УДК 517.947

ИЗУЧЕНИЕ ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ю. Ю. Карпова, А. С. Рябенко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.09.10

Аннотация. В работе изучается вторая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности.
Доказаны теоремы существования и единственности решения, построена асимптотическая оценка решения при $t \to \infty$.
Ключевые слова: теплопроводность, асимптотика по времени, принцип локализации, переменные коэффициенты, оценка решения.

Abstract. The study investigates second initial-boundary problem for heat conductivity equation with variable coefficient of heat conductivity.
The theorem of existence and singleness of solution is proved, asymptotic estimation of solution at $t \to \infty$ is built.
Keywords: heat conductivity, asymptotic by time, localization principle, variable coefficients, estimation of solution.

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - a^2(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t), \qquad (1.1)$$

с начальными и граничными условиями

$$v(x,t)\Big|_{t=0} = 0, \qquad (1.2)$$

$$\left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=d} = 0 \qquad (1.3)$$

где $t \ge 0$, $x \in \left[0,d\right]$, $a(x) \in C(\left[0,d\right])$ и существуют такие ε_1 и ε_2, что при $x \in \left[0,d\right]$ $0 < \varepsilon_1 \le \left|a(x)\right| \le \varepsilon_2$.

Для изучения поведения решения задачи (1.1)-(1.3) при $t \to \infty$ применен принцип локализации ([1]—[3]), который сводится к выделению и изучению контуров потери аналитичности образа Лапласа решения задачи (1.1)—(1.3). Далее в работе придерживаются следующих обозначений. Через $u(x,\gamma)$ обозначим образ Лапласа решения задачи (1.1)—(1.3) по переменной t $u(x,\gamma) = L_{t\to\gamma}\left[v(x,t)\right]$. Нетрудно убедится в том, что $u(x,\gamma)$ является решением следующей задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x)u(x,\gamma) = f(x,\gamma), \qquad (1.4)$$

$$\left.\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=d} = 0, \qquad (1.5)$$

где $a^2(x) = \dfrac{1}{b^2(x)}$, $f(x,\gamma) = -\dfrac{L_{t\to\gamma}\left[g(x,t)\right]}{a^2(x)}$.

Выделение контуров потери аналитичности функции $u(x,\gamma)$ по переменной γ проводилось при помощи априорных оценок решения задачи (1.4)—(1.5).

Сформулируем условия, которые будут использованы в работе.

Условие 1. Будем говорить, что функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 1, если выполнены следующие условия

1. $g(x,t)$ непрерывна по совокупности переменных при $x \in \left[0,d\right]$, $t \ge 0$;
2. При $\delta > 0$ $g(x,t)e^{\delta t} \in L_1(R_+)$.

Условие 2. Будем говорить, что функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 2, если выполнены следующие условия

1. Для функций вида $\dfrac{\partial^i g(x,t)}{\partial t^i}$, где $0 \le i \le 1$ выполнено условие 1;

2. $g(x,t)\big|_{t=0}=0$.

3. Функция вида $\int\limits_0^\infty \left|\dfrac{\partial^i g(x,t)}{\partial t^i}\right| e^{\delta t}dt \in L_2([0,d])$,

где $0\le i\le 1$.

Условие 3. Будем говорить, что функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 3, если выполнены следующие условия

1. Для функций вида $\dfrac{\partial^i g(x,t)}{\partial t^i}$, где $0\le i\le 2$ выполнено условие 1;

2. $g(x,t)\big|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$;

3. Функция вида $\int\limits_0^\infty \left|\dfrac{\partial^i g(x,t)}{\partial t^i}\right| e^{\delta t}dt \in L_2([0,d])$,

где $0\le i\le 2$.

Определение. Будем говорить, что функция $v_1(x,t)$ принадлежит пространству T_a, если справедливы следующие оценки $\left|\dfrac{\partial^k v_1(x,t)}{\partial t^k}\right|\le ce^{at}$, где $k=0,1$; $\left|\dfrac{\partial^k v_1(x,t)}{\partial x^k}\right|\le ce^{at}$, где $k=1,2$.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.4)—(1.5)

Теорема 2.1. Пусть при $\gamma\in\mathbb{C}$, $\gamma\ne 0$, $0\le|\varphi|\le\pi-\varepsilon_0$ ($\varphi=\arg\gamma$) функции $f(x,\gamma)$, $u(x,\gamma),\dfrac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\in L_2([0,d])$ по переменной x, а $u(x,\gamma)$ является решением задачи (1.4)—(1.5), тогда справедлива оценка $\left\|\dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\|+\sqrt{|\gamma|}\left\|\dfrac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\|+|\gamma|\|u(x,\gamma)\|\le c\|f(x,\gamma)\|$, причем $\varepsilon_0>0$ может быть сколько угодно малым.

Доказательство. Умножив (1.4) скалярно на $\overline{u}(x,\gamma)$ и проинтегрируем по $[0,d]$, тогда с учетом (1.5) получаем равенство

$$\int\limits_0^d \left|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right|^2 dx+\gamma\int\limits_0^d b^2(x)|u(x,\gamma)|^2dx = -(f(x,\gamma),u(x,\gamma)). \tag{2.1}$$

Действительная и мнимая часть последнего равенства выглядит так

$$\int\limits_0^d \left|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right|^2 dx+|\gamma|\cos\varphi\int\limits_0^d b^2(x)|u(x,\gamma)|^2dx = -\operatorname{Re}\int\limits_0^d f(x,\gamma)\overline{u}(x,\gamma)dx, \tag{2.2}$$

$$|\gamma|\sin\varphi\int\limits_0^d b^2(x)|u(x,\gamma)|^2dx = -\operatorname{Im}\int\limits_0^d f(x,\gamma)\overline{u}(x,\gamma)dx. \tag{2.3}$$

Будем придерживать следующих обозначений $b_0^2=\min\limits_{x\in[0,d]}b^2(x)$. Пусть $0\le|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon_0$ в этом случае $\varepsilon\le\cos\varphi$, тогда из (2.2) получаем оценку

$$\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\|^2+\varepsilon b_0^2|\gamma|\|u(x,\gamma)\|^2\le|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))|. \tag{2.4}$$

При $\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon_0\le|\varphi|\le\pi-\varepsilon_0$ $|\sin\varphi|\ge\varepsilon$, тогда из (2.3) получаем оценку

$$b_0^2\varepsilon|\gamma|\|u(x,\gamma)\|^2\le|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))|. \tag{2.5}$$

Из оценки (2.4) и (2.5) мы получаем, что при $0\le|\varphi|\le\pi-\varepsilon_0$

$$b_0^2\varepsilon|\gamma|\|u(x,\gamma)\|^2\le|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))|.$$

Из последнего неравенства и неравенства

$$|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))|\le\frac{\|f(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1}+\frac{\varepsilon_1\|u(x,\gamma)\|^2}{2}$$

получаем, что при $0\le|\varphi|\le\pi-\varepsilon_0$ выполнена оценка

$$|\gamma|\|u(x,\gamma)\|\le c\|f(x,\gamma)\|. \tag{2.6}$$

Умножив на $|\gamma|$ равенство (2.2) и приняв во внимание неравенство (2.6) получаем неравенство

$$\sqrt{|\gamma|}\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\|\le c\|f(x,\gamma)\|. \tag{2.7}$$

Из (1.4) и (2.6) следует оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\|\le c\|f(x,\gamma)\|. \tag{2.8}$$

Из (2.6), (2.7), (2.8) следует утверждение теоремы.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть $u(x,\gamma)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,d]$ комплекснозначная функция действительного переменного, тогда при выполнении условий $\left.\dfrac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=d}=0$ справедлива следующая оценка

$$\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\|^2 \le \frac{\pi d^2}{8}\left\|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\|^2.$$

Доказательство. Пусть $u(x,\gamma) = v_1(x,\gamma) + iv_2(x,\gamma)$, тогда $\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} = \frac{\partial v_1(x,\gamma)}{\partial x} + i\frac{\partial v_2(x,\gamma)}{\partial x}$. Из условия леммы следует, что при $j = 1,\ 2$ $\left.\frac{\partial v_j(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial v_j(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=d} = 0$. Для $v_j(s)$ справедливо следующее равенство $\frac{\partial v_j(s,\gamma)}{\partial s} = \int\limits_0^s \frac{\partial^2 v_j(x,\gamma)}{\partial x^2}dx$, $j = 1,\ 2$. Из последнего равенства следует, что

$$\left|\frac{\partial v_j(s,\gamma)}{\partial s}\right| \le \int\limits_0^s \left|\frac{\partial^2 v_j(x,\gamma)}{\partial x^2}\right| dx \le$$
$$\le (\int\limits_0^s 1dx)^{\frac{1}{2}}(\int\limits_0^s\left|\frac{\partial^2 v_j(x,\gamma)}{\partial x^2}\right|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \le \quad (2.9)$$
$$\le \sqrt{s}\left\|\frac{\partial^2 v_j(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\|, j = 1, 2.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\left|\frac{\partial v_j(s,\gamma)}{\partial s}\right| \le \sqrt{d-s}\left\|\frac{\partial^2 v_j(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\|, j = 1, 2. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) получаем неравенство

$$\left|\frac{\partial v_j(s,\gamma)}{\partial s}\right|^2 \le \sqrt{s(d-s)}\left\|\frac{\partial^2 v_j(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\|^2,\ j = 1, 2.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по s от 0 до d приходим к оценке $\left\|\frac{\partial v_j(x,\gamma)}{\partial x}\right\|^2 \le \frac{\pi d^2}{8}\left\|\frac{\partial^2 v_j(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\|^2$ при $j = 1, 2$ из которой следует утверждение леммы.

Теорема 2.2. Если $f(x,\gamma), u(x,\gamma), \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \in L_2([0,d])$ по переменной x при $|\gamma| \le \varepsilon^*$, а функция $u(x,\gamma)$ является решением задачи (1.4)—(1.5), то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при $|\gamma| \le \varepsilon$ будет справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\| + \sqrt{|\gamma|}\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\| + |\gamma|\left\|u(x,\gamma)\right\| \le c\left\|f(x,\gamma)\right\|.$$

Доказательство. Из (2.1) получаем, что

$$|\gamma|\int\limits_0^d b^2(x)|u(x,\gamma)|^2 dx =$$
$$= \left|-(f(x,\gamma),u(x,\gamma)) - \left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\|^2\right| \le \quad (2.11)$$
$$\le |(f(x,\gamma),u(x,\gamma))| + \left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\|^2.$$

Из (2.11) и леммы 2.1 получаем оценку

$$b_0^2|\gamma|\left\|u(x,\gamma)\right\|^2 \le$$
$$\le |(f(x,\gamma),u(x,\gamma))| + \frac{\pi d^2}{8}\left\|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\|^2. \quad (2.12)$$

Из уравнения (1.4) следует оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\| = \left\|f(x,\gamma) + \gamma b^2(x)u(x,\gamma)\right\| \le$$
$$\le \left\|f(x,\gamma)\right\| + c|\gamma|\left\|u(x,\gamma)\right\|,$$

откуда

$$\left\|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\|^2 \le 2\left\|f(x,\gamma)\right\|^2 + 2c^2|\gamma|^2\left\|u(x,\gamma)\right\|^2. \quad (2.13)$$

Из (2.12) и (2.13) получаем оценку

$$|\gamma| b_0^2\left\|u(x,\gamma)\right\|^2 \le \frac{\left\|f(x,\gamma)\right\|^2}{2|\gamma| b_0^2} + \frac{|\gamma| b_0^2\left\|u(x,\gamma)\right\|^2}{2} +$$
$$+ \frac{\pi d^2}{4}\left\|f(x,\gamma)\right\|^2 + 2c_1|\gamma|^2\left\|u(x,\gamma)\right\|^2,$$

откуда следует, что

$$\left(\frac{|\gamma|^2 b_0^2}{4} + \frac{|\gamma|^2 b_0^2}{4} - 2c_1|\gamma|^3\right)\left\|u(x,\gamma)\right\|^2 \le$$
$$\le \frac{\left\|f(x,\gamma)\right\|^2}{2b_0^2} + \frac{\pi d^2}{4}|\gamma|\left\|f(x,\gamma)\right\|^2. \quad (2.14)$$

Из (2.14) следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|\gamma| < \varepsilon$

$$|\gamma|\left\|u(x,\gamma)\right\| \le c\left\|f(x,\gamma)\right\|. \quad (2.15)$$

Из (2.13) и (2.15) получаем, что

$$\left\|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\| \le c\left\|f(x,\gamma)\right\|. \quad (2.16)$$

Будем придерживать следующих обозначений $b_1^2 = \max\limits_{x\in[0,d]} b^2(x)$. Из (2.1) получаем, что

$$\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\|^2 \le |(f(x,\gamma),u(x,\gamma))| + |\gamma| b_1^2\left\|u(x,\gamma)\right\|^2.$$

Из последней оценки и оценки (2.15) получаем, что

$$\sqrt{|\gamma|}\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\| \le c\left\|f(x,\gamma)\right\|. \qquad (2.17)$$

Из (2.15), (2.16) и (2.17) следует утверждение теоремы.

Теорему 2.1 и теорему 2.2 объедим в следующую теорему.

Теорема 2.3. Если $f(x,\gamma), u(x,\gamma)$, $\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \in L_2([0,d])$ по переменной x при $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon^*$, $(\varepsilon^* > 0)$, а функция $u(x,\gamma)$ является решением задачи (1.4)—(1.5), то найдется $\varepsilon > 0$, такое что при $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$ будет справедлива следующая оценка:

$$\left\|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\| + \sqrt{|\gamma|}\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\| + |\gamma|\left\|u(x,\gamma)\right\| \le c\left\|f(x,\gamma)\right\|.$$

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.4)—(1.5)

Лемма 3.1. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 2, тогда при некотором $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0, \operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$ будет справедлива следующая оценка: $\left\|f(x,\gamma)\right\| \le \frac{c}{(1+|\gamma|)}$.

Доказательство. При помощи интегрирования по частям можно доказать, что при $\operatorname{Re}\gamma > -\delta$

$$\left|L_{t\to\gamma}\left[g(x,t)\right]\right| \le \frac{c}{(1+|\gamma|)}\sum_i \int_0^\infty \left|\frac{\partial^i g(x,t)}{\partial t^i}\right| e^{\delta t}dt, \qquad (3.1)$$

где суммирование ведется по i, $0 \le i \le 1$.

Из (3.1) следует утверждение леммы.

Аналогично лемме 3.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.2. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 3, тогда при некотором $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$ будет справедлива следующая оценка $\left\|f(x,\gamma)\right\| \le \frac{c}{(1+|\gamma|)^2}$.

Теорема 3.1. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 2. Тогда существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, такое, что при $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$ задача (1.4)—(1.5) имеет решение, при этом $u(x,\gamma), \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \in L_2(\left[0,d\right])$ по переменной x.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b_\varepsilon^2(x) u_\varepsilon(x,\gamma) = f(x,\gamma), \qquad (3.2)$$

$$\left.\frac{\partial u_\varepsilon(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u_\varepsilon(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=d} = 0, \qquad (3.3)$$

где $b_\varepsilon^2(x) = (1-\varepsilon)b_1^2 + \varepsilon b^2(x)$.

При $\varepsilon = 0$ из задачи (3.2)-(3.3) получаем задачу с постоянными коэффициентами, а при $\varepsilon = 1$ получаем задачу (1.4)—(1.5). В случае $\varepsilon = 0$ решение задачи (3.2)—(3.3) выписывается в явном виде из которого следует, что это решение из $H^2([0,d])$. Функция $b_\varepsilon^2(x)$ будет зажата между константами, тогда из теоремы 2.3 следует справедливость априорной оценки

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\varepsilon(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\| + \sqrt{|\gamma|}\left\|\frac{\partial u_\varepsilon(x,\gamma)}{\partial x}\right\| + |\gamma|\left\|u_\varepsilon(x,\gamma)\right\| \le \\ \le c\left\|f(x,\gamma)\right\|.$$

Из последней оценки и метода продолжения по параметру следует, что задача (1.4)—(1.5) разрешима в $H^2([0,d])$ при каждом фиксированном $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$.

Лемма 3.3. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 2, тогда при некотором $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$ для функции $u(x,\gamma)$ являющейся решением задачи (1.4)—(1.5) будет справедлива следующая оценка $\left|u(x,\gamma)\right| \le \frac{c\left\|f(x,\gamma)\right\|}{(|\gamma|)^{3/4}}$ с постоянной c равномерной по $x \in [0,d]$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством, полученным в статье В. П. Глушко и С. Г. Крейна ([4])

$$\sup_{x\in[0,d]}\left(\left|\frac{\partial^r u(x,\gamma)}{\partial x^r}\right|\right)^2 \le \\ \le \varepsilon_1^{2s-2r-1}\left\|\frac{\partial^s u(x,\gamma)}{\partial x^s}\right\|^2 + c\varepsilon_1^{-2r-1}\left\|u(x,\gamma)\right\|^2, \qquad (3.4)$$

где $0 \le r < s - 1/2, \varepsilon_1 > 0,$ норма берется в $L_2([0,d])$. Положим в (3.4) $r = 0$ и умножим его на $\varepsilon^{2\rho}$. Тогда получим

$$\varepsilon_1^{2\rho}\sup_{x\in[0,d]}\left(\left|u(x,\gamma)\right|\right)^2 \le \\ \le \varepsilon_1^{2s+2\rho-1}\left\|\frac{\partial^s u(x,\gamma)}{\partial x^s}\right\|^2 + c\varepsilon_1^{2\rho-1}\left\|u(x,\gamma)\right\|^2, \qquad (3.5)$$

где $s > 1/2$, ρ – вещественное.

Применим неравенство (3.5) при $s = 2$ и $s = 1$

$$\varepsilon_1^{2\rho} \sup_{x\in[0,d]} (|u(x,\gamma)|)^2 \le \le \varepsilon_1^{2\rho+3} \left\| \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \right\|^2 + c\varepsilon_1^{2\rho-1} \|u(x,\gamma)\|^2, \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_1^{2\rho} \sup_{x\in[0,d]} (|u(x,\gamma)|)^2 \le \le \varepsilon_1^{2\rho+1} \left\| \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\|^2 + c\varepsilon_1^{2\rho-1} \|u(x,\gamma)\|^2. \tag{3.7}$$

Положим в (3.6) и (3.7) $\rho = -3/2$, $\varepsilon_1 = (|\gamma|)^{-1/2}$ и сложим эти неравенства. В результате получаем оценку

$$2|\gamma|^{3/2} \sup_{x\in[0,d]} (|u(x,\gamma)|)^2 \le$$

$$\le \left\| \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \right\|^2 + |\gamma| \left\| \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\|^2 + c|\gamma|^2 \|u(x,\gamma)\|^2.$$

Из последнего неравенства и теоремы 2.3 следует утверждение леммы.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.4. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 2, тогда при некотором $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$ для функции $u(x,\gamma)$ являющейся решением задачи (1.4)-(1.5) будет справедлива следующая оценка $\left| \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right| \le \frac{c\|f(x,\gamma)\|}{(|\gamma|)^{1/4}}$ с постоянной c равномерной по $x \in [0,d]$.

АНАЛИТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.4)—(1.5)

Теорема 4.1. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 2. Тогда существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ такое, что при $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$ и $x \in [0,d]$ решение задачи (1.4)—(1.5) будет аналитично по переменной γ.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial^2 \dot{u}(x,\gamma)}{\partial x^2} - (\gamma b^2(x))\dot{u}(x,\gamma) = = b^2(x)u(x,\gamma) + \dot{f}(x,\gamma), \tag{4.1}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{u}(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \dot{u}(x,\gamma)}{\partial x}\right|_{x=d} = 0, \tag{4.2}$$

где $\dot{f}(x,\gamma) = \frac{\partial f(x,\gamma)}{\partial \gamma}$.

Существование решения задачи (4.1)—(4.2) доказывается так же как и существование решения задачи (1.4)—(1.5).

При помощи априорной оценки полученной в теореме 2.3 можно получить следующую оценку

$$|\gamma| \|\hat{u}(x,\gamma,\Delta\gamma)\| \le \frac{c}{|\gamma|} \|f(x,\gamma+\Delta\gamma) - f(x,\gamma)\| +$$

$$+ \frac{c_1 |\Delta\gamma|}{|\gamma| (|\gamma+\Delta\gamma|)} \|f(x,\gamma+\Delta\gamma)\| +$$

$$+c \left\| \frac{f(x,\gamma+\Delta\gamma) - f(x,\gamma)}{\Delta\gamma} - \dot{f}(x,\gamma) \right\|,$$

где $\hat{u}(x,\gamma,\Delta\gamma) = \frac{u(x,\gamma+\Delta\gamma) - u(x,\gamma)}{\Delta\gamma} - \dot{u}(x,\gamma)$.

Устремив в ней $\Delta\gamma$ к нулю получаем, что

$$\frac{u(x,\gamma+\Delta\gamma) - u(x,\gamma)}{\Delta\gamma} \underset{\Delta\gamma\to 0}{\to} \dot{u}(x,\gamma).$$

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1)—(1.3)

Лемма 5.1. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 2, а функция $u(x,\gamma)$ является решением задачи (1.4)—(1.5), тогда найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что будет существовать следующий интеграл $v(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} e^{\gamma t} u(x,\gamma)\, d\gamma$, при этом $v(x,t) = O(e^{-\varepsilon t})$ равномерна по $x \in [0;d]$, кроме этого $v(x,t)$ и $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ непрерывны по $t \ge 0$, $x \in [0;d]$ и будут удовлетворять следующим начальным и граничным условиям

$$v(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=d} = 0.$$

Доказательство. Из леммы 3.1 и леммы 3.3 следует, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$ и $x \in [0;d]$ будет выполнена оценка

$$|u(x,\gamma)| \le \frac{c}{(1+|\gamma|)|\gamma|^{3/4}}. \tag{5.1}$$

При помощи (5.1) получаем следующую оценку

$$\left|v(x,t)\right| \le \frac{e^{-\varepsilon t}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|u(x,\gamma)\right| d\left|\gamma\right| \le$$
$$\le \frac{c_1 e^{-\varepsilon t}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\left|\zeta\right|)(1+\left|\zeta\right|)^{3/4}}\,d\zeta \le c_2 e^{-\varepsilon t}.$$

Из последней оценки следует, что $v(x,t)$ непрерывна по t. Покажем, что для функции $v(x,t)$ выполнено начальное условие. Из предельной теоремы о преобразовании Лапласа получаем, что $\lim\limits_{t\to+0} v(x,t) = \lim\limits_{|\gamma|\to\infty}\left|\gamma\right|\left|u(x,\gamma)\right|$. Следовательно $\lim\limits_{t\to+0} v(x,t) = 0$. Из леммы 3.1 и леммы 3.4 следует, что при $\operatorname{Re}\gamma \ge -\varepsilon$, $x \in \left[0,d\right]$ справедлива следующая оценка

$$\left|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right| \le \frac{c}{\left|\gamma\right|^{1/4}(1+\left|\gamma\right|)}. \qquad (5.2)$$

При помощи (5.2) получаем следующую оценку

$$\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right| \le c_1 e^{-\varepsilon t}.$$

Выполнение граничных условий следует из того, что для функции $u(x,\gamma)$ выполнены условия (1.5).

Лемма 5.2. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 3, а функция $v(x,t)$ та же что и в лемме 5.1, тогда $v(x,t)$ непрерывно дифференцируема по $t \ge 0$, дважды непрерывно дифференцируема по $0 \le x \le d$, и $v(x,t) \in T_a$ при $a > 0$.

Доказательство. Из леммы 3.2 и леммы 3.3 следует оценка

$$\left|u(x,\gamma)\right| \le \frac{c}{\left|\gamma\right|^{3/4}(1+\left|\gamma\right|)^2}. \qquad (5.3)$$

Из (1.4), (5.3) следует оценка

$$\left|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right| \le \frac{c}{\left|\gamma\right|^{3/4}(1+\left|\gamma\right|)}. \qquad (5.4)$$

При помощи оценки (5.3) получаем, что

$$\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right| \le c_1\left|\int\limits_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} e^{\gamma t}\gamma u(x,\gamma)d\gamma\right| \le$$
$$\le c_2 e^{-\varepsilon t}\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\left|\zeta\right|)(1+\left|\zeta\right|)^{3/4}}\,d\zeta \le c_3 e^{-\varepsilon t}.$$

Из последней оценки следует, что $\dfrac{\partial\ v(x,t)}{\partial\ t}$ существует. Аналогичным образом доказывается, что $\left|\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right| \le c\,e^{-\varepsilon t}$. Из леммы 5.1 и двух последних оценок следует, что $v(x,t) \in T_a$ при $a > 0$.

При помощи априорной оценки из теоремы 2.3 доказывается следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 3, функция $v_1(x,t)$ и функция $v_2(x,t)$ являются решениями задачи (1.1)—(1.3) и принадлежат классу T_a при $a > 0$, тогда при $t > 0$, $x \in [0,d]$ будет справедливо следующее равенство $v_1(x,t) = v_2(x,t)$.

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 5.2. Пусть функция $g(x,t)$ удовлетворяет условию 3, тогда задача (1.1)—(1.3) имеет решение $v(x,t)$ непрерывно дифференцируемое по $t \ge 0$, дважды непрерывно дифференцируема по $0 \le x \le d$, $v(x,t) \in T_a$ при $a > 0$, это решение единственно в классе T_a, кроме того, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что равномерно по x будет выполнена оценка $v(x,t) = O(e^{-\varepsilon t})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рябенко А. С.* Оценка при $t\to\infty$ решения задачи о распределении тепла в полосе с переменным коэффициентом теплопроводности / А. С. Рябенко // Труды математического факультета ВГУ. — 2007. — Выпуск 11. — С. 175—185.

2. *Рябенко А. С.* Оценка при $t\to\infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности / А. С. Рябенко // Вестник ВГУ серия Физика и Математика. — 2007. —№1. — С. 95—99.

3. *Глушко А. В.* Асимптотические методы в задачах гидродинамики / А. В. Глушко. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2003. — 300 с.

4. *Глушко В. П.* Неравенства для норм производных в пространствах L_p с весом / В. П. Глушко, С. Г. Крейн // Сибирский математический журнал. — 1960. — Т. 1. — № 3. — С. 342—382.

Карпова Юлия Юрьевна — магистр кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета
Тел. 89081386782
E-mail: karpushka2009@rambler.ru

Karpova Julia Y. – magister of the department of partial differential equations and probability theory, faculty of mathematics, Voronezh State University
Tel. 89081386782
E-mail: karpushka2009@rambler.ru

Рябенко Александр Сергеевич — кандидат физико-математических наук; преподаватель кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета
Тел. (4732) 36-76-38
E-mail: alexr-83@yandex.ru

Ryabenko Alexander S. — candidate of physical and mathematical sciences; lecturer department of partial differential equations and probability theory, faculty of mathematics, Voronezh State University
Tel. (4732) 36-76-38
E-mail: alexr-83@yandex.ru