УДК 517.91

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ЗАДАЧАХ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. А. Михайленко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.09.2010 г.

Аннотация: в статье изучается вопрос о совпадении структур собственных инвариантных подпространств, отвечающих единичному собственному значению оператора сдвига из 0 в T по траекториям линеаризованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и единичному собственному значению интегрального оператора, вполне непрерывного или q-уплотняющего с константой $q < 1$, построенного по задаче о T-периодических решениях этой системы дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: T-периодическое решение, оператор сдвига, единичное собственное значение, присоединенные векторы, неподвижные точки, интегральные операторы.

Abstract: we consider a coincidence between structures of invariant spaces corresponding to the unit eigenvalue of the translation operator from 0 to T along the solutions of the linearized system of ordinary differential equations and the unit eigenvalue of q-condensing with $q < 1$ or compact integral operator, associated to a problem of T-periodic solutions of this system of differential equations.
Key words: T-periodic solution, translation operator, unit eigenvalue, adjoined vector, fixed points, integral operator.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о T-периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений традиционно сводится к задаче о неподвижных точках различных интегральных операторов, построенных по правым частям этих уравнений. Наряду с такими операторами часто в центре внимания оказывается оператор сдвига (см. [1, с. 12]) из 0 в T по траекториям линеаризованной системы (здесь и далее понятия "дифференциальное уравнение" и "конечномерная система дифференциальных уравнений" используются как синонимы). Очевидно, что его неподвижные точки являются начальными значениями T-периодических решений линеаризованной системы, и обратно, начальные значения этих решений являются неподвижными точками оператора сдвига. Известно, что если исходная автономная система дифференциальных уравнений имеет T-периодическое решение, отличное от константы, то его производная является T-периодическим решением системы, полученной линеаризацией исходной системы на периодическом решении. В случае неавтономной системы мы будем предполагать, что у линеаризации существует нетривиальное T-периодическое решение. Известно большое количество интегральных операторов, построенных по дифференицальном уравнению, неподвижные точки которых определяют T-периодические решения этих дифференциальных уравнений. При этом, если правая часть уравнения является дифференцируемой по пространственной переменной, то эти операторы дифференцируемы по Фреше, и неподвижные точки их производных определяют T-периодические решения линеаризованных систем. Таким образом, единица является собственным значением производной такого оператора. Если эта производная является вполне непрерывным или q-уплотняющим ([2, с. 28]) относительно нормальной меры некомпактности (см. [2, с. 66]) с константой $q < 1$ оператором, то кратность этого собственного значения конечна (см., соответственно, [3, с. 244—245] и [2, с. 89—90]).

Мы будем изучать структуру собственного инвариантного подпространства, отвечающего этому собственному значению, а именно, зададимся вопросами: будет ли единица простым собственным значением производной интегрального оператора, если единица — простое собственное значение оператора сдвига из 0 в T по траекториям линеаризованной исходной системы дифференциальных уравнений; если этот оператор сдвига имеет присоединенные векторы к собственному вектору, отвечающему единичному собственному значению, то будет ли иметь присоединенные векторы производная интегрального оператора, и будет ли их ровно столько же. Эти вопросы являются принципиально важными в задачах о T-периодических решениях дифференциальных уравнений; при этом далеко не всегда удается утверждать существование или отсутствие присоединенных векторов, так как решение получающихся при использовании определения таких векторов интегральных уравнений не является, вообще говоря, тривиальной задачей.

В разделе 2 мы приведем пример ситуации, когда оператор сдвига по траекториям линеаризованной на периодическом решении системы имеет присоединенный вектор, а производная интегрального оператора, построенного по этой системе для задачи отыскания периодических решений, имеет простое единичное собственное значение. Этот пример показывает, что, вообще говоря, не существует соответствия между структурами собственных инвариантных подпространств, отвечающих единичному собственному значению этих операторов.

В связи с этим предлагается конструктивный способ построения по интегральным операторам новых интегральных операторов, которые остаются эквивалентными исходной задаче в смысле соответствия неподвижных точек и T-периодических решений дифференциальных уравнений, сохраняют свойства вполне непрерывности или q-уплотнения, и при этом имеют ровно столько присоединенных векторов к собственному вектору, отвечающему единичному собственному значению, сколько таких векторов имеет оператор сдвига из 0 в T по траекториям линеаризованной на периодическом решении исходной системы дифференциальных уравнений. При этом операторы конструируются так, что присоединенными векторами будут периодические слагаемые в присоединенных решениях Флоке линейной системы. Благодаря этому отпадает необходимость в применении дополнительных инструментов для отыскания присоединенных векторов. Естественность такого построения заключается в том, что начальные значения этих слагаемых являются присоединенными векторами оператора сдвига.

ПРИМЕР

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2}x^2 y + \dfrac{1}{2}y^3 \\ \dot{y} = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}xy^2 - \dfrac{1}{2}x^3 \end{cases}.$$

Запишем её в виде

$$\dot{u} = Au + f(u), \tag{1}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}x^2 y + \dfrac{1}{2}y^3 \\ -\dfrac{1}{2}xy^2 - \dfrac{1}{2}x^3 \end{pmatrix}.$

Эта система имеет положение равновесия $u_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. Его можно понимать как 2π- периодическое решение. Линеаризуем систему (1) на этом решении:

$$\dot{z} = Az + f'(u_0)z, \tag{2}$$

или

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} z.$$

Обозначим через $W_0^{2\pi}$ оператор сдвига из 0 в 2π по траекториям линейной системы (2). Тогда

$$W_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

и

$$W_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \dfrac{-\sqrt{3}}{6\pi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\sqrt{3}}{6\pi} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

т.е. $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ – собственный вектор оператора сдвига, отвечающий единичному собственному значению, и $\begin{pmatrix} \dfrac{-\sqrt{3}}{6\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$ — присоединенный к нему вектор.

Рассмотрим теперь интегральный оператор $F: C[0,2\pi] \to C[0,2\pi]$, действующий по правилу

$$(Fx)(t) = e^{At}(I - e^{A2\pi})^{-1}\int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)} f\left(x(s)\right) ds + \\ + \int_0^t e^{A(t-s)} f\left(x(s)\right) ds.$$

Можно показать (см. например, [4, с. 211—212]), что неподвижные точки этого оператора, доопределенные по периодичности, являются 2π- периодическими решениями системы (1), и обратно, сужение на промежуток $[0,2\pi]$ периодических решений периода 2π уравнения (1) является неподвижными точками оператора F. Этот оператор дифференцируем по Фреше, и его производная вполне непрерывна. Производная, вычисленная в точке u_0, действует на элемент $x \in C[0,2\pi]$ по правилу

$$\left(F'(u_0)x\right)(t) = e^{At}(I - e^{A2\pi})^{-1}\int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)} f'(u_0)x(s)ds + \\ + \int_0^t e^{A(t-s)} f'(u_0)x(s)ds.$$

Неподвижные точки оператора $F'(u_0)$ определяют 2π- периодические решения системы (2). Поэтому единственной его неподвижной точкой является функция-константа $x(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Обозначим этот вектор через e_0. Таким образом, $1 \in \sigma\left(F'(u_0)\right)$, и e_0 – единственный с точностью до линейной зависимости собственный вектор, отвечающий этому собственному значению. Покажем, что не существует присоединенных к нему векторов. Предположим, существует такой вектор $e_1 \in C[0,2\pi]$. По определению,

$$e^{At}(I - e^{A2\pi})^{-1}\int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)} f'(u_0)e_1(s)ds + \\ + \int_0^t e^{A(t-s)} f'(u_0)e_1(s)ds = e_1(t) + e_0. \tag{3}$$

Заметим, что решением этого уравнения может быть только функция, удовлетворяющая условию $e_1(0) = e_1(2\pi)$. Продифференцируем обе части равенства (3) по t. С учетом того, что

$$\frac{d}{dt}\left[e^{At}\left\{(I - e^{A2\pi})^{-1}\int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)} f'(u_0)e_1(s)ds + \right.\right. \\ \left.\left. + \int_0^t e^{-As} f'(u_0)e_1(s)ds\right\}\right] = \\ = Ae^{At}\left\{(I - e^{A2\pi})^{-1}\int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)} f'(u_0)e_1(s)ds + \right. \\ \left. + \int_0^t e^{-As} f'(u_0)e_1(s)ds\right\} + f'(u_0)e_1(t),$$

получим

$$\dot{e}_1(t) = Ae_1(t) + f'(u_0)e_1(t) + Ae_0. \tag{4}$$

Если e_1 — решение уравнения (3), то $e_1(t)$ — решение дифференциального уравнения (4). Вычислив явно общее решение уравнения (4), получим

$$e_1(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}t + c_1 \\ \\ \dfrac{9}{4\sqrt{3}}t^2 - 3tc_1 + c_2 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 — числовые константы. Ни при каких значениях констант c_1 и c_2, очевидно, $e_1(t)$ не удовлетворяет условию $e_1(0) = e_1(2\pi)$. Полученное противоречие показывает, что уравнение (3) не имеет решений. Таким образом, присоединенных векторов оператора $F'(u_0)$ не существует.

3. ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{5}$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная по совокупности переменных, T-периодическая по первой переменной и дифференцируемая по второй переменной функция. Будем рассматривать задачу о T-периодических решениях уравнения (5). Пусть x_0 — периодическое решение уравнения (5) периода T. Построим некоторый интегральный оператор $F : E \to E$, где E — банахово пространство. Пусть F таков, что существует взаимно однозначное соответствие между его неподвижными точками y_0 и T-периодическими решениями x_0 уравнения (5). Например, для оператора F, приведенного в примере в предыдущем разделе, функция y_0 будет получаться из периодического решения x_0 сужением его на промежуток $[0,T]$, а функция x_0 — продолжением по периодичности функции $y_0 \in [0,T]$. Построенное соответствие между задачей о T-периодических решениях уравнения (5) и задачей о неподвижных точках оператора F будем условно называть T-эквивалентностью, а сам оператор F назовем T-эквивалентным для уравнения (5).

Будем также считать, что оператор F дифференцируем по Фреше, и его производная, вычисленная в точке y_0, является вполне непрерывным или q-уплотняющим относительно нормальной меры некомпактности с константой $q<1$ оператором, T-эквивалентным линейной задаче (6). Известно и активно используется большое количество операторов, обладающих указанными свойствами. Некоторые из них описаны в [4, с. 204—206] и [2, с. 197—198].

Рассмотрим линеаризованную на периодическом решении x_0 систему (5):

$$\dot{x} = f'(t, x_0(t))x, \tag{6}$$

где через $f'\left(t, x_0(t)\right)$ обозначена производная по второй переменной функции $f(t,x)$, вычисленная в точке x_0. Будем предполагать, что эта система имеет T-периодическое решение $\tilde{x}_0$. Рассмотрим оператор сдвига W_0^T из 0 в T по траекториям системы (6). Очевидно, что

$$W_0^T \tilde{x}_0(0) = \tilde{x}_0(0).$$

Будем считать, что к периодическому решению $\tilde{x}_0$ существуют присоединенные решения Флоке, т.е. решения вида

$$x_j(t) = \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{(j-k)!} v_k(t) t^{j-k}, \tag{7}$$

где $v_0(t) = \tilde{x}_0(t), j = 1,..,m, m < n$. Это означает, что оператор сдвига W_0^T имеет присоединенные к $\tilde{x}_0(0)$ векторы, отвечающие единичному собственному значению, а именно,

$$W_0^T v_j(0) = v_j(0) + v_{j-1}(0), j = 1,..,m.$$

Рассмотрим теперь производную $F'(y_0)$ оператора F, вычисленную в точке y_0. По нашему предположению, оператор $F'(y_0)$ является T-эквивалентным для системы (6). Поэтому $1 \in \sigma\left(F'(y_0)\right)$. Так как этот оператор вполне непрерывен (или q-уплотняет с константой $q<1$), то, как было указано ранее, единица является собственным значением конечной кратности. Как было показано в предыдущем разделе, вообще говоря, эта кратность не совпадает с $(m+1)$.

Основной результат настоящей работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема (об эквивалентном интегральном операторе). Существуют линейные непрерывные операторы $B: E \to E$ и $\xi: Im(B) \to E$, где $Im(B)$ это образ оператора B, такие что $\dim\left(Im(B)\right) < \infty$, оператор ξB вполне непрерывен, $1 \notin \sigma(B\xi)$, и для оператора

$$\tilde{F} = F - \xi B(F - I)$$

справедливо, что

$$\tilde{F} y_0 = y_0,$$

$$\tilde{F}'(y_0) v_0 = v_0,$$

$$\tilde{F}'(y_0) v_j = v_j + v_{j-1}, j = 1,..,m.$$

Таким образом, удается построить оператор $\tilde{F}$, являющийся T-эквивалентным исходному дифференциальному уравнению, сохраняющий все необходимые свойства оператора F, но такого, что его производная $\tilde{F}'(y_0)$ обладает той же структурой собственного инвариантного подпространства, отвечающего единичному собственному значению, что и оператор сдвига W_0^T по траекториям системы (6) из 0 в T.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Сначала покажем, что уравнения $Fy = y$ и $\tilde{F}y = y$ эквивалентны. Пусть y-решение уравнения $Fy = y$. Тогда, очевидно,

$$\tilde{F}y = Fy - \xi BFy + \xi By = y - \xi By + \xi By = y.$$

Обратно, пусть y-решение уравнения $\tilde{F}y = y$, т.е.

$$Fy - \xi BFy + \xi By = y,$$

или

$$(I - \xi B)(Fy - y) = 0. \tag{8}$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор B, получим

$$(I - B\xi)B(Fy - y) = 0.$$

Учитывая $1 \notin \sigma(B\xi)$, получим

$$B(Fy - y) = 0.$$

Из последнего равенства и равенства (8) следует, что

$$Fy - y = 0.$$

Оператор $\tilde{F}$ дифференцируем по Фреше. Аналогично тому, как мы показали ранее, можно установить, что неподвижные точки оператора $\tilde{F}'(y_0)$ совпадают с неподвижными точками оператора $F'(y_0)$, то есть оператор $\tilde{F}'(y_0)$ является T-эквивалентным системе (6).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = f'\left(t, x_0(t)\right)u - \psi(t) \tag{9}$$

и построим по нему T-эквивалентный оператор F_{add} того же вида, что и оператор F. Уравнение, определяющее неподвижные точки оператора F_{add}, запишем в виде

$$u = F'(y_0)u - \left(F'(y_0)u - F_{add}u\right). \tag{10}$$

Заметим, что правые части уравнений (6) и (9) отличаются лишь аддитивной добавкой $(-\psi)$, поэтому выражение $\left(F'(y_0)u - F_{add}u\right)$ зависит от ψ. Обозначим

$$J\psi = F'(y_0)u - F_{add}u.$$

Можно показать, что для периодических составляющих v_j присоединенных решений Флоке (7) линейной системы (6) справедливы соотношения

$$\dot{v}_j = f'(t,x_0)v_j - v_{j-1}, j = 1,..,m. \qquad (11)$$

Проводя для уравнения (11) такие же рассуждения, как для уравнения (9) (т.е. полагая $\psi = v_{j-1}$), и замечая, что существует T-периодическое решение v_j уравнения (11), запишем

$$v_j = F'(y_0)v_j - \left(F'(y_0)v_j - F_{add}v_j\right) \qquad (12)$$

и получим

$$Jv_{j-1} = F'(y_0)v_j - F_{add}v_j.$$

Для операторов, которые чаще всего используются в задачах, при таком представлении правило, по которому действует оператор J, не будет зависеть от v_j (см. раздел 5).

Укажем конструктивный способ построения операторов ξ и B, таких что $v_j, j = 1,..,m$ будут присоединенными векторами, отвечающими единичному собственному значению оператора $\tilde{F}(y_0)$. По определению, это означает, что

$$\left[F'(y_0) - \xi B\left(F'(y_0) - I\right)\right]v_j = v_j + v_{j-1}, \quad j = 1,..,m. \qquad (13)$$

Применив к обеим частям равенства (13) оператор B, получим

$$B\left(F'(y_0) - I\right)v_j - B\xi B\left(F'(y_0) - I\right)v_j = Bv_{j-1}, \quad j = 1,..,m,$$

т.е.

$$(I - B\xi)B\left(F'(y_0) - I\right)v_j = Bv_{j-1}, j = 1,..,m.$$

Учитывая, что $1 \notin \sigma(B\xi)$, получим

$$B\left(F'(y_0) - I\right)v_j = (I - B\xi)^{-1}Bv_{j-1}, j = 1,..,m. \qquad (14)$$

Подставим (14) в (13):

$$F'(y_0)v_j - v_j - \xi(I - B\xi)^{-1}Bv_{j-1} = v_{j-1}, \quad j = 1,..,m. \qquad (15)$$

Сравнивая (15) и (12), можно сделать вывод, что если подобрать операторы ξ и B так, чтобы выполнялось соотношение

$$-\xi(I - B\xi)^{-1}Bv_{j-1} - v_{j-1} = -Jv_{j-1}, j = 1,..,m, \qquad (16)$$

то уравнение (13) будет иметь решение v_j. При этом, если предположить, что есть иные присоединенные векторы оператора $\tilde{F}'(y_0)$, т.е. решения уравнений (13), отличные от v_j соответственно, то получим противоречие с тем, что система (6) имеет ровно m присоединенных решений Флоке, и не более.

Преобразуем (16). Подействовав на обе части оператором B, получим

$$-B\xi(I - B\xi)^{-1}Bv_{j-1} - Bv_{j-1} = -BJv_{j-1}, j = 1,..,m.$$

Переобразуем это равенство к виду

$$(I - B\xi)^{-1}Bv_{j-1} = BJv_{j-1}, j = 1,..,m. \qquad (17)$$

Подставим (17) в (16):

$$-\xi BJv_{j-1} - v_{j-1} = -Jv_{j-1}, j = 1,..,m.$$

Таким образом, получили, наконец, необходимое представление:

$$\xi BJv_{j-1} = Jv_{j-1} - v_{j-1}, j = 1,..,m. \qquad (18)$$

Покажем теперь, как построить ξ и B так, чтобы выполнялось $1 \notin \sigma(B\xi)$.

Введем обозначения: $S = \{Jv_0, Jv_1,.., Jv_{m-1}\} \cup \cup \{v_0, v_1,.., v_{m-1}\}$ и S_0 — максимальная линейно независимая подсистема в S. Положим B тождественным на подпространстве $lin(S_0)$ — линейной оболочке, натянутой на систему S_0, и нулевым на $(lin(S_0))^{\perp}$ — дополнительном подпространстве в E к $lin(S_0)$. Заметим, что подсистемы $S_1 = \{Jv_0, Jv_1,.., Jv_{m-1}\}$ и $S_2 = \{v_o, v_1,.., v_{m-1}\}$ линейно независимы. Теперь, в соответствии с (18), положим

$$\xi Jv_j = -v_j + Jv_j, j = 0,.., m-1. \qquad (19)$$

Рассмотрим три случая.

1) Пусть система S линейно независима, т.е. $S = S_0$. Предположим, что $1 \in \sigma(B\xi)$. Т.к. $B\xi$ действует в конечномерном подпространстве $lin(S)$, то существуют наборы чисел $\{\lambda_i\}_{i=0}^{m-1}$ и $\{\mu_i\}_{i=0}^{m-1}$, такие что

$$y = \sum_{i=0}^{m-1}\lambda_i Jv_i + \sum_{i=0}^{m-1}\mu_i v_i$$

есть собственный вектор $B\xi$. Из (19) следует, что

$$\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_j(Jv_i - v_i) + \sum_{i=0}^{m-1}\mu_i \xi v_i = \sum_{i=0}^{m-1}\lambda_i Jv_i + \sum_{i=0}^{m-1}\mu_i v_i,$$

откуда, полагая $\xi v_i = v_i + Jv_i, i = 0,.., m-1$, получим

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_i v_i + \sum_{i=0}^{m-1}\mu_i(v_i + Jv_i) = \sum_{i=0}^{m-1}\mu_i v_i.$$

Отсюда, в силу линейной независимости системы S, следует, что $\mu_i = 0, j = 0,.., m-1$ и $\lambda_i = 0, i = 0,.., m-1$. Таким образом, $y = 0$.

2) Пусть $S_0 = S_1$. Тогда

$$v_j = \sum_{k=0}^{m-1} a_{j,k} J v_k, j = 0,..,m-1,$$

где $a_{j,k}$ — некоторые числа, $j = 0,..,m-1$, $k = 0,..,m-1$. Пусть $1 \in \sigma(B\xi)$, т.е. существует набор $\{\lambda_j\}_{j=0}^{m-1}$, такой что $y = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j J v_j$ — собственный вектор $B\xi$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j (J v_j - v_j) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j J v_j,$$

откуда немедленно следует, что $\lambda_j = 0$, $j = 0,..,m-1$, т.е. $y = 0$.

3) Пусть $S_0 = S_1 \cup \{v_j\}_{j \in S_3}$, где $S_3 \subset \{0,1,..,m-1\}$ и вложение строгое. Обозначим $S_4 = \{0,1,..,m-1\} \setminus S_3$. Существуют наборы $\{\alpha_{j,i}\}_{i=0}^{m-1}$ и $\{\beta_{j,k}\}_{k \in S_3}, j \in S_4$, такие что для всякого $j \in S_4$ справедливо представление

$$v_j = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{j,i} J v_i + \sum_{k \in S_3} \beta_{j,k} v_k.$$

Пусть $1 \in \sigma(B\xi)$, т.е. существуют наборы $\{\lambda_j J v_j\}_{j=0}^{m-1}$ и $\{\mu_j\}_{j \in S_3}$, такие что $y = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j J v_j + \sum_{j \in S_3} \mu_j v_j$ является собственным вектором $B\xi$, т.е., с учетом взаимно уничтожающихся слагаемых,

$$-\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j v_j + \sum_{j \in S_3} \mu_j B\xi v_j = \sum_{j \in S_3} \mu_j v_j. \qquad (20)$$

При $j \in S_3$ положим

$$\xi v_j = -\sum_{i=0}^{m-1} \nu_{j,i} J v_i - \sum_{k \in S_3} \eta_{j,k} v_k, \qquad (21)$$

где $\nu_{j,i}$ и $\eta_{j,k}$ – некоторые коэффициенты. Подставив (21) в (20), получим

$$-\sum_{j \in S_3} \lambda_j v_j - \sum_{j \in S_4} \lambda_j \Big(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{j,i} J v_i + \sum_{k \in S_3} \beta_{j,k} v_k\Big) +$$
$$+\sum_{j \in S_3} \mu_j \Big(-\sum_{i=0}^{m-1} \nu_{j,i} J v_i - \sum_{k \in S_3} \eta_{j,k} v_k\Big) = \sum_{j \in S_3} \mu_j v_j,$$

или, перегруппировав слагаемые,

$$\sum_{j=0}^{m-1} J v_j \Big(-\sum_{i \in S_4} \lambda_i \alpha_{i,j} - \sum_{i \in S_3} \mu_i \nu_{i,j}\Big) +$$
$$+\sum_{j \in S_3} v_j \Big(-\lambda_j - \sum_{k \in S_4} \lambda_k \beta_{k,j} - \sum_{k \in S_3} \mu_k \eta_{k,j} - \mu_j\Big) = 0.$$

Пользуясь линейной независимостью системы S_0, получим из последнего уравнения систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i \in S_4} \lambda_i \alpha_{i,j} + \sum_{i \in S_3} \mu_i \nu_{i,j} = 0, j = 0,..,m-1 \\ \lambda_j + \sum_{k \in S_4} \lambda_k \beta_{k,j} + \sum_{k \in S_3} \mu_k \eta_{k,j} + \mu_j = 0, j \in S_3 \end{cases}.$$

Это система $m + |S_3|$ линейных уравнений относительно $m + |S_3|$ неизвестных $\lambda_j, j = 0,..,m-1$ и $\mu_i, i \in S_3$. Первые m столбцов матрицы этой системы представляют собой разложения векторов $v_j, j = 0,..,m-1$ по базису S_0. Так как система S_2 линейно независима, то эти столбы линейно независимы. Оставшиеся $|S_3|$ столбцов полностью определяются выбором коэффициентов $\nu_{j,i}$ и $\eta_{j,k}, j = 0,..,m-1$, $i = 0,..,m-1, k \in S_3$ в соотношении (21). Поэтому эти коэффициенты можно подобрать таким образом, что столбцы матрицы будут линейно независимы в конечномерном пространстве размерности $(m + |S_3|)$. Тогда рассматриваемая линейная система допускает лишь тривиальное решение, и следовательно, $y = 0$.

Таким образом, во всех случаях удается построить операторы ξ и B так, что $1 \notin \sigma(B\xi)$. Заметим, что описанное в теореме изменение оператора F не влияет на свойства вполне непрерывности и q-уплотнения. Теорема доказана.

5. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ J ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящем разделе мы остановимся на нескольких интегральных операторах, часто используемых в задаче о T-периодических решениях дифференциальных уравнений, и опишем, как в каждом конкретном случае устроен оператор J, игравший важную роль в построении эквивалентного интегрального оператора, и как будет определен при этом оператор ξ.

Несмотря на большое разнообразие используемых интегральных операторов, мы рассмотрим четыре примера.

1) Оператор $F_1 : C[0,T] \to C[0,T]$, действующий по правилу

$$(F_1 x)(t) = x(T) + \int_0^t f\big(s, x(s)\big) ds,$$

см. [4, с. 204]. Можно показать, что определенный таким образом оператор удовлетворяет всем необходимым нам свойствам. Будем считать, что выполнены условия предыдущей теоремы относительно струкутры оператора сдвига системы (6). Вычислим в точке y_0 производную:

$$\left(F_1'(y_0)x\right)(t) = x(T) + \int_0^t f'\left(s, y_0(s)\right)x(s)ds;$$

воспользуемся соотношением (11) для присоединенных векторов и, используя оператор вида F_1, построим по дифференциальному уравнению интегральное:

$$v_k(t) = v_k(T) + \int_0^t \left[f'\left(s, y_0(s)\right)v_k(s) - v_{k-1}(s)\right]ds.$$

Тогда соотношение (12) примет вид

$$v_k(t) = v_k(T) + \int_0^t f'\left(s, y_0(s)\right)v_k(s)ds - \int_0^t v_{k-1}(s)ds,$$

т.е. оператор J действует на произвольный элемент $x \in C[0,T]$ по правилу

$$(Jx)(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Соотношение (19) же принимает вид

$$(\xi J v_{j-1})(t) = \int_0^t v_{j-1}(s)ds - v_{j-1}(t), j = 1,..,m.$$

2) Оператор $F_2 : C[0,T] \to C[0,T]$, действующий по правилу

$$(F_2x)(t) = e^{At}(I - e^{AT})^{-1}\int_0^T e^{A(T-s)}\tilde{f}(s, x(s))ds + \\ +\int_0^t e^{A(t-s)}\tilde{f}\left(s, x(s)\right)ds,$$

где A — некоторая матрица, такая что $1 \notin \sigma(e^{AT})$, и уравнение (5) записано в виде

$$\dot{x} = Ax + \tilde{f}(t, x).$$

Нетрудно видеть, что

$$\left(F_2'(y_0)x\right)(t) = e^{At}(I - e^{AT})^{-1}\int_0^T e^{A(T-s)}\tilde{f}'\left(s, y_0(s)\right)x(s)ds + \\ +\int_0^t e^{A(t-s)}\tilde{f}'\left(s, y_0(s)\right)x(s)ds.$$

Воспользовавшись соотношением (11), получим

$$\dot{v}_k(t) = Av_k(t) + \tilde{f}'\left(t, y_0(t)\right)v_k(t) - v_{k-1}(t),$$

откуда, аналогично предыдущему случаю,

$$v_k(t) = \\ = e^{At}(I - e^{AT})^{-1}\int_0^T e^{A(T-s)}\left[\tilde{f}'(s, y_0(s))v_k(s) - v_{k-1}(s)\right]ds + \\ +\int_0^t e^{A(t-s)}\left[\tilde{f}'\left(s, y_0(s)\right)v_k(s) - v_{k-1}(s)\right]ds,$$

т.е. оператор J действует по правилу

$$(Jx)(t) = e^{At}(I - e^{AT})^{-1}\int_0^T e^{A(T-s)}x(s)ds + \\ +\int_0^t e^{A(t-s)}x(s)ds.$$

Соотношение (19) принимает вид

$$(\xi J v_{j-1})(t) = e^{At}(I - e^{AT})^{-1}\int_0^T e^{A(T-s)}v_{j-1}(s)ds + \\ +\int_0^t e^{A(t-s)}v_{j-1}(s)ds - v_{j-1}(t), j = 1,..,m.$$

3) Оператор $F_3 : C[0,T] \to C[0,T]$, действующий по правилу

$$(F_3x)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(x(s) + sf\left(s, x(s)\right)\right)ds + \\ +\int_0^t f\left(s, x(s)\right)ds,$$

см. [4, с. 210]. Его производная, вычисленная в точке y_0, действует по правилу

$$\left(F_3'(y_0)x\right)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(x(s) + sf'\left(s, y_0(s)\right)x(s)\right)ds + \\ +\int_0^t f'\left(s, y_0(s)\right)(s)ds.$$

Снова воспользуемся представлением (11). Получим

$$v_k(t) = \frac{1}{T}\int_0^T [v_k(s) + s(f'(s, y_0(s))v_k(s) - v_{k-1}(s))]ds + \\ +\int_0^t (f'(s, y_0(s))v_k(s) - v_{k-1}(s))ds,$$

откуда получим, что оператор J действует по правилу

$$(Jx)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T sv_{k-1}(s)ds + \int_0^t v_{k-1}(s)ds.$$

Соотношение (19) имеет вид

$$(\xi J v_{j-1})(t) = \frac{1}{T}\int_0^T sv_{j-1}(s)ds + \int_0^t v_{j-1}(s)ds - v_{j-1}(t), \\ j = 1,..,m.$$

4) Оператор $F_4 : C[0,T] \to C[0,T]$, действующий по правилу

$$(F_4x)(t) = x(0) + \int_0^t f\left(s, x(s)\right)ds - \\ -\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\int_0^T f\left(s, x(s)\right)ds,$$

см. [2, с. 197—198]. Его производная, вычисленная в точке y_0, действует по правилу

$$\left(F_4'(y_0)x\right)(t) = x(0) + \int_0^t f'\left(s, y_0(s)\right)x(s)ds - \\ -\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\int_0^T f'\left(s, y_0(s)\right)x(s)ds.$$

Снова воспользуемся соотношением (11). Получим

$$v_k(t) = v_k(0) + \int_0^t \left[f'(s, y_0(s))v_k(s) - v_{k-1}(s)\right]ds - \\ -\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\int_0^T \left[f'\left(s, y_0(s)\right)v_k(s) - v_{k-1}(s)\right]ds,$$

откуда немедленно получаем, что

$$(Jx)(t)=\int_0^t x(s)ds-\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)\int_0^T x(s)ds,$$

и

$$(\xi J v_{j-1})(t)=\int_0^t v_{j-1}(s)ds- -\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)\int_0^T v_{j-1}(s)ds-v_{j-1}(t).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР В СЛУЧАЕ ПРОСТОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Обратимся к следующей задаче. Пусть 1 — простое собственное значение оператора сдвига W_0^T из 0 в T по траекториям линейной системы (6). Требуется построить T-эквивалентный интегральный оператор, для которого 1 будет простым собственным значением. Рассмотрим некоторый интегральный оператор $F: E\to E,$ построенный по задаче (5) и обладающий всеми необходимыми (см. раздел 3) свойствами. Так как система (6) имеет T-периодическое решение, то для производной оператора F, вычисленной в точке y_0, единица является собственным значением конечной кратности. Так как единица — простое собственное значение оператора сдвига, то $F'(y_0)$ имеет единственный собственный вектор (с точностью до линейной зависимости). Покажем, как построить по F новый T-эквивалентный интегральный оператор, для которого единица — простое собственное значение.

Определим оператор $\tilde F$ в том же пространстве, что и $F,$ действующий по правилу

$$(\tilde F x)(t)=(Fx)(t)-\xi(t)\Big((Fx)(\tau)-x(\tau)\Big),$$

где $\tau\in[0,T]$, а $\xi(t)(\cdot)$ — при каждом значении t оператор из E в E, причем $1\notin\sigma\big(\xi(v)\big)$. Заметим, что в данном случае оператор B построен несколько иначе, чем в предыдущем случае: это оператор, ставящий в соответствие функции $Fx-x$ её значение в точке $\tau.$ Тем не менее, возможно и прямое применение теоремы из раздела 3.

Как и в случае, рассмотренном в предыдущих разделах, уравнения $Fx=x$ и $\tilde F x=x$ эквивалентны, т.е. построенный оператор $\tilde F$ является T-эквивалентным для уравнения (5). Покажем, как выбрать линейный ограниченный оператор $\xi(t)(\cdot)$ так, чтобы оператор $\tilde F$ имел единицу простым собственным значением. Предположим, что при любом выборе $\xi(t)$ оператор $\tilde F(y_0)$ имеет присоединенный вектор v_1 к собственному вектору v_0, т.е.

$$\tilde F'(y_0)v_1=v_1+v_0.$$

Это означает, что

$$\Big(F'(y_0)v_1\Big)(t)-\xi(t)\Big(\Big(F'(y_0)v_1\Big)(\tau)-v_1(\tau)\Big)= =v_1(t)+v_0(t). \tag{22}$$

При $t=\tau$ последнее соотношение принимает вид:

$$\Big(I-\xi(\tau)\Big)\Big(\Big(F'(y_0)v_1\Big)(\tau)-v_1(\tau)\Big)=v_0(\tau),$$

откуда, в силу $1\notin\sigma\big(\xi(\tau)\big)$, следует

$$\Big(F'(y_0)v_1\Big)(\tau)-v_1(\tau)=\Big(I-\xi(\tau)\Big)^{-1}v_0(\tau). \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22), получим

$$\Big(F'(y_0)v_1\Big)(t)-\xi(t)\Big(I-\xi(\tau)\Big)^{-1}v_0(\tau)=v_1(t)+v_0(t).$$

Как и в разделе 4, воспользуемся тем, что присоединенное решение Флоке, если бы оно существовало, удовлетворяло бы уравнению

$$v_1=F'(y_0)v_1-J_0v_0,$$

где J_0 определяется так же, как и в разделе 4 (примеры приведены в разделе 5). Таким образом, если удается построить $\xi(t)$ таким образом, что

$$(J_0v_0)(t)=\xi(t)\Big(I-\xi(\tau)\Big)^{-1}v_0(\tau)+v_0(t), \tag{24}$$

то наличие присоединенных векторов оператора $F'(y_0)$ будет противоречить отсутствию присоединенных решений Флоке для системы (6).

Будем считать, что τ выбрано так, что $(J_0v_0)(\tau)\neq 0$. Такое τ выбрать всегда возможно, так как в противном случае $v_0(t)\equiv 0$. Преобразовав равенство (24) при $t=\tau,$ получим

$$\Big(I-\xi(\tau)\Big)^{-1}v_0(v)=(J_0v_0)(\tau). \tag{25}$$

С учетом (25) соотношение (24) принимает вид

$$\xi(t)\Big((J_0v_0)(\tau)\Big)=(J_0v_0)(t)-v_0(t). \tag{26}$$

Будем искать $\xi(t)$ в виде

$$\xi(t)=b(t)\langle g,\cdot\rangle, \tag{27}$$

где $g\in E^*$, и

$$b(t)=(J_0v_0)(t)-v_0(t).$$

Выберем g так, чтобы

$$\Big\langle g,(J_0v_0)(\tau)\Big\rangle=1. \tag{28}$$

Очевидно, для построенного таким образом $\xi(t)$ выполняется равенство (26). Подбором линейного функционала g добьемся выполнения условия $1 \notin \sigma\left(\xi(\tau)\right)$. Рассмотрим два случая.

1) Если векторы $v_0(\tau)$ и $(J_0 v_0)(\tau)$ линейно зависимы, то условия (28) достаточно. Действительно, если y – собственный вектор оператора $\xi(\tau)$, то вектор y, равный $\xi(\tau)y$, линейно зависим с $(J_0 v_0)(\tau)$, откуда следует, что $(J_0 v_0)(\tau)$ является собственным вектором оператора $\xi(\tau)$. С другой же стороны,

$$\xi(\tau)(J_0 v_0)(\tau) = (J_0 v_0)(\tau) - v_0(\tau),$$

что противоречит $v_0(\tau) \neq 0$.

2) Если $v_0(\tau)$ и $(J_0 v_0)(\tau)$ линейно независимы, то выберем функционал g дополнительно удовлетворяющим условию

$$\left\langle g, (J_0 v_0)(\tau) - v_0(\tau) \right\rangle = 0. \qquad (29)$$

Тогда если y — собственный вектор оператора $\xi(\tau)$, то y линейно зависим с $(J_0 v_0)(\tau) - v_0(\tau)$, т.е. вектор $(J_0 v_0)(\tau) - v_0(\tau)$ является собственным вектором оператора $\xi(\tau)$. Но из (29) следует, что

$$\xi(\tau)\left((J_0 v_0)(\tau) - v_0(\tau)\right) = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $1 \in \sigma\left(\xi(\tau)\right)$.

Итак, в обоих случаях удалось построить $\xi(t)$ таким образом, что $1 \notin \sigma\left(\xi(\tau)\right)$, и следовательно, оператор $\tilde{F}'(y_0)$ имеет простое единичное собственное значение.

Итак, мы показали, что интегральный оператор, построенный по задаче отыскания T-периодичсеких решений системы дифференциальных уравнений (который мы называли T – эквивалентным), вообще говоря, нуждается в специальной подправке, чтобы структуры инвариантных собственных подпространств, отвечающих единичным собственным значениям оператора сдвига из 0 в T по траекториям линеаризованной системы (6) и построенного интегрального оператора, совпадали. В частности, и в случае простого единичного собственного значения оператора сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Наука, 1966. — 331 с.

2. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров [и др.]. — Новосибирск: Наука, 1986. — 265 с.

3. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — 4-е изд., перераб. — М.: Наука, 1976. — 543 с.

4. *Красносельский М. А.* Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М.: Наука, 1975. — 512 с.

Михайленко Борис Александрович — магистр математики. Воронежский государственный университет

E-mail: B_Mikh@mail.ru

Тел.: 8(473) 255-19-92, 8-952-549-75-37

Mikhaylenko Boris Alexandrovich — master of science, mathematics. Voronezh State University

E-mail: B_Mikh@mail.ru

Tel.: 8(473) 255-19-92, 8-952-549-75-37