

СЕЧЕНИЕ ДИСКРИМИНАНТНЫХ МНОЖЕСТВ СЛАБО НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НАРУШЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

М. А. Малюгина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 8 сентября 2010 г.

Аннотация: в данной работе описана методика локального изучения дискриминантного множества фредгольмова уравнения с параметрами в условиях нарушения потенциальности. Схема исследования разобрана на примере одной из нелинейных краевых задач теории упругих балок. Результаты, полученные с помощью сведения (редукции) к дискриминантному анализу ветвления решений двумерного алгебраического уравнения, позволили построить параметризацию дискриминантного множества и графически отобразить 2D- и 3D-сечения при различных значениях параметров.

Ключевые слова: Фредгольмово уравнение, бифуркация, дискриминантное множество, метод Ляпунова-Шмидта, ключевое отображение.

Abstract: in this paper the methods of local studying of discriminant set for Fredholm equation with parameters in the case of non-potentiality is described. Researching scheme is analyzed using the example of one of nonlinear boundary-value problem of elastic theory. The results which were obtained by using reduction to discriminant analysis of bifurcation of two-dimensional algebraic equation's solutions let us to describe discriminant set parametrization and to plot the 2D- and 3D-section with different means of parameters.

Key words: Fredholm equation, bifurcation, discriminant set, Lyapunov-Schmidt method, key mapping

Схемы бифуркационного анализа уравнения равновесных конфигураций упругой балки на упругом основании уже неоднократно рассматривались ранее в различных работах. Так, в работе [1], была предложена схема, разработанная для случая однородной балки. Изучение решений уравнения, являющегося простейшей нелинейной моделью движения однородной балки (стационарный случай), при стандартных краевых условиях

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} + \alpha p + p^3 = 0,$$

$p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(1) = \frac{d^2 p}{dx^2}(1) = 0$, где p — прогиб балки, было осуществлено с помощью построения и бифуркационного анализа ключевой функции $W(\xi, \delta)$.

Исходное уравнение является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} dx.$$

Посредством редукции Ляпунова—Шмидта была получена ключевая функция

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_1 \rangle = \xi_1, \langle w, e_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2),$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2),$$

для которой было установлено следующее представление:

$$\widetilde{W}(\xi, \delta) = \widetilde{U}(\xi, \delta) + o(\|\xi\|^4) + O(\|\xi\|^4)O(\delta),$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — линейная ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . “Геометрический сюжет” бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для нее полностью определяются главной частью

$$\widetilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4).$$

Для данного случая была построена каустика (бифуркационная диаграмма функций) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции \widetilde{U} , которая разбивала плоскость управляющих параметров на шесть зон (см.

рис. 1). Каждой зоне соответствует свой расклад бифурцирующих критических точек (на рисунке цифрами указаны количества решений, соответствующие ячейкам регулярности, см. [1]):

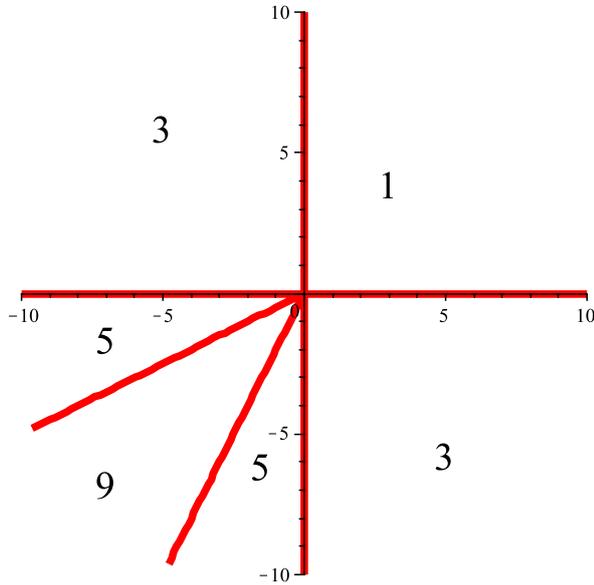


Рис. 1

Далее, в работах [2]—[3] было проведено исследование уравнения для неоднородной упругой балки в условиях двухмодового вырождения. В исходном уравнении появилось возмущение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(q \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

$$q(x) = 1 + \varepsilon \gamma(x),$$

где ε — малый параметр, γ — гладкая функция. Переход к неоднородной балке потребовал замены условия постоянства пары собственных векторов e_1, e_2 оператора

$$\mathcal{A}u := \frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha I$$

из линейной части уравнения (в нуле) на условие существования пары векторов, гладко зависящих от параметров, линейная оболочка которых инвариантна относительно \mathcal{A} . Такой пары оказалось достаточно для построения главной части ключевой функции и, как следствие, для проведения анализа ветвлений равновесных конфигураций балки. Построение пары векторов было основано на формуле ортогонального проектора на корневое подпространство \mathcal{A} . Осуществление этих построений

позволило в итоге описать строение каустики (дискриминантного множества) и проанализировать влияние характера неоднородности балки на форму ее прогиба.

Заметим, что ключевая функция в этой ситуации приняла вид

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_q(\xi, \nu) = & \frac{1}{2} (\tilde{\nu}_1 \xi_1^2 + \tilde{\nu}_2 \xi_2^2 + 2\tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2) + \\ & + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4) + \\ & + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4) O(\tilde{\nu}, \varepsilon) + o(\tilde{\nu}, \varepsilon). \end{aligned}$$

В результате исследования уравнения равновесия с возмущениями такого типа было получено дискриминантное множество (в пространстве параметров), плоское сечение которого изображено на рис. 2

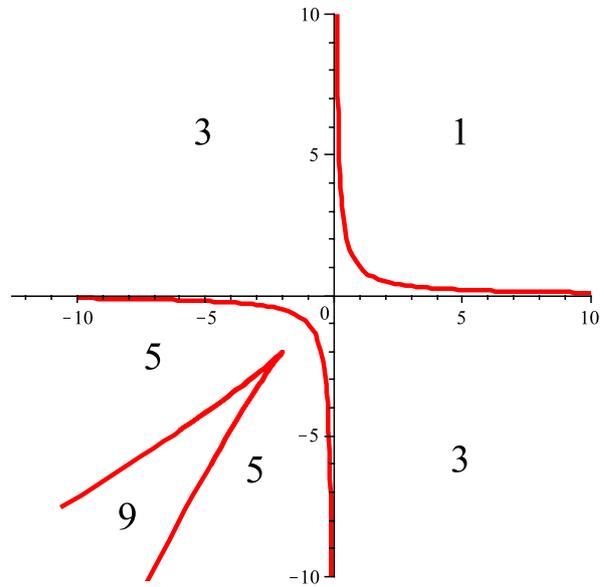


Рис. 2

Еще один тип возмущения был рассмотрен в работе [4], в которой было изучено уравнение для однородной балки. В уравнение было добавлено слагаемое $\varepsilon \frac{dp}{dx}$, нарушающее его потенциальность

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} + \varepsilon \frac{dp}{dx} + \alpha p + p^3 = 0$$

на $[0, 1]$ при локализации параметров $\kappa = 5 + \delta_1, \alpha = 4 + \delta_2, \varepsilon, \delta_1, \delta_2$ — малые параметры, и при краевых условиях

$$p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(1) = \frac{d^2 p}{dx^2}(1) = 0.$$

Т.к. уравнение являлось непотенциальным, подход с использованием ключевой функции был невозможен. Поэтому было проведено изучение ветвления решений ключевого уравнения (на координатной плоскости)

$$\theta(\xi) := \text{grad } W(\xi) + \varepsilon B\xi + o(\varepsilon) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где $W(\xi)$ — ключевая функция для рассмотренного уравнения при $\varepsilon = 0$, $\varepsilon B\xi = -\frac{8}{3\pi}\varepsilon(\xi_2 e_1 - \xi_1 e_2)$ и $e_1 = \sqrt{2} \sin(x)$, $e_2 = \sqrt{2} \sin(2x)$ — моды бифуркации.

Главная часть ключевого отображения $\tilde{\theta}_\varepsilon(\xi)$, полностью определяющая “геометрический сюжет” бифуркации критических точек данного отображения $\theta_\varepsilon(\xi)$, задается в виде

$$\tilde{\theta}_\varepsilon(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} \xi_1^3 + 2\xi_1\xi_2^2 \\ \xi_2^3 + 2\xi_2\xi_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1\xi_1 \\ \lambda_2\xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon\xi_2 \\ \varepsilon\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства графического изображения был произведен переход к параметрам $\lambda_1 = \delta_1 + \delta_2$, $\lambda_2 = \delta_1 - \delta_2$.

Соответствующее дискриминантное множество для этого отображения определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_\varepsilon(\xi) = 0, \\ \Theta(\xi) = 0; \end{cases}$$

где $\Theta(\xi) = \det\left(\frac{\partial \tilde{\theta}_\varepsilon(\xi)}{\partial \xi}\right)$ — якобиан отображения

$\tilde{\theta}_\varepsilon(\xi)$.

Очевидно, что часть дискриминантного множества, отвечающая за вырождение нулевых решений, задается уравнением $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \varepsilon^2 = 0$. Для локального описания части дискриминантного множества, отвечающей за вырождение ненулевых решений, делается переход к полярной системе координат $\xi_1 = r \cos(\varphi)$, $\xi_2 = r \sin(\varphi)$. В [4] была сформулирована следующая теорема:

Теорема 1. Часть дискриминантного множества, отвечающая за вырождение ненулевых решений исходного уравнения, задается следующей параметризацией:

$$\begin{cases} \varepsilon = -3s \frac{\sin^3(\psi)}{\cos(\psi)}, \\ \lambda_1 = -3s(1 + \cos^2(\psi)) + s \frac{(5\cos^2(\psi) - 3)}{\cos(\psi)}, \\ \lambda_2 = -3s(1 + \cos^2(\psi)) - s \frac{(5\cos^2(\psi) - 3)}{\cos(\psi)}. \end{cases}$$

Здесь $s = \frac{r^2}{4}$, $\psi = 2\varphi$.

Для данного случая были построены сечения дискриминантного множества с указанием количества решений в каждой из областей и были даны формулы для их асимптотического представления (рис. 3)

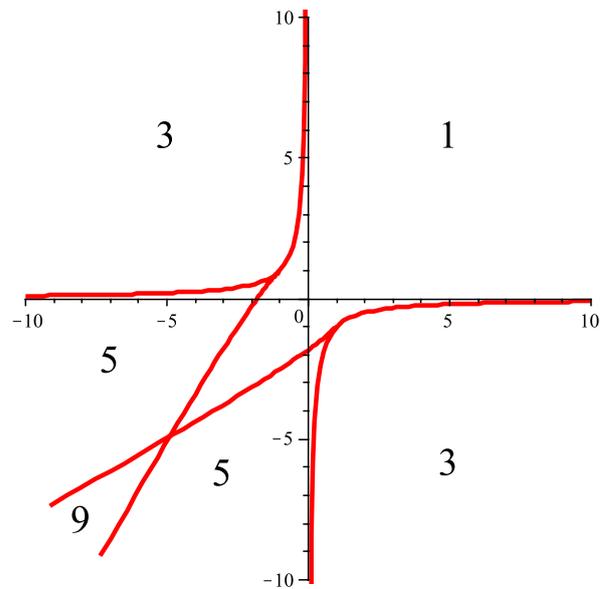


Рис. 3

В данной статье рассмотрена общая ситуация, в которой объединены два типа возмущений, вызванные неоднородностью балки и непотенциальностью уравнения. На основе результатов, полученных ранее в каждом из частных случаев, было проведено исследование уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(q \frac{d^2 p}{dx^2} \right) + \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} + \varepsilon \frac{dp}{dx} + \alpha p + p^3 = 0,$$

на $[0, 1]$ при локализации параметров $\kappa = 5 + \delta_1$, $\alpha = 4 + \delta_2$, где $\varepsilon, \delta_1, \delta_2$ — малые параметры, $q(x) = 1 + \delta\gamma(x)$ — функция неоднородности материала, и при краевых условиях

$$p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(1) = \frac{d^2 p}{dx^2}(1) = 0$$

Так как уравнение остается непотенциальным, то для изучения ветвлений решений данного уравнения подход с использованием ключевой функции $W(\xi)$ также необходимо заменить изучением ветвлений решения ключевого уравнения $\theta(\xi)$ (на координатной плоскости).

Главная часть ключевого отображения приобретает второе дополнительное слагаемое:

$$\tilde{\theta}_\varepsilon(\xi, \delta) = \begin{pmatrix} \xi_1^3 + 2\xi_1\xi_2^2 \\ \xi_2^3 + 2\xi_2\xi_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1\xi_1 \\ \lambda_2\xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon\xi_2 \\ \varepsilon\xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta\xi_2 \\ \delta\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda_1 = \delta_1 + \delta_2$, $\lambda_2 = \delta_1 - \delta_2$.

Дискриминантное множество для этого отображения определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{\varepsilon, \delta}(\xi) = 0, \\ \Theta(\xi) = 0; \end{cases}$$

где $\Theta(\xi) = \det \left(\frac{\partial \tilde{\theta}_{\varepsilon, \delta}(\xi)}{\partial \xi} \right)$ — якобиан отображения $\tilde{\theta}_\varepsilon(\xi)$.

Как и в предыдущем случае можно показать, что часть дискриминантного множества, отвечающая за вырождение нулевых решений, задается уравнением $\lambda_1 \cdot \lambda_2 - \delta^2 + \varepsilon^2 = 0$.

Для ненулевых решений, вновь применив переход к полярной системе координат $\xi_1 = r \cos(\varphi)$, $\xi_2 = r \sin(\varphi)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Часть дискриминантного множества, отвечающая за вырождение ненулевых решений исследуемого уравнения, задается следующей параметризацией:

$$\begin{cases} \varepsilon = -3s \frac{\sin^3(\psi)}{\cos(\psi)} - \frac{\delta \sin^2(\psi) + 2\delta}{2\cos(\psi)}, \\ \lambda_1 = -3s(1 + \cos^2(\psi)) + s \frac{(5\cos^2(\psi) - 3)}{\cos(\psi)} + \\ + \frac{\delta}{2} \sin(\psi) - \frac{3\delta}{2} \frac{\sin(\psi)}{\cos(\psi)}, \\ \lambda_2 = -3s(1 + \cos^2(\psi)) - s \frac{(5\cos^2(\psi) - 3)}{\cos(\psi)} + \\ + \frac{\delta}{2} \sin(\psi) + \frac{3\delta}{2} \frac{\sin(\psi)}{\cos(\psi)}. \end{cases}$$

Здесь $s = \frac{r^2}{4}$, $\psi = 2\varphi$

То есть легко видеть, что в случае неоднородной упругой балки параметризацию можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} \varepsilon(\delta) = \varepsilon + \delta f_1(\psi), \\ \lambda_1(\delta) = \lambda_1 + \delta f_2(\psi), \\ \lambda_2(\delta) = \lambda_2 + \delta f_3(\psi) \end{cases}$$

где $\varepsilon, \lambda_1, \lambda_2$ — параметры, заданные по формулам для первоначального уравнения в случае однородной балки, а $f_1(\psi), f_2(\psi), f_3(\psi)$ — некоторые функции.

Параметризация, полученная в Теореме 2, задает трехмерную поверхность в четырехмерном пространстве. 3D сечения данной поверхности при фиксированном значении параметра ε ($\varepsilon = 0.2$) изображены на рис. 4.

При выделении s из первого уравнения и подстановке соответствующего выражения $s = \left(\varepsilon + \delta \frac{(\sin^2 \psi + 2)}{2\cos \psi} \right) \frac{\cos \psi}{-3\sin^3 \psi}$ во второе и третье уравнения, получим следующую систему соотношений:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \left(\varepsilon + \delta \frac{(\sin^2 \psi + 2)}{2\cos \psi} \right) \frac{\cos \psi}{-3\sin^3 \psi} \times \\ \times \left(-3(1 + \cos^2(\psi)) + \frac{(5\cos^2(\psi) - 3)}{\cos(\psi)} \right) + \\ + \frac{\delta}{2} \left(\sin(\psi) - \frac{3\sin(\psi)}{\cos(\psi)} \right), \\ \lambda_2 = \left(\varepsilon + \delta \frac{(\sin^2 \psi + 2)}{2\cos \psi} \right) \frac{\cos \psi}{-3\sin^3 \psi} \times \\ \times \left(-3(1 + \cos^2(\psi)) - \frac{(5\cos^2(\psi) - 3)}{\cos(\psi)} \right) + \\ + \frac{\delta}{2} \left(\sin(\psi) + \frac{3\sin(\psi)}{\cos(\psi)} \right). \end{cases}$$

Данная параметризация задает плоские сечения дискриминантного множества, показанные на рис. 5.

Аналогичные эффекты наблюдаются в случаях упругих пластин и других упругих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. — Том 12. — 2004. — С. 3—140.
2. Костин Д. В. Ортопроектор теории возмущения линейных операторов и бифуркации равновесий слабо неоднородной упругой балки // Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна. — 2006. — С. 106—113.
3. Костин Д. В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки // Докл. РАН. — 2008. — Т. 418. — № 3. — С. 295—299.

Сечение дискриминантных множеств слабо неоднородных упругих систем в условиях нарушения...

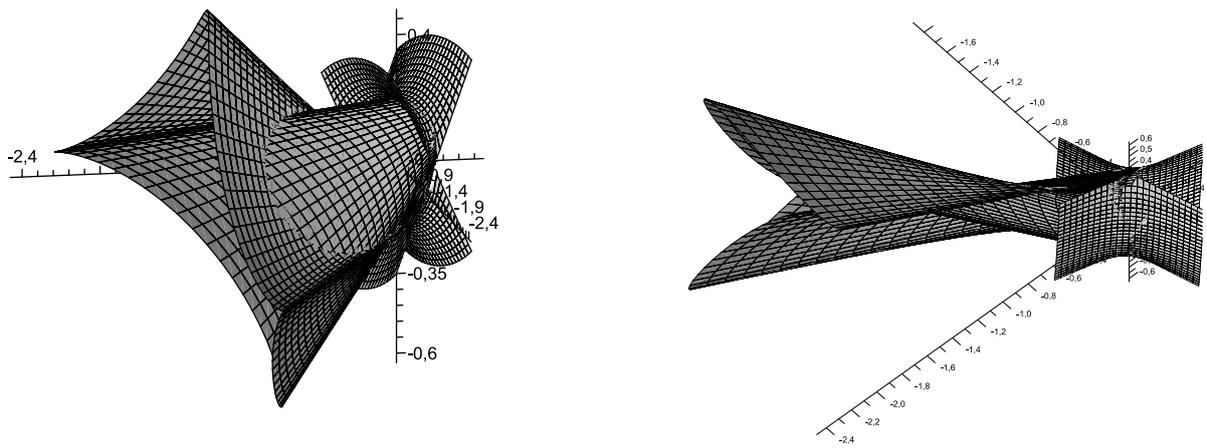


Рис. 4

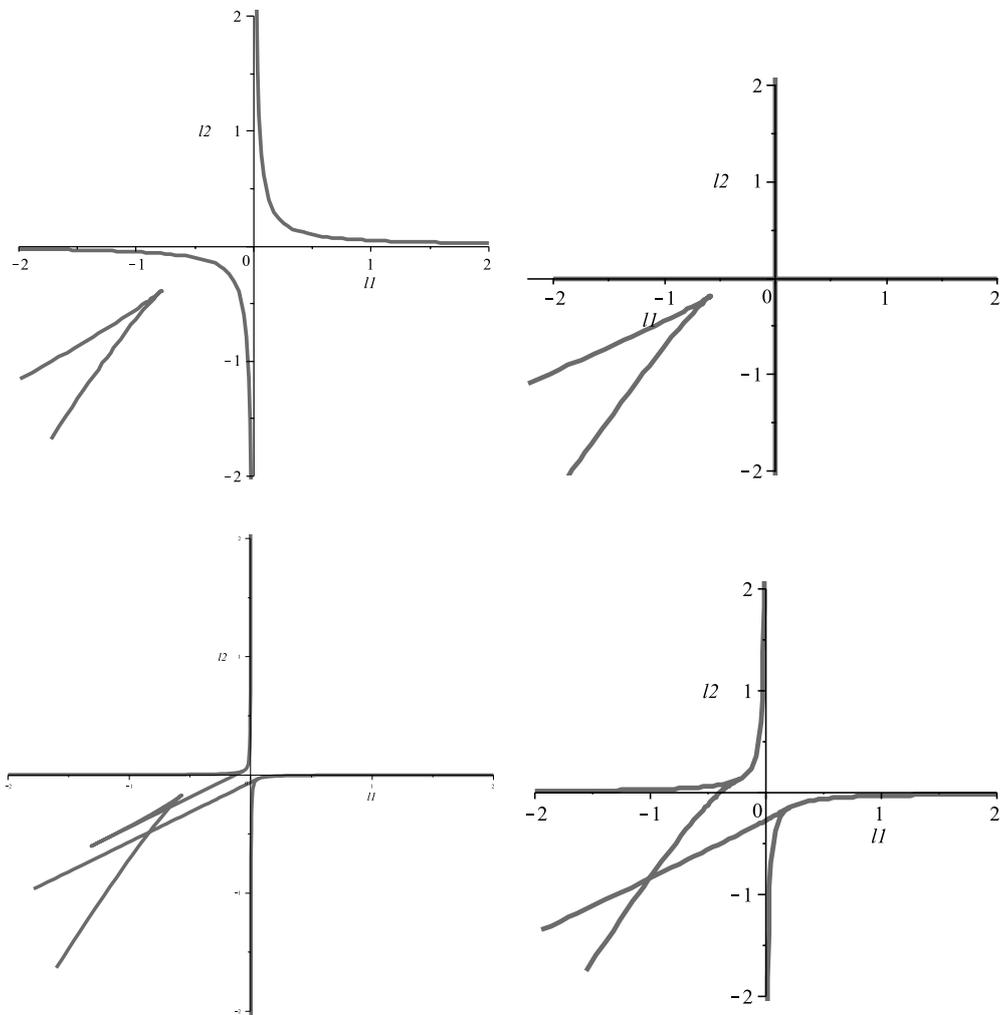


Рис. 5

4. Малюгина М. А. Бифуркационный анализ краевой задачи для ОДУ четвертого порядка в условиях нарушения потенциальности // Математические модели и операторные уравнения. — Том 5, ч. 1. — Воронеж: ВГУ, 2008. — С. 114—121.

5. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988. — 312 с.

6. Костин Д. В. Бифуркационный анализ критических точек функции двух переменных вблизи

особенности типа 2-мерной сборки // Математические модели и операторные уравнения. — Том 5, ч. 1. — Воронеж: ВГУ, 2008. — С. 91—97.

7. Койтер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика. Периодический сборник переводов иностр. статей. — 1960. — № 5. — С. 99—110.

8. Ворovich И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. — М.: Наука, 1989. — 376 с.

Малюгина Маргарита Александровна — аспирант математического факультета. Воронежский государственный университет

E-mail: Malyugina-vrn@mail.ru

Тел.: +7 904-210-00-68

Malyugina Margarita Aleksandrovna — post graduate student of mathematical department. Voronezh State University

E-mail: Malyugina-vrn@mail.ru

Tel.: +7 904-210-00-68