 236 с.

10. *Смагин В. В.* Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений // Математ. сборник. — 1994. — Т. 185, № 11. — С. 79—94.

11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

12. *Смагин В. В.* Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами // Дифференц. ур-ния. — 2001. — Т. 37. № 1. — С. 115—123.

13. *Смагин В. В.* Коэрцитивная энергетическая сходимость проекционно-разностного метода для параболических уравнений // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — 2002. — № 2. — С. 96—100.

Нгуен Тьюнг Хуен — студентка, кафедра функционального анализа и операторных уравнений. Воронежский государственный университет

E-mail: chie1092004@yahoo.com.

Тел.: 220-87-71

Nguyen Thuong Huyen — student, Department of functional analysis and operation equations. Voronezh State University

E-mail: chie1092004@yahoo.com.

Tel.: 220-87-71