УДК 517.9

# НЕЛОКАЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КЛЮЧЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

**Т. И. Костина**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 14 сентября 2010 г.

**Аннотация:** предложена процедура нелокального сведения (редукции) задачи о периодических решениях уравнений классического вариационного исчисления к изучению критических точек и поверхностей уровней гладких функций на конечномерных пространствах (нелокальная вариационная версия метода Ляпунова—Шмидта). В качестве модельных примеров рассмотрены уравнение колебаний маятника и уравнение Белецкого (уравнение колебаний спутника вблизи эллиптической орбиты).
**Ключевые слова:** вариационный метод Ляпунова—Шмидта, уравнение колебаний маятника, уравнение Белецкого, нелокальный бифуркационный анализ, ключевая функция.

**Abstract:** the procedure of nonlocal reduction of the problem of periodic solutions of the equations of classical variational calculus to the study of critical points and level surfaces of smooth functions on a finite dimensional space (nonlocal variational version of the Lyapunov-Schmidt) is proposed. As model examples the equation of simple gravity pendulum and the Beletskii equation (satellite oscillation equation near an elliptical orbit) are considered.
**Key words:** Lyapunov—Schmidt variational method, pendulum oscillations equation, Beletskii equation, nonlocal bifurcational analysis, key function.

**Введение.** В статье предложена процедура нелокального сведения (редукции) задачи о периодических решениях уравнений классического вариационного исчисления к изучению критических точек и поверхностей уровней гладких функций (ключевых функций) на конечномерных пространствах (нелокальная вариационная версия метода Ляпунова—Шмидта).

Переход к ключевой функции позволяет применять (в проблеме периодических решений) новые методы анализа гладких функций и новые вычислительные технологии. Важную роль при этом играют идеи и методы теории особенностей гладких отображений.

Любая реализация идеи конечномерной редукции сопряжена не только с необходимостью ее математического обоснования, но и с разработкой алгоритмов, позволяющих вычислять ключевую функцию и ее возмущения. Предложенная в работе вычислительно-аналитическая процедура апробирована в случае уравнения колебаний маятника и уравнения Белецкого. “Функционально-операторная оболочка”, использованная в данной работе, придает предложенному подходу универсальность и широту, выводящие изложенную методику исследований за рамки, очерченные рассмотренными моделями.

## § 1. НЕЛОКАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА—ШМИДТА

Среди теоретических проблем, связанных с развитием и применением метода конечномерных редукций [1] — [3], выделяются вопрос нелокальной продолжимости ключевых параметров и тесно с ним связанный вопрос нелокального бифуркационного анализа вариационных задач с параметрами. Соответствующий круг задач включает не только задачу нелокального существования ключевых параметров, но и задачу точного или приближенного представления редуцирующих (маргинальных) отображений и ключевых функций. Возможность их точного представления появляется, например, в некоторых случаях интегрируемых уравнений [2], [3]. В данной работе рассматривается приближенное представление, основанное на численном интегрировании дифференциальных уравнений.

© Костина Т. И., 2011

Пусть $f : E \to F$ — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств [4]. Пусть $f$ собственно (то есть прообраз любого компакта компактен) и потенциально:

$$\langle f(x), h\rangle \equiv \frac{\partial V}{\partial x}(x)h, \qquad (1)$$

где $V$ — гладкий функционал на $E$ (потенциал отображения $f$), $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ — скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве $H$, в которое $E$ и $F$ непрерывно вложены. Также предполагается, что $E$ непрерывно вложено в $F$.

Если выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h\right\rangle > 0 \qquad \forall (x,h) \in E \times (E \setminus 0), \quad (2)$$

то, как легко проверить, уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного решения ([4], [6]). Решение этого уравнения является точкой минимума $V$ на $E$.

В случае выполнения условия собственности $f$ (компактность прообраза произвольного компакта) уравнение $f(x) = 0$ однозначно разрешимо (следствие теоремы Банаха—Мазура—Каччиополи [4]) и его решение является точкой глобального минимума $V$ [1].

Если соотношение (2) заменить более слабым условием

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h\right\rangle > 0 \qquad \forall (x,h) \in E \times (\tilde{E} \setminus 0), \quad (3)$$

где $\tilde{E} = E \cap N^{\perp}, N = Lin(e_1,\ldots,e_n), N^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $N$ в $H$, $e_1,\ldots,e_n$ — некоторая ортонормированная в $H$ система векторов в $E$, то можно определить ключевую функцию Ляпунова—Шмидта

$$W(\xi) := \inf_{x:\langle x,e_j\rangle=\xi_j\ \forall j} V(x), \qquad \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)^{\mathrm{T}}, \quad (4)$$

"отвечающую" за поведение функционала $V$. Условие собственности $f$ можно ослабить, заменив его условием собственности при каждом $\xi$ "послойного" отображения (условие "послойной собственности")

$$\tilde{f}_\xi : \tilde{E} \to \tilde{F},$$

где

$$\tilde{F} = F \cap N^{\perp},$$

$$\tilde{f}_\xi(v) := P_{\tilde{F}}\Big(f\big(l(\xi) + v\big)\Big) =$$
$$= f\big(l(\xi) + v\big) - \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, f\big(l(\xi) + v\big)\rangle e_j,$$

$$l(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j.$$

При выполнении условий (3) уравнение

$$\tilde{f}_\xi(v) = 0$$

однозначно разрешимо при всех $\xi$. Его решение $v = \Phi(\xi)$ гладко зависит от $\xi$ — по теореме о неявной функции. Левую часть (4) можно представить в виде

$$W(\xi) \equiv V(l(\xi) + \Phi(\xi)).$$

Для ключевого уравнения

$$\theta(\xi) = 0, \qquad \xi \in R^n,$$

в котором

$$\theta(\xi) = \big(\theta_1(\xi),\ldots,\theta_n(\xi)\big)^{\mathrm{T}},$$
$$\theta_j(\xi) = \Big\langle f\big(l(\xi) + \Phi(\xi)\big), e_j\Big\rangle,$$

имеем [1]:

$$\theta(\xi) = \operatorname{grad} W(\xi).$$

## § 2. КОНЕЧНОМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА И УРАВНЕНИЯ БЕЛЕЦКОГО

Уравнение колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты (уравнение Белецкого), выведенное В. В. Белецким в 1956 г. и опубликованное 1959 г. [7], имеет следующий вид:

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2q}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{dq}{d\nu} + \mu\sin q - 4e\sin\nu = 0. \qquad (5)$$

Здесь $e$ — эксцентриситет орбиты, $\mu$ — параметр, характеризующий распределение массы спутника, $q$ — угол между фокальным радиусом и осью симметрии спутника, $\nu$ — угловая (полярная) координата центра масс спутника.

С тех пор это уравнение изучалось многими исследователями на основе различных подходов. Метод Ляпунова—Шмидта также использовался при изучении этого уравнения [5], но лишь в случае одного локального ключевого параметра (локальной одномерной редукции) и без использования его вариационной природы.

В данной работе рассмотрен случай двух нелокальных ключевых параметров (нелокаль-

ной двумерной редукции) и использовано вариационное происхождение уравнения.

После умножения уравнения (5) на $(1+e\cos\nu)$ получается уравнение, являющееся уравнением Эйлера-Лагранжа, отвечающим функционалу действия

$$V(q)=\int_0^{2\pi}L(\dot q,q)dt, \qquad (6)$$

с лагранжианом $L(\dot q,q)$:

$$\frac{\dot q^2}{2}\Big(1+e\cos(\nu)\Big)^2+\Big(1+e\cos(\nu)\Big)4eq\sin(\nu)+ \\ +\Big(1+e\cos(\nu)\Big)\mu\cos(q) \qquad (7)$$

(соответствующая теорема доказана в [8]).

После замены:

$$q\mapsto x,\quad \nu\mapsto t,\quad e\mapsto\varepsilon.$$

функционал действия для уравнения Белецкого примет следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(1+\varepsilon\cos(t)\Big)^2\frac{\dot x^2}{2}dt+ \\ +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(1+\varepsilon\cos(t)\Big)\Big(\lambda\cos(x)+4\varepsilon x\sin(t)\Big)dt.$$

Вариационный характер уравнения Белецкого позволяет применить к нему вариационную версию метода Ляпунова—Шмидта.

Если в уравнении (5) положить $\varepsilon=0$, то получим уравнение колебаний маятника:

$$\ddot x+\mu\sin(x)=0.$$

Краевые задачи для неоднородного уравнения колебаний маятника в случае двух нелокальных ключевых параметров и с использованием вариационного характера уравнения рассматривал в своих работах А. Ю. Борзаков [9], [10].

В данной работе рассмотрена периодическая задача

$$\ddot x+\mu\sin(x)=q_0e_0+q_1e_1+q_2e_2,$$

$e_0=1, e_1=\sqrt{2}\cos(t), e_2=\sqrt{2}\sin(t)$ и более общая периодическая задача для неоднородного уравнения Белецкого (ниже рассмотрен, без ущерба для общности, постоянный период $T=2\pi$)

Последнее уравнение соответствует функционалу действия

$$V_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\dot x^2}{2}+\lambda\Big(\cos(x)-1\Big)+qx\right)dt, \quad (8)$$

$q=q_0e_0+q_1e_1+q_2e_2.$

Заметим, что эта задача при $q=0$ интегрируема (в квадратурах) и решение можно выписать через функцию Якоби.

Запишем функционал (8) в следующем виде:

$$V_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\dot x^2}{2}-\lambda\frac{x^2}{2}\right)dt+ \\ +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda\left(\frac{x^2}{2}+\cos(x)-1\right)dt,$$

так как $\frac{x^2}{2}+\cos(x)$ — выпуклая функция, то при $\lambda>0$ второе слагаемое — выпуклый функционал. При $\lambda<0$ первое слагаемое также является выпуклым. При $\lambda>0$ выпуклость первого слагаемого исчезает.

Моды бифуркации, по которым происходит вырождение при $\lambda<4$, следующие:

$$e_0=1,\ e_1=\sqrt{2}\cos(t),\ e_2=\sqrt{2}\sin(t).$$

Пусть $E=\Pi^2_{2\pi}$ — пространство периодических дважды непрерывно дифференцируемых функций, $F=\Pi^0_{2\pi}$ — пространство непрерывных функций и пусть $f:E\to F$ — отображение, заданное левой частью уравнения Белецкого:

$$f_\varepsilon(x)=\Big(1+\varepsilon\cos(t)\Big)\frac{d^2x}{dt^2}- \\ -2\varepsilon\sin(t)\frac{dx}{dt}+\mu\sin(x)-4\varepsilon\sin(t).$$

Если $1<\lambda<4$, то

$$E=Lin(e_0,e_1,e_2)+E^{\infty-3},$$

где $E^{\infty-3}$ — ортогональное дополнение к $Lin(e_0,e_1,e_2)$ (все функции, у которых коэффициенты Фурье по $e_0,e_1,e_2$ равно нулю). При $\lambda<4$ функционал действия является выпуклым на $E^{\infty-3}$, а его условный градиент послойно собственен.

Для отыскания ключевой функции

$$W(\xi)=\inf_{v\perp e_0,e_1,e_2}V(\xi_0+\xi_1e_1+\xi_2e_2+v)$$

можно применить редуцирующую схему Пуанкаре—Ляпунова—Шмидта [1].

Вследствие круговой симметрии, которая возникает по причине того, что функция инвариантна относительно трансляции (инвариантна относительно сдвига $\Gamma_s: g(t)\to g(t+s)$), получим ключевую функцию в виде [1]:

$$W(\xi_0,\xi_1,\xi_2)=\widehat{W}(\xi_0,r^2),\ r^2=\xi_1^2+\xi_2^2.$$

В случае $\varepsilon \neq 0$ функционал действия можно записать в следующем виде:

$$V_\varepsilon(x) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left(1+\varepsilon\cos(t)\right)^2\frac{\dot{x}^2}{2} - \lambda\left(1+\varepsilon\cos(t)\right)\frac{x^2}{2}\right)dt +$$
$$+\lambda\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left(1+\varepsilon\cos(t)\right)\left(\frac{x^2}{2}+\cos(x)\right)\right)dt + 4\varepsilon,$$

если $\left|\varepsilon\right| < 1$.

Здесь подынтегральная функция выпуклая во втором слагаемом, следовательно второе слагаемое является выпуклым функционалом. Первое слагаемое — выпуклый функционал при $\lambda < \dfrac{4(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}$. Это вытекает из следующих оценок:

$$\int_0^{2\pi}\left(1+\varepsilon\cos(t)\right)^2\dot{x}^2dt \geq \int_0^{2\pi}(1-\varepsilon)^2\dot{x}^2dt \geq$$
$$\geq 4(1-\varepsilon)^2\int_0^{2\pi}x^2dt,$$

— вследствие обобщенного неравенства Пуанкаре — Виртингера (если $x(t) \in E^{\infty-3}$) [11], и при $\varepsilon < 1$ и $x \neq 0$ вытекает оценка снизу второго слагаемого в первом интеграле $V_\varepsilon(x)$:

$$\lambda\int_0^{2\pi}\left(1+\varepsilon\cos(t)\right)x^2dt \leq \lambda(1+\varepsilon)\int_0^{2\pi}x^2dt.$$

Из этих неравенств получаем, что первый интеграл оценивается снизу таким выражением:

$$\frac{1}{2\pi}\left(4(1-\varepsilon)^2 - \lambda(1+\varepsilon)\right)\int_0^{2\pi}x^2dt.$$

Отсюда следует выпуклость этого слагаемого при $4(1-\varepsilon)^2 - \lambda(1+\varepsilon) > 0$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** *В случае* $0 \leq \varepsilon < 1$ *и* $\lambda < \dfrac{4(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}$ *функционал действия является выпуклым на* $E^{\infty-3} := E \cap N^\perp\left(N = Lin(e_0, e_1, e_2)\right)$ *и его условный градиент по подпространству* $E^{\infty-3}$ *является собственным (как отображение из* $E^{\infty-3}$ *в* $F^{\infty-3} := F \cap N^\perp$ *).*

На основе этой теоремы можно утверждать, что существует, при любом $u \in N$, $\inf\limits_{v\varepsilon E^{\infty-3}} V(u+v)$. Таким образом, следуя схеме Ляпунова—Шмидта, можно разыскивать ключевую функцию в виде:

$$W(\xi) \equiv V(u + \Phi(\xi)), u := \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2. \quad (9)$$

Основная трудность заключается в построении приближений $\tilde{\Phi}(\xi)$ к функции $\Phi(\xi)$. Одним из основных методов ее построения является метод кратчайшего градиентного спуска, в соответствии с которым последовательность приближений $\Phi(\xi)$ приводит к последовательности приближений ключевой функции

$$W_{(k)} = V(u + v_k).$$

Если на каждом шаге рассматривать выпуклую функцию $w(s) = V(u + v_k + s\nabla_k), s \geq 0$, $\nabla_k = -grad V(u + v_k)$, то приближение к точке минимума приводит, по методу Ньютона, к итерациям (см. [9], [10])

$$h_{k+1} = s_{k+1}\nabla_k, \qquad s_k = \frac{\langle f_\lambda(u+v_k), \nabla_k\rangle}{\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x}(a+v_k)\nabla_k, \nabla_k\right\rangle}.$$

В процессе вычислений возникает необходимость приближенного представления функций $\cos(u)$, $\sin(u)$, которое осуществляется посредством формул Лагранжа—Эрмита.

В [10] при построении приближений к ключевой функции использовался метод Галеркина. Первым шагом в реализации этого метода является выбор набора базисных функций, которые должны удовлетворять граничным условиям и образовывать полную систему. В рассмотренной здесь задаче весьма удобно воспользоваться стандартной последовательностью тригонометрических функций:

$$e_0 = 1,\ e_1 = \cos(t);\ e_2 = \sin(t),$$
$$e_3 = \cos(2t),\ e_4 = \sin(2t)\ldots.$$

В итоге получаем систему уравнений (нелинейная аппроксимация метода Галеркина)

$$\left\langle f(\sum_{k=1}^{N}\xi_k e_k), e_j\right\rangle = 0, \quad j = 1,\ldots,N.$$

В результате применения этих методов получаются сходящиеся итерационные процессы, позволяющие строить ключевую функцию с любой требуемой точностью.

После получения приближения ключевой функции можно осуществить приближенное построение дискриминантного множества (*каустики*) — множества значений параметров $(q_0, q_1, q_2)$, при которых существуют вырожденные критические точки. Каустика определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} grad\ W_j(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 0, \\ Hessian\ W_j(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 0, \end{cases} \qquad (10)$$

$\lambda = (\mu, q)$, $q = q_0 + q_1 \cos(t) + q_2 \sin(t)$.

Здесь $W(\xi, \lambda, q) = u(\xi, \lambda) + q_0\xi_0 + q_1\xi_1 + q_2\xi_2$,

$$grad\ W = grad\ u + \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Заметим, что поскольку здесь имеется круговая симметрия (в плоскости $\xi_1, \xi_2$), то можно провести вторичную редукцию по круговой симметрии (положив $\xi_2 = 0$).

После получения информации о геометрическом строении каустики нетрудно изучить *bif*-расклады экстремалей, соответствующих ячейкам регулярности (компонентам свяности дополнения к каустике) [1], и взаимное примыкание раскладов.

При выполнении всех необходимых вычислений, а также при построении графиков в данной работе использовалась программа Matlab. На рис. 1 приведены изображения линий уровня приближенно вычисленных редуцированных (по круговой симметрии) ключевых функций уравнения маятника (слева, первые два) и уравнения Белецкого (справа). Огибающие на рис. 2 являются изображениями каустики уравнения Белецкого и уравнения колебаний маятника (ключевая функция в этом случае получена с помощью нелинейной аппроксимации Галеркина). Огибающие на рис. 3 являются изображениями каустики уравнения колебаний маятника (ключевая функция получена по круговой симметрии).

*Рис. 1.* Фрагменты линий уровня редуцированных (по симметрии) ключевых функций уравнения колебаний маятника и уравнения Белецкого

*Рис. 2.* Образы координатных линий отображений градиента $W$ уравнения Белецкого и уравнения колебаний маятника

*Рис. 3.* Образ координатных линий отображений градиента $W$ уравнения колебаний маятника

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. — Т.12. — 2004. — С. 3—140.

2. *Levchenko O. N., Sapronov Yu. I.* Morse—Bott reduction for a symmetric Kirchhoff rood // Methods and Applications of Global Analysis. Voronezh University Press. — 1993. — P. 95—100.

3. *Сапронов Ю. И., Царев С. Л.* Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах // Матем. заметки. — 2000. — Т. 58. — № 5. — С. 745—754.

4. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера // Успехи матем. наук. — 1977. — Т. 32. — Вып. 4. — С. 3—54.

5. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука. 1969. — 528 с.

6. *Зачепа В. Р., Сапронов Ю. И.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений// Воронежский госуниверситет. — Воронеж, 2002.

7. *Белецкий В. В.* Движение искуственного спутника вокруг центра масс. — М.: Наука, 1965. — 416 с.

8. *Костина Т. И.* Анализ ветвления периодических решений уравнения Белецкого посредством вариационного метода Ляпунова—Шмидта // Математические модели и операторные уравнения. Том 5. — Вып. 1. — Воронеж: ВорГУ, 2008. — С. 98—104.

9. *Борзаков А. Ю.* Нелинейные ритцевские аппроксимации и визуализации бифуркаций экстремалей / А. Ю. Борзаков, А. А. Лемешко // Вестник ВГУ. Сер. физ., матем. — Воронеж: ВГУ. — 2003. — Вып. 2. — С. 100—112.

10. *Борзаков А. Ю.* Редукции в нелокальном анализе вариационных краевых задач и уравнение колебаний маятника // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. — Воронеж: ВГУ. — 2005. — Вып. 1. — С. 34—44.

11. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. — М.: Мир. — 1965. — С. 245.

*Костина Татьяна Ивановна — аспирант кафедры математического моделирования. Воронежский государственный университет*

*E-mail: tata_sti@rambler.ru*

*Тел.:+7-920-402-39-59*

*Kostina Tatiana Ivanovna — post-graduate student, chair of mathematical model. Voronezh State University*

*E-mail: tata_sti@rambler.ru*

*Tel.:+7-920-402-39-59*