УДК 517.928.7

СИНХРОНИЗАЦИЯ ДВУХ СЛАБО СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С БЛИЗКИМИ ЧАСТОТАМИ

О. Г. Корольков, В. В. Стрыгин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15 сентября 2010 г.

Аннотация: рассматриваются две слабо связанные динамические системы, в каждой из которых может возникнуть орбитально-устойчивый предельный цикл. Получены достаточные условия синхронизации малых автоколебаний.
Ключевые слова: синхронизация, малые автоколебания.

Abstract: the paper deals with the dynamical system describing two weakly coupled abstract oscillators with close frequencies. The conditions for coefficients of initial system guarantying synchronization of small self-oscillations are derived.
Key words: synchronization, small self-oscillations.

ВВЕДЕНИЕ

Триста лет назад Х. Гюйгенс открыл явление синхронизации двух маятниковых часов, закреплённых на общей балке. Позже многие авторы обнаружили подобные явления в оптике, квантовой механике и т.д. Возникновение радиосвязи и электроники стимулировало бурное развитие в изучении синхронизации. Обширный обзор приложений можно найти в [1], [2], где приведены самые разнообразные задачи из механики, лазерной физики, акустики, биологии и т.д.

Мы понимаем синхронизацию как подстройку ритмов автоколебательных систем за счет слабого взаимодействия между ними. Каждая из этих систем содержит внутренний источник энергии, которая трансформируется в колебательное движение; при отсутствии внешнего воздействия система генерирует один и тот же ритм, пока не иссякнет источник энергии. Также предполагается, что форма автоколебаний определяется параметрами системы и не зависит от перехода к стационарным колебаниям, и что автоколебания устойчивы по отношению к малым возмущениям.

Мы понимаем фазу автоколебательной системы как величину, которая пропорциональна доле периода и возрастает на 2π в течение одного цикла колебаний. Если в результате взаимодействия разность фаз двух автоколебательных систем принимает значение, близкое к $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, то такой режим называют синхронизацией в фазе, или синфазной синхронизацией (рис. 1). Если же разность фаз принимает значение, близкое к $\pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, то такой режим называют синхронизацией в противофазе (рис. 2).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе мы рассматриваем сложную систему вида:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= -\xi_2 + \varepsilon\left(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2\right) + \\ &+\varepsilon\nu\left(p_{11}\eta_1 + p_{12}\eta_2\right) + X_1\left(\xi_1, \xi_2, u_1, \ldots, u_n\right),\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_2}{dt} &= \xi_1 + \varepsilon\left(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2\right) + \\ &+\varepsilon\nu\left(p_{21}\eta_1 + p_{22}\eta_2\right) + X_2\left(\xi_1, \xi_2, u_1, \ldots, u_n\right),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{du_s}{dt} = \left(c_{s1}u_1 + \cdots + c_{sn}u_n\right) + U_s\left(\xi_1, \xi_2, u_1, \ldots, u_n\right) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_1}{dt} &= -\eta_2 + \varepsilon\left(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2\right) + \\ &+\varepsilon\nu\left(q_{11}\xi_1 + q_{12}\xi_2\right) + Y_1\left(\eta_1, \eta_2, v_1, \ldots, v_m\right),\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_2}{dt} &= \eta_1 + \varepsilon\left(b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2\right) + \\ &+\varepsilon\nu\left(q_{21}\xi_1 + q_{22}\xi_2\right) + Y_2\left(\eta_1, \eta_2, v_1, \ldots, v_m\right),\end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{dv_k}{dt} = \left(d_{k1}v_1 + \cdots + d_{km}v_m\right) + V_k\left(\eta_1, \eta_2, v_1, \ldots, v_m\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{6}$$

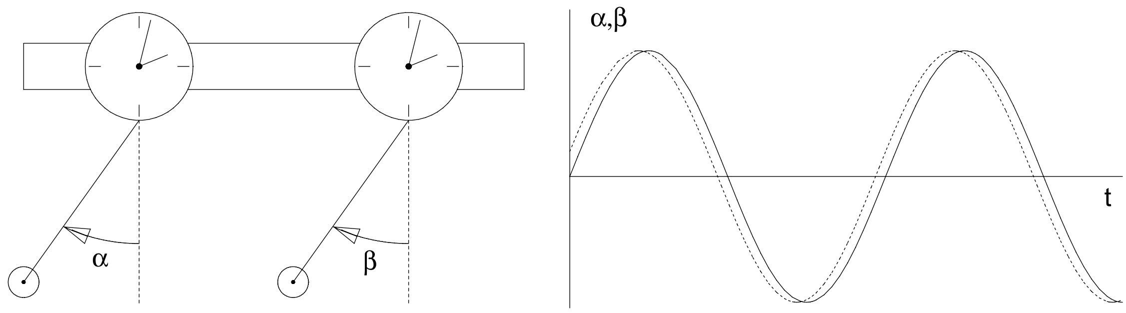

Рис. 1. Синхронизация двух маятниковых часов в фазе

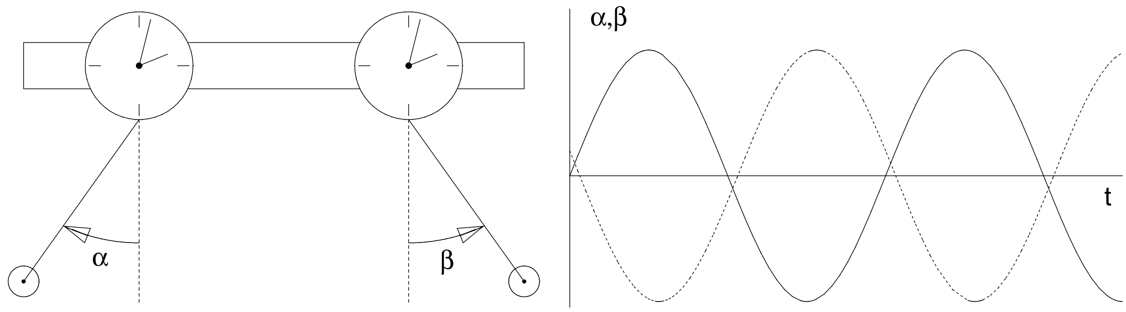

Рис. 2. Синхронизация двух маятниковых часов в противофазе

где ξ_1, ξ_2, u_1, ..., u_n, η_1, η_1, v_1, ..., $v_m \in \mathbb{R}$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $\nu > 0$; $a_{11} + a_{22} > 0$, $b_{11} + b_{22} > 0$; коэффициенты c_{sr} и d_{kl} таковы, что характеристические уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \mu & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mm} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

имеют корни только с отрицательными вещественными частями; нелинейности X_i, U_s, Y_j и V_k имеют непрерывные производные до 3-го порядка включительно по каждой из переменных. Предполагается, что устойчивость нулевого положения равновесия системы определяется только линейными, квадратичными и кубическими членами.

При отсутствии взаимодействия (при $\nu = 0$) система (1)—(6) распадается на две независимые подсистемы. Предположим, что константа Ляпунова для каждой из этих подсистем отрицательна, что обеспечивает существование предельного цикла в каждой из них (см. [3], [4]).

Перейдём в системе (1) — (6) к полярным координатам

$$\xi_1 = r\cos\alpha, \xi_2 = r\sin\alpha,$$
$$\eta_1 = \rho\cos\beta, \eta_2 = \rho\sin\beta.$$

Определение 1. *Будем говорить, что при* $\varepsilon = 0$ *в* системе (1)—(6) *возникают малые синхронные автоколебания, если существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* ε *из* $(0, \varepsilon_0)$ *система* (1)—(6) *имеет ненулевой орбитально-устойчивый предельный цикл*

$$\Gamma(t,\varepsilon) = \{\xi_1(t,\varepsilon), \xi_2(t,\varepsilon), u_1(t,\varepsilon), \dots, u_n(t,\varepsilon),$$
$$\eta_1(t,\varepsilon), \eta_2(t,\varepsilon), v_1(t,\varepsilon), \dots, v_m(t,\varepsilon)\},$$

обладающий следующими свойствами при $\varepsilon \to 0$ и $t \to \infty$:

1) период цикла $\Gamma(t,\varepsilon)$ *стремится к* 2π,

2) функции $\xi_1(t,\varepsilon)$, $\xi_1(t,\varepsilon)$, $u_1(t,\varepsilon)$, $\dots$, $u_n(t,\varepsilon)$, $\eta_1(t,\varepsilon)$, $\eta_2(t,\varepsilon)$, $v_1(t,\varepsilon)$, $\dots$, $v_m(t,\varepsilon)$ *стремятся к нулю,*

3) разность фаз $\alpha(t,\varepsilon) - \beta(t,\varepsilon)$ *стремится к некоторому фиксированному числу* φ_0.

Будем искать условия на коэффициенты матриц

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},$$

при которых в системе (1)—(6) возникают синхронные автоколебания в смысле определения 1.

В работах [4], [5] рассмотрен случай, когда сила взаимодействия между системами слабее силы, вызывающей малые автоколебания в каждой из них, т. е. $\nu = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Однако при этом на коэффициенты разделенных систем наложены дополнительные условия (так, например, в [5] рассмотрен случай почти идентичных систем). В данной работе рассматривается случай, когда сила взаимодействия между системами имеет тот же порядок, что и сила, вызывающая малые автоколебания в каждой из них, т. е. $\nu = 1$. Это позволяет получить достаточные условия возникновения синхронных автоколебаний без наложения дополнительных условий на коэффициенты разделённых систем.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ

Система (1)—(6) имеет вблизи начала координат 4-мерное локальное экспоненциально устойчивое инвариантное интегральное многообразие, асимптотическое приближение к которому несложно построить (см. [6], [7]). Движение на многообразии описывается следующей 4-мерной системой:

$$\begin{gathered}\frac{d\xi_1}{dt} = -\xi_2 + \varepsilon\left(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2\right) + \varepsilon\nu\left(p_{11}\eta_1 + p_{12}\eta_2\right) + \\ +\left(g_1^{20}\xi_1^2 + 2g_1^{11}\xi_1\xi_2 + g_1^{02}\xi_2^2\right) + \\ +\left(g_1^{30}\xi_1^3 + 3g_1^{21}\xi_1^2\xi_2 + 3g_1^{12}\xi_1\xi_2^2 + g_1^{03}\xi_2^3\right) + \ldots,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\xi_2}{dt} = \xi_1 + \varepsilon\left(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2\right) + \varepsilon\nu\left(p_{21}\eta_1 + p_{22}\eta_2\right) + \\ +\left(g_2^{20}\xi_1^2 + 2g_1^{11}\xi_1\xi_2 + g_2^{02}\xi_2^2\right) + \\ +\left(g_2^{30}\xi_1^3 + 3g_2^{21}\xi_1^2\xi_2 + 3g_2^{12}\xi_1\xi_2^2 + g_2^{03}\xi_2^3\right) + \ldots,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\eta_1}{dt} = -\eta_2 + \varepsilon\left(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2\right) + \varepsilon\nu\left(q_{11}\xi_1 + q_{12}\xi_2\right) + \\ +\left(h_1^{20}\eta_1^2 + 2h_1^{11}\eta_1\eta_2 + h_1^{02}\eta_2^2\right) + \\ +\left(h_1^{30}\eta_1^3 + 3h_1^{21}\eta_1^2\eta_2 + 3h_1^{12}\eta_1\eta_2^2 + h_1^{03}\eta_2^3\right) + \ldots,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\eta_2}{dt} = \eta_1 + \varepsilon\left(b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2\right) + \varepsilon\nu\left(q_{21}\xi_1 + q_{22}\xi_2\right) + \\ +\left(h_2^{20}\eta_1^2 + 2h_2^{11}\eta_1\eta_2 + h_2^{02}\eta_2^2\right) + \\ +\left(h_2^{30}\eta_1^3 + 3h_2^{21}\eta_1^2\eta_2 + 3h_2^{12}\eta_1\eta_2^2 + h_2^{03}\eta_2^3\right) + \ldots,\end{gathered} \tag{10}$$

где $g_k^{rs}, h_k^{rs} \in \mathbb{R}$ $(i,j,k = 1,2,\ r,s = 0,1,2,3)$; многоточиями обозначены члены выше третьего порядка по $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. Перейдём в системе (1)—(6) к полярным координатам $\xi_1 = r\cos\alpha$, $\xi_2 = r\sin\alpha$, $\eta_1 = \varrho\cos\beta$, $\eta_2 = \varrho\sin\beta$, новым масштабам $r = \varepsilon^{\frac{1}{2}}S$, $\varrho = \varepsilon^{\frac{1}{2}}T$ и новым фазовым углам $\varphi = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$, $\psi = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Получим систему

$$\begin{gathered}\frac{dS}{d\psi} = F_S(S,T,\varphi,\psi,\varepsilon),\ \frac{dT}{d\psi} = F_T(S,T,\varphi,\psi,\varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\psi} = F_\varphi(S,T,\varphi,\psi,\varepsilon),\end{gathered} \tag{11}$$

где F_S, F_T, F_φ — известные 2π-периодические функции по ψ.

Следуя И. Г. Малкину (см. [8]), будем искать 2π-периодическое решение системы (11) в виде рядов по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{gathered}S^*(\psi,\varepsilon) = S_0(\psi) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}S_1(\psi) + \\ +\varepsilon S_2(\psi) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}S_3(\psi) + \cdots,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}T^*(\psi,\varepsilon) = T_0(\psi) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}T_1(\psi) + \\ +\varepsilon T_2(\psi) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}T_3(\psi) + \cdots,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\varphi^*(\psi,\varepsilon) = \varphi_0(\psi) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\varphi_1(\psi) + \\ +\varepsilon\varphi_2(\psi) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\varphi_3(\psi) + \cdots,\end{gathered} \tag{14}$$

причем для отыскания условий синхронизации в фазе будем брать $\varphi_0(\psi) \equiv 0$, а для отыскания условий синхронизации в противофазе — $\varphi_0(\psi) \equiv \dfrac{\pi}{2}$. Здесь мы будем рассматривать случай синхронизации в фазе.

Подставляя разложения (12)—(14) в систему (11) и приравнивая слагаемые при соответствующих степенях ε, получим уравнения для нахождения $S_i(\psi)$, $T_i(\psi)$, $\varphi_i(\psi)$ $(i = 0,1,\ldots)$ с точностью до констант. Для нахождения этих констант приравниваем средние от правых частей получившихся уравнений к нулю. Так, приравнивание к нулю средних от правых частей уравнений, получившихся приравниванием слагаемых при ε, даёт

$$\frac{S_0}{2}\left(a_{11} + a_{22}\right) + \frac{T_0}{2}\left(p_{11} + p_{22}\right) + S_0^3 g = 0, \tag{15}$$

$$\frac{T_0}{2}\left(b_{11}+b_{22}\right)+\frac{S_0}{2}\left(q_{11}+q_{22}\right)+T_0^3 h=0, \quad (16)$$

$$\begin{gathered}\frac{a_{21}-a_{12}}{4}-\frac{b_{21}-b_{12}}{4}+\frac{T_0}{4S_0}\left(p_{21}-p_{12}\right)- \\ -\frac{S_0}{4T_0}\left(q_{21}-q_{12}\right)+\frac{S_0^2}{2}g'-\frac{T_0^2}{2}h'=0,\end{gathered} \quad (17)$$

где

$$g=\frac{3}{8}\left(g_1^{30}+g_2^{21}+g_1^{12}+g_2^{03}\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(g_1^{20}g_2^{20}-g_1^{02}g_2^{02}-g_1^{11}\left(g_1^{20}+g_1^{02}\right)+\right.$$
$$\left.+g_2^{11}\left(g_2^{20}+g_2^{02}\right)\right),$$

$$h=\frac{3}{8}\left(h_1^{30}+h_2^{21}+h_1^{12}+h_2^{03}\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(h_1^{20}h_2^{20}-h_1^{02}h_2^{02}-h_1^{11}\left(h_1^{20}+h_1^{02}\right)+\right.$$
$$\left.+h_2^{11}\left(h_2^{20}+h_2^{02}\right)\right),$$

$$g'=\frac{3}{8}\left(g_2^{30}-g_1^{21}+g_2^{12}-g_1^{03}\right)-$$
$$-\frac{1}{6}\left((g_1^{20})^2+(g_2^{02})^2\right)-\frac{5}{12}\left((g_2^{20})^2+(g_1^{02})^2\right)-$$
$$-\frac{1}{6}\left((g_1^{11})^2+(g_2^{11})^2\right)-\frac{5}{12}\left(g_1^{20}g_1^{02}+g_2^{20}g_2^{02}\right)+$$
$$+\frac{5}{12}\left(g_2^{11}g_1^{20}+g_1^{11}g_2^{02}\right)+\frac{1}{12}\left(g_1^{11}g_2^{20}+g_2^{11}g_1^{02}\right),$$

$$h'=\frac{3}{8}\left(h_2^{30}-h_1^{21}+h_2^{12}-h_1^{03}\right)-$$
$$-\frac{1}{6}\left((h_1^{20})^2+(h_2^{02})^2\right)-\frac{5}{12}\left((h_2^{20})^2+(h_1^{02})^2\right)-$$
$$-\frac{1}{6}\left((h_1^{11})^2+(h_2^{11})^2\right)-\frac{5}{12}\left(h_1^{20}h_1^{02}+h_2^{20}h_2^{02}\right)+$$
$$+\frac{5}{12}\left(h_2^{11}h_1^{20}+h_1^{11}h_2^{02}\right)+\frac{1}{12}\left(h_1^{11}h_2^{20}+h_2^{11}h_1^{02}\right).$$

Потребуем, чтобы система (15)—(16) имела единственное положительное действительное решение $\left(S_0,T_0\right)$. Равенство (17) является условием сближения фаз. Приравнивание к нулю средних от правых частей уравнений, получившихся приравниванием слагаемых при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, даёт систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных констант с матрицей $\mathcal{A}$, где

$$\mathcal{A}_{11}=-\left(a_{11}+a_{22}\right)-\frac{T_0}{2S_0}\left(p_{11}+p_{22}\right),$$

$$\mathcal{A}_{12}=\frac{1}{2}\left(p_{11}+p_{22}\right), \mathcal{A}_{13}=T_0\left(p_{21}-p_{12}\right),$$

$$\mathcal{A}_{21}=\frac{1}{2}\left(q_{11}+q_{22}\right),$$

$$\mathcal{A}_{22}=-\left(b_{11}+b_{22}\right)-\frac{S_0}{2T_0}\left(q_{11}+q_{22}\right),$$

$$\mathcal{A}_{23}=-S_0\left(q_{21}-q_{12}\right),$$

$$\mathcal{A}_{31}=-\frac{T_0}{4S_0^2}\left(p_{11}+p_{22}\right)-\frac{1}{4T_0}\left(q_{11}+q_{22}\right)+S_0 g',$$

$$\mathcal{A}_{32}=\frac{1}{4S_0}\left(p_{11}+p_{22}\right)+\frac{S_0}{4T_0^2}\left(q_{11}+q_{22}\right)-T_0 h',$$

$$\mathcal{A}_{33}=-\frac{T_0}{2S_0}\left(p_{11}+p_{22}\right)-\frac{S_0}{2T_0}\left(q_{11}+q_{22}\right).$$

Условие $\left|\mathcal{A}\right|\neq 0$ гарантирует существование 2π-периодического решения (12)—(14) системы (11). Для исследования устойчивости полученного решения воспользуемся методом Боголюбова—Штокало (см. [9]).

Введём обозначения

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} S \\ T \\ \varphi \end{pmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{x},\psi,\varepsilon)=\begin{pmatrix} F_S(S,T,\varphi,\psi,\varepsilon) \\ F_T(S,T,\varphi,\psi,\varepsilon) \\ F_\varphi(S,T,\varphi,\psi,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^*(\psi,\varepsilon)=\begin{pmatrix} S^*(\psi,\varepsilon) \\ T^*(\psi,\varepsilon) \\ \varphi^*(\psi,\varepsilon) \end{pmatrix}$$

и запишем систему (11) в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\psi}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\psi,\varepsilon). \quad (18)$$

Замена $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}^*(\psi,\varepsilon)$ сводит исследование устойчивости 2π-периодического решения (12)—(14) системы (18) к исследованию устойчивости нулевого решения системы

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\psi}=\mathcal{A}(\psi,\varepsilon)\mathbf{y}, \quad (19)$$

где

$$\mathcal{A}(\psi,\varepsilon)=\frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{x}^*(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon)}{\partial\mathbf{x}}.$$

Приведём систему (19) к виду

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\psi}=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}^{(1)}(\psi)\mathbf{y}+\varepsilon\mathcal{A}^{(2)}(\psi)\mathbf{y}+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \quad (20)$$

Замена Боголюбова—Штокало

$$\mathbf{y}=(\mathcal{I}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mathcal{Z}^{(1)}(\psi)+\varepsilon\mathcal{Z}^{(2)}(\psi))\mathbf{z},$$

позволяет записать уравнение (20) в виде

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\psi}=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}^{(1)}\mathbf{z}+\varepsilon\mathcal{B}^{(2)}\mathbf{z}+O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \quad (21)$$

где $\mathcal{B}^{(1)}$ — нулевая матрица, а $\mathcal{B}^{(2)} = \mathcal{A}$. Т. о. отрицательность действительных частей всех собственных значений матрицы $\mathcal{A}$ гарантирует устойчивость нулевого решения системы (21), а следовательно, и устойчивость 2π-периодического решения (12)—(14) системы (11).

Собирая все приведённые выше факты, сформулируем теорему о синхронизации.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* p_{ij}, q_{ij} $(i, j = 1, 2)$ *таковы, что*

1) система (15)—(16) *имеет единственное положительное действительное решение* (S_0, T_0);

2) выполнено равенство (17);

3) действительные части всех собственных значений матрицы $\mathcal{A}$ *отрицательны.*

Тогда в системе (1) — (6) *возникают синхронные автоколебания в смысле определения 1.*

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Для иллюстрации выполнимости условий теоремы 1 приведём численный пример возникновения синхронных автоколебаний в 4-мерной системе:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = -\xi_2 + \varepsilon\left(p_{11}\eta_1 + p_{12}\eta_2\right) + \xi_2^2 + \xi_2^3,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = \xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \varepsilon\left(p_{21}\eta_1 + p_{22}\eta_2\right) + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2 - \xi_2^3,$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = -\eta_2 + \varepsilon\left(q_{11}\xi_1 + q_{12}\xi_2\right),$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} = \eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \varepsilon\left(q_{21}\xi_1 + q_{22}\xi_2\right) - \eta_1^2\eta_2.$$

Возьмём $\varepsilon = 0.01$. Несложно проверить, что для набора коэффициентов

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix}$$

выполнены все условия теоремы 1. Как видно из графика разности фаз (рис. 3), в данной системе возникают синхронные автоколебания.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность проф. И. И. Блехману, проф. Б. Н. Садовскому и проф. Ю. И. Сапронову за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю.* Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003. — 494 с.

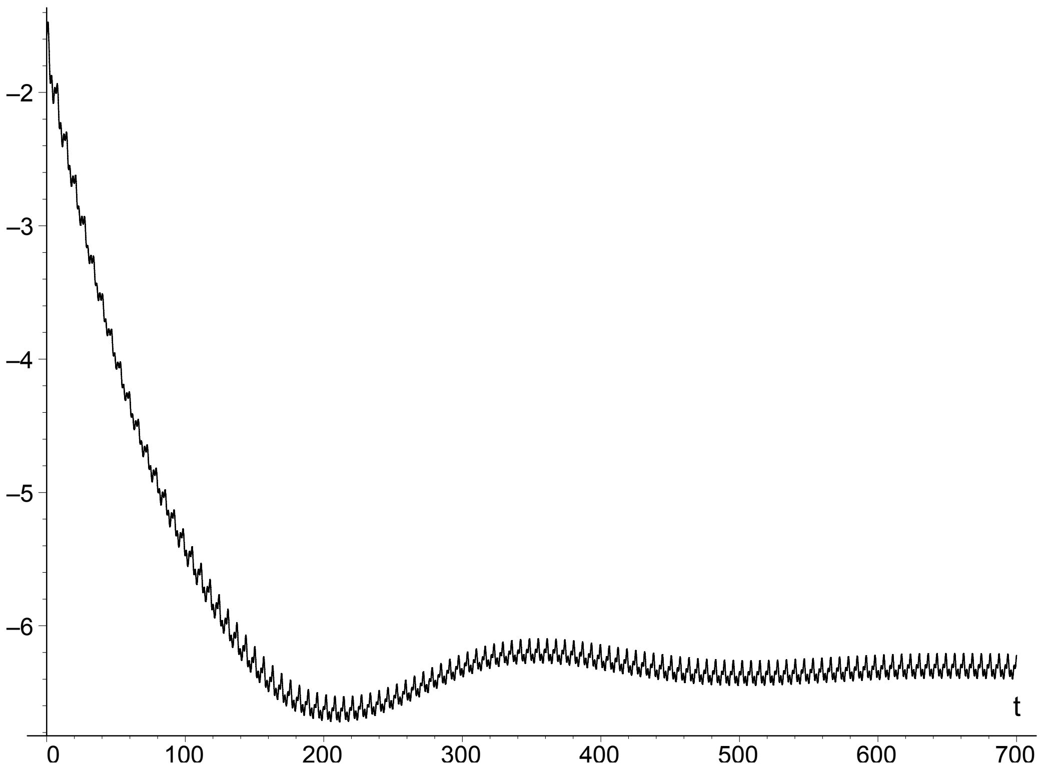

Рис. 3. Синфазная синхронизация: разность фаз стремится в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестность точки $\varphi_0 = -2\pi$

2. *Блехман И. И.* Синхронизация в природе и технике. — М.: Наука, 1981. — 352 с.

3. *Стрыгин В. В.* Смена устойчивостей и бифуркация малых автоколебаний систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 199, № 1. — С. 33—35.

4. *Стрыгин В. В., Северин Г. Ю.* Бифуркация малых синхронных автоколебаний двух динамических систем с близкими частотами // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2006. — 2. — С. 36—45.

5. *Корольков О. Г., Северин Г. Ю., Стрыгин В. В.* Синхронизация автоколебаний двух близких динамических систем // Докл. АН. — 2009. — Т. 428, 1. — С. 38—40.

6. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Мат. Сер. — 1964. — 28. — С. 1297—1324.

7. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. — М.: Наука, 1988. — 254 с.

8. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1966. — 492 с.

9. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970. — 352 с.

Корольков Олег Геннадьевич — аспирант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики. Воронежский государственный университет

E-mail: dahl@list.ru

Тел.: (473) 2208-316

Стрыгин Вадим Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики. Воронежский государственный университет

E-mail: vstrygin@mail.ru

Тел.: (473) 220-83-16

Korolkov Oleg G. — Post-graduate student, the Department of Calculus and Applied Information Technologies, the Faculty of Applied Mathematics, Computer Sciences and Mechanics. Voronezh State University

E-mail: dahl@list.ru

Tel.: (473) 2208-316

Strygin Vadim V. — Ph.D., Professor of the Department of Calculus and Applied Information Technologies, the Faculty of Applied Mathematics, Computer Sciences and Mechanics. Voronezh State University

E-mail: vstrygin@mail.ru

Tel.: (473) 220-83-16