

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ/ОДНОРОДНОМ ДВУХКОМПОНЕНТНОМ МАТЕРИАЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА

Н. Е. Караулова, В. Е. Петрова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.06.2010 г.

Аннотация. Работа посвящена решению краевой задачи теории упругости (антиплоского сдвига) для двух связанных полупространств с системой трещин-разрезов. Задача является математической моделью двухкомпонентного композитного материала, один из материалов имеет непрерывно меняющиеся в одном направлении свойства (функционально-градиентный материал, ФГМ), а второй материал однородный изотропный. Полученные сингулярные интегральные уравнения решены методом малого параметра для случая, когда длина межфазной трещины намного больше характерной длины внутренних трещин в ФГМ. Для коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах межфазной трещины получены асимптотические аналитические выражения и проанализировано влияние на них геометрии задачи и параметра неоднородности материала.

Ключевые слова: продольный сдвиг, граница раздела, трещина, коэффициент интенсивности напряжений, функционально-градиентный материал, модуль сдвига, сингулярное интегральное уравнение, малый параметр.

Abstract. The work is devoted to a boundary value problem (antiplane problem) for two bonded half-spaces with systems of cracks-cuts. The problem is a mathematical model of a bimaterial composite consisting of a non-homogeneous material with continuously varying properties in one direction (functionally graded material, FGM) and a homogeneous one. The obtained singular integral equations are solved by the small parameter method for the case when an interface crack is much larger than internal cracks in the FGM. Asymptotic analytical formulas for the stress intensity factors at the interface crack tips are derived, and influences of geometry of the problem and the material parameter of non-homogeneity on the stress intensity factors are studied.

Key words: anti-plane shear load, interface, crack, stress intensity factor, functionally graded material, shear modulus, singular integral equation, small parameter.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена решению краевой задачи теории упругости (антиплоского сдвига) для двух связанных полупространств с разрезами. Эта задача является математической моделью двухкомпонентного композитного материала, один из материалов которого имеет непрерывно меняющиеся в одном направлении свойства, а второй материал однородный изотропный.

Двухкомпонентные (и многокомпонентные) материалы используются в различных областях техники, это могут быть и композитные материалы, и просто соединения деталей из разных материалов. Границы соединения материалов, неоднородности (дислокации, трещины, включения) и их взаимодействие играют

важную роль в процессах разрушения и в оценке прочности многофазных композитных материалов.

Под действием внешних нагрузок и из-за разности свойств материалов вблизи поверхности раздела возникает сложное напряженно-деформированное состояние, которое может привести к расслоению и появлению межфазных дефектов. Наличие внутренних дефектов вблизи поверхностей раздела вызывает дополнительные возмущения полей напряжений и деформаций. Для уменьшения дополнительных напряжений и деформаций, вызванных разностью свойств материалов, применяются функционально градиентные материалы (ФГМ), со свойствами, изменяющимися непрерывно вдоль одного направления. Такие композиты часто

создают из смеси керамик или керамики и металла, и они обладают высокой термической стойкостью. Вопрос прочности и трещиностойкости таких материалов имеет большие значение. В настоящее время существует большое количество исследований в этой области, обзор работ можно найти в [1]. Взаимодействия систем произвольно расположенных трещин в однородных материалах достаточно хорошо изучены [2], однако аналогичные задачи для функционально-градиентных материалов ограничиваются только специальными частными случаями, например, случаями коллинеарных трещин, радиально расположенных [3] и т.п. В данной работе рассмотрена задача о взаимодействии систем произвольно расположенных трещин с межфазной трещиной в двухкомпонентном материале, состоящем из функционально-градиентного материала и однородного, под действием продольного сдвига. Принято, что свойства ФГМ имеют экспоненциальную зависимость. Применялся метод суперпозиции, и задача приведена к системе сингулярных интег-

ральных уравнений, методы решения которых хорошо разработаны [4, 5]. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещин. Проанализировано влияние взаимного расположения трещин и параметра неоднородности функционально-градиентного материала на коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах межфазной трещины.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим взаимодействие N внутренних трещин с межфазной трещиной в двухкомпонентном материале при продольном сдвиге τ , приложенном на бесконечности. Два материала, функционально-градиентный и упругий изотропный, занимающие полупространства V_1 и V_2 , соединены вдоль поверхности L , на которой расположена межфазная трещина длиной $2a_0$. В функционально-градиентном материале (ФГМ) имеется N внутренних трещин длиной $2a_k$ ($k = 0, 1, \dots, N$). Геометрия задачи и оси координат изображены на рис. 1. Расположение дефектов определяется координатами их

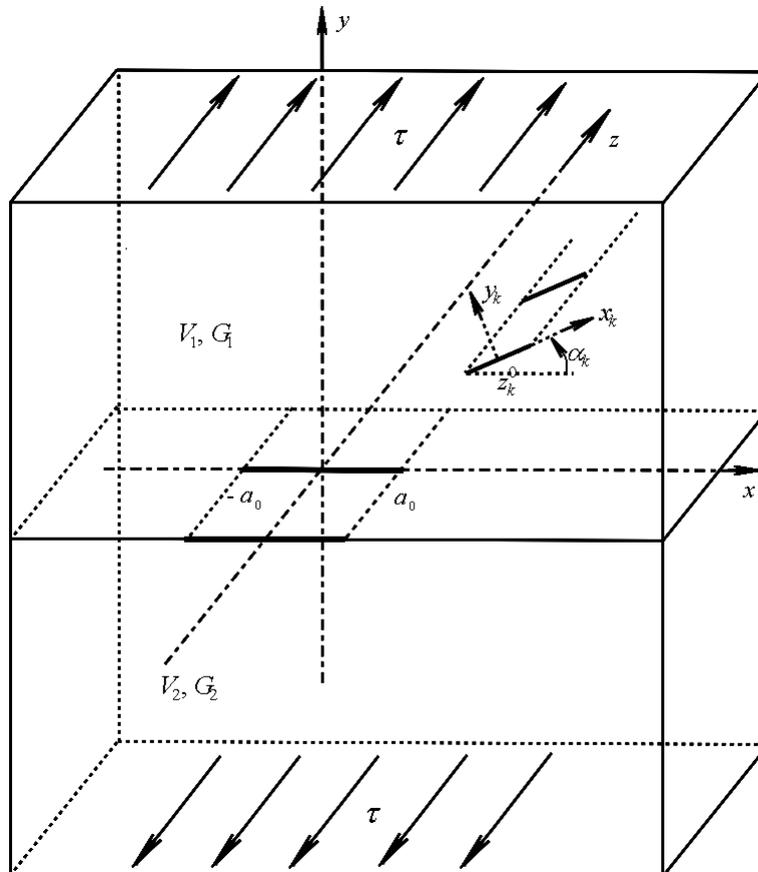


Рис. 1. Геометрия задачи: функционально-градиентный/однородный двухкомпонентный материал с внутренней трещиной и межфазной под действием продольного сдвига интенсивности τ

центров z_k^0 и углами наклона α_k . Требуется определить смещения и распределение напряжений в данном материале в окрестности межфазной трещины и дефектов.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФГМ

Предполагается, что свойства ФГМ зависят только от координаты y и имеют экспоненциальный вид. В этом случае модуль сдвига может быть представлен следующим образом

$$G_1(y) = G_0 e^{\delta y}, \quad (1)$$

где $G_0 = G_2$ — модуль сдвига для упругого изотропного материала в полупространстве V_2 , а δ — параметр неоднородности ФГМ.

Соотношение между глобальными координатами (x, y) и локальной системой координат (x_k, y_k) имеет вид

$$z = z_k^0 + z_k e^{i\alpha_k},$$

где $z = x + iy$, $z_k = x_k + iy_k$. Параметр $z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$ — это начало координат системы (x_k, y_k) в глобальной системе, и в тоже время это координата середины трещины. В локальной системе координат, связанной с каждой произвольно ориентированной трещиной, коэффициент G_1 имеет представление

$$G_1(x_k, y_k) = G_0 e^{\delta y_k^0} e^{\delta_1 x_k + \delta_2 y_k}, \quad (2)$$

$$\delta_1 = \delta \sin \alpha_k, \quad \delta_2 = \delta \cos \alpha_k.$$

Основные соотношения для задачи продольного сдвига. Ненулевые компоненты тензора напряжений τ_{jxz} , τ_{jyz} ($j = 1, 2$) для каждого из материалов выражаются через смещение $w_j(x, y)$ следующим образом [5]:

$$\tau_{jxz} = G_j(y) \frac{\partial w_j}{\partial x}, \tau_{jyz} = G_j(y) \frac{\partial w_j}{\partial y} \quad (j = 1, 2). \quad (3)$$

($G_j(y)$ — модуль сдвига)

Система уравнений равновесия сводится к одному уравнению, которое в случае отсутствия массовых сил принимает вид

$$\frac{\partial \tau_{jxz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{jyz}}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия. Имеем следующие граничные условия на трещинах в двухкомпонентном материале

$$\begin{aligned} \tau_{1yz}^+ &= \tau_{2yz}^- = 0, & |x| &\leq a_0, \\ \tau_{jyz}^+ &= \tau_{jyz}^- = 0, & |x_n| &\leq a_n, \end{aligned} \quad (5)$$

а также условия идеального соединения материалов и условия в вершинах трещин:

$$\begin{aligned} \tau_{1yz}^{+*} &= \tau_{2yz}^{-*}, w_1^*(x, +0) = w_2^*(x, -0), \\ &|x| \geq a_0, y = 0, \\ w_1^*(\pm a_0, +0) &= w_2^*(\pm a_0, -0), \\ w_{jn}^*(\pm a_n, +0) &= w_{jn}^*(\pm a_n, -0). \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая соотношение (3) и граничные условия для напряжений (5), (6), получим следующие условия для перемещений $w_j^*(x, y)$

$$G_1 \frac{\partial w_1^*(x, +0)}{\partial y} = G_2 \frac{\partial w_2^*(x, -0)}{\partial y} = 0, |x| \leq a_0, \quad (7)$$

$$G_j \frac{\partial w_j^*(x, \pm 0)}{\partial y_n} = \tau_n(x_n), |x_n| \leq a_n,$$

$$G_1 \frac{\partial w_1^*(x, +0)}{\partial y} = G_2 \frac{\partial w_2^*(x, -0)}{\partial y},$$

$$w_1^*(x, +0) = w_2^*(x, -0), |x| \geq a_0, y = 0, \quad (8)$$

$$w_1^*(\pm a_0, +0) = w_2^*(\pm a_0, -0),$$

$$w_{jn}^*(\pm a_n, +0) = w_{jn}^*(\pm a_n, -0).$$

Используемые методы. Для решения задачи используется метод суперпозиции. Исходная задача раскладывается на сумму двух задач: 1) задача для бездефектного двухсвязного материала в условиях продольного сдвига, решение которой легко получить; 2) задача о двухкомпонентном материале с трещинами, на границах которых приложены усилия равные по величине, но противоположные по знаку нагрузке, указанной в задаче, то есть $-\tau_0$ и $-\tau_k$. Следующий шаг схемы суперпозиции — разбиение задачи на ряд простых задач, каждая из которых включает только одну внутреннюю или межфазную трещину.

С помощью метода комплексных потенциалов и теории аналитических функций [6, 7] поставленные задачи сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений [4, 5]. В случае, когда межфазная трещина намного больше внутренних трещин в ФГМ, такие уравнения решаются методом малого параметра [2].

РЕШЕНИЕ

В соответствии с принципом суперпозиции перемещения w_j^* ($j = 1, 2$) в двухкомпонентном материале с трещинами представляются в виде

$$w_j^*(x, y) = w_j^0(x, y) + w_j(x, y) \quad (j = 1, 2), \quad (9)$$

где $w_j^0(x, y)$ — распределение перемещений в двухкомпонентном материале без трещин, $w_j(x, y)$ — перемещения, возникающие из-за наличия трещин.

В соответствии с (9) и условиями для $w_j^*(x, y)$ (7), (8) получим условия на границе, условия идеального соединения материалов и условия в вершинах трещин для перемещений $w_j(x, y)$

$$G_1 \frac{\partial w_1(x, +0)}{\partial y} = G_2 \frac{\partial w_2(x, -0)}{\partial y} = \tau_0(x), |x| \leq a_0, \quad (10)$$

$$G_j \frac{\partial w_{jn}(x, \pm 0)}{\partial y_n} = \tau_n(x_n), |x_n| \leq a_n,$$

$$G_1 \frac{\partial w_1(x, +0)}{\partial y} = G_2 \frac{\partial w_2(x, -0)}{\partial y},$$

$$w_1(x, +0) = w_2(x, -0), |x| \geq a_0, y = 0, \quad (11)$$

$$w_1(\pm a_0, +0) = w_2(\pm a_0, -0),$$

$$w_{jn}(\pm a_n, +0) = w_{jn}(\pm a_n, -0).$$

На бесконечности $w_j(x, y) \rightarrow 0$. Здесь

$$\tau_0 = -G_j \frac{\partial w_j^0}{\partial y} \Big|_{y=0}, \tau_n = -G_j \frac{\partial w_j^0}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0}. \quad (12)$$

Подставляя представления (3) в уравнение равновесия для продольного сдвига (4) для ФГМ получим:

$$\nabla^2 w_1 + \delta \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

а для упругого изотропного материала:

$$\nabla^2 w_2 = 0, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (14)$$

Задачу продольного сдвига для ФГМ/однородного биматериала без дефектов можно свести к решению обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, так как при заданной нагрузке функции перемещений будут функциями только одной переменной y , т.е. $w_j = w_j(y)$. Решая задачу продольного сдвига (13), (14) для двухкомпонентного материала без дефектов с граничными условиями (8), получим напряжения на линиях трещин

$$\tau_0 = -G_0 \tau, \tau_n = -G_0 \tau e^{-\delta y_n} e^{-x_n \delta \sin \alpha_n} \cos \alpha_n. \quad (15)$$

Используем полученные функции напряжений (15) для решения задачи о взаимодействии систем трещин. Предположим, что неоднородность ФГМ проявляется только в неоднородном

распределении напряжений (15) на поверхностях трещин. В этом случае воспользуемся интегральными уравнениями, полученными для системы трещин продольного сдвига в однородном материале [5]. Итак, при данных предположениях и с учетом условий (10), (11), решение задачи (13), (14) сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений:

$$\int_{-a_n}^{a_n} \frac{\varphi'_n(t)}{t-x} dt + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^N \int_{-a_k}^{a_k} \varphi'_k(t) P_{nk}(t, x) dt = \pi \tau_n(x), \quad (16)$$

$$n = 0, 1, \dots, N, |x| < a_n,$$

при условии непрерывности перемещений

$$\int_{-a_n}^{a_n} \varphi'_n(t) dt = 0. \quad (17)$$

Здесь функции φ'_k — это производные скачков перемещений на линиях трещин

$$2\varphi_k(t) = w_k^+ - w_k^-. \quad (18)$$

Регулярные ядра P_{nk} ($n = 0, 1, \dots, N; k = 0, 1, \dots, N$) имеют следующий вид

$$P_{nk} = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_n}}{t e^{i\alpha_k} + z_k^0 - x e^{i\alpha_n} - z_n^0} \right]. \quad (19)$$

Регуляризуя систему сингулярных интегральных уравнений (16) [4, 5], получим систему фредгольмовых интегральных уравнений II-го типа

$$\varphi'_n(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a_n^2 - x^2}} \times$$

$$\times \left\{ - \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - t^2}}{t-x} \tau_n(t) dt + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^N \int_{-a_k}^{a_k} \varphi'_k(t) Q_{nk}(t, x) dt \right\}, \quad (20)$$

$$|x| < a_n, n = 0, 1, \dots, N,$$

где

$$Q_{nk} = \frac{1}{\pi} \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x} P_{nk}(t, \xi) d\xi. \quad (21)$$

Используя замену $t = a_k \theta$, $x = a_n \chi$, выразим систему (20) через безразмерные переменные θ и χ :

$$\varphi'_0(a_0 \chi) = \frac{1}{\pi a_0 \sqrt{1 - \chi^2}} \left\{ -a_0 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\theta - \chi} \tau_0(a_0 \theta) d\theta + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^N a_k \int_{-1}^1 \varphi'_k(a_k \theta) Q_{0k}(a_k \theta, a_0 \chi) d\theta \right\}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_n(a_n \chi) = & \frac{1}{\pi a_n \sqrt{1-\chi^2}} \left\{ -a_n \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta-\chi} \tau_n(a_n \theta) d\theta + \right. \\ & + a_0 \int_{-1}^1 \varphi'_0(a_0 \theta) Q_{n0}(a_0 \theta, a_n \chi) d\theta + \\ & \left. + \sum_{k=1}^N a_k \int_{-1}^1 \varphi'_k(a_k \theta) Q_{nk}(a_k \theta, a_n \chi) d\theta \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

и ядра Q_{nk} из (21) примут вид

$$Q_{nk} = \frac{a_n}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-\chi} P_{nk}(a_k \theta, a_n \eta) d\eta. \quad (24)$$

Решение методом малого параметра.

Если длина межфазной трещины существенно больше, чем длина микротрещины, то малый параметр λ берется как отношение длины микротрещины к длине межфазной трещины в предположении, что все микротрещины в ФГМ одинаковой длины. Мы будем искать решение в виде степенного ряда по $\lambda = a/a_0$ [2] и раскладывать все функции в степенные ряды.

В этом случае (22), (23) примут вид:

$$\begin{aligned} \varphi'_0(\chi) = & \frac{1}{\pi \sqrt{1-\chi^2}} \left\{ -\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta-\chi} \tau_0(\theta) d\theta + \right. \\ & \left. + \lambda \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \varphi'_k(\theta) Q_{0k}(\theta, \chi) d\theta \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_n(\chi) = & \frac{1}{\pi \sqrt{1-\chi^2}} \left\{ -\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta-\chi} \tau_n(\theta) d\theta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 \varphi'_0(\theta) Q_{n0}(\theta, \chi) d\theta + \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \varphi'_k(\theta) Q_{nk}(\theta, \chi) d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для скачка перемещений на макротрещине φ'_0 и скачка на микротрещинах φ'_n запишем разложение в степенной ряд

$$\varphi'_0(\chi a_0) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi'_{0p}(\chi) \lambda^p, \quad \varphi'_n(\chi a) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi'_{np}(\chi) \lambda^p. \quad (27)$$

Ядра Q_{nk} (24) также могут быть представлены в виде ряда по степеням λ :

$$\begin{aligned} Q_{0k} = & -\frac{e^{ia_k}}{2} \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda \theta)^p \left(e^{-ip\alpha_k} \overline{I_{p+1}(\chi)} + I_{p+1}(\chi) \right) = \\ & = \sum_{p=0}^{\infty} q_{0kp}(\theta, \chi) \lambda^p; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} Q_{n0} = & -\frac{e^{-ia_n}}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \left[\frac{e^{-ip\alpha_n}}{(\theta-w_n)^p} + \frac{e^{ip\alpha_n}}{(\theta-w_n)^p} \right] \times \\ & \times \left[\chi^p - \sum_{2r=2,4,\dots}^p \frac{|2r-3|!!}{(2r)!!} \chi^{p-2r} \right] = \sum_{p=1}^{\infty} q_{n0p}(\theta, \chi) \lambda^p; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} Q_{nk} = & \frac{e^{ia_k n}}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \left(\frac{e^{-ip\alpha_n}}{\overline{w_{kn}^p}} J_{p-1}(\theta, \chi) + \frac{e^{ip\alpha_n}}{w_{kn}^p} J_{p-1}(\theta, \chi) \right) = \\ & = \sum_{p=1}^{\infty} q_{nkp}(\theta, \chi) \lambda^p, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} I_{p+1}(\chi) = & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{(\xi-\chi)(\xi-w_k)^{p+1}} = \\ = & \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial w_k^p} \left(1 + \frac{\sqrt{w_k^2-1}}{\chi-w_k} \right), \quad |\chi| < 1, p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

и

$$\begin{aligned} J_p(\theta, \chi) = & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\chi} (\xi-\theta e^{i\alpha_{nk}})^p d\xi = \\ = & \sum_{q=0}^p (-1)^{q+p} C_p^q (e^{i\alpha_{nk}} \theta)^{p-q} \times \\ & \times \left(-\chi^{q+1} + \sum_{2r=2,4,\dots}^{q+1} \frac{|2r-3|!!}{(2r)!!} \chi^{q-2r+1} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь $w_k = z_k^0/a_0$ — безразмерные координаты середин трещин, а $w_{nk} = w_n - w_k$.

Для сходимости рядов (28)–(30) необходимо выполнение следующего неравенства [2, 6]

$$\left| \lambda / (\theta - z_k^0/a_0) \right| < 1, \quad |\tau| < 1, \quad (33)$$

которое справедливо, если трещины не пересекаются.

Подставляя разложения для скачка перемещений (27) и для ядер (28)–(30) в систему (25), (26) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим рекуррентную систему уравнений для коэффициентов $\varphi'_{0p}(\chi)$ и $\varphi'_{np}(\chi)$:

$$\begin{aligned} \varphi'_{00}(\chi) = & -\frac{1}{\pi \sqrt{1-\chi^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta-\chi} \tau_0(\theta) d\theta; \\ \varphi'_{01}(\chi) = & \frac{1}{\pi \sqrt{1-\chi^2}} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \varphi'_k(\theta) q_{0k0}(\chi) d\theta; \\ \varphi'_{02}(\chi) = & \frac{1}{\pi \sqrt{1-\chi^2}} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 [\varphi'_{k1}(\theta) q_{0k0}(\chi) + \\ & + \varphi'_{k0}(\theta) q_{0k1}(\theta, \chi)] d\theta; \end{aligned} \quad (34)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi'_{n0}(\chi) = & \frac{1}{\pi \sqrt{1-\chi^2}} \left[-\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta-\chi} \tau_n(\theta) d\theta + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \varphi'_{00}(\theta) q_{n01}(\theta, \chi) d\theta \right]; \end{aligned}$$

$$\varphi'_{n1}(\chi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\chi^2}} \left[\int_{-1}^1 [\varphi'_{00}(\theta)q_{n02}(\theta, \chi) + \varphi'_{01}(\theta)q_{n01}(\theta, \chi)]d\theta + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{-1}^1 \varphi'_{k0}(\theta)q_{nk1}(\chi)d\theta \right]; \quad (35)$$

$$\varphi'_{n2}(\chi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\chi^2}} \left[\int_{-1}^1 [\varphi'_{01}(\theta)q_{n02}(\theta, \chi) + \varphi'_{02}(\theta)q_{n01}(\theta, \chi)]d\theta + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{-1}^1 [\varphi'_{k0}(\theta)q_{nk2}(\chi) + \varphi'_{k1}(\theta)q_{nk1}(\chi)]d\theta \right].$$

Учитывая условие (17), в (30) $\varphi'_{01} = 0$ и первый интеграл в φ'_{02} также равняется нулю. Из (34), (35) решение может быть представлено в виде ряда Маклорана по степеням малого параметра λ .

Запишем второе приближение для производной скачка перемещений на межфазной трещине

$$\varphi'_0(\chi) = \varphi'_{00}(\chi) + \lambda^2 \varphi'_{02}(\chi), \quad (36)$$

где

$$\varphi'_{00}(\chi) = \frac{\tau_0 \chi}{\sqrt{1-\chi^2}}; \quad (37)$$

$$\varphi'_{02}(\chi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\chi^2}} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \varphi'_{k0}(\theta)q_{0k1}(\theta, \chi)d\theta.$$

где $q_{0k1} = \text{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_k}(w_k \chi - 1)}{(\chi - w_k)^2 \sqrt{w_k^2 - 1}} \right].$

Начальная аппроксимация для каждой внутренней трещины имеет вид:

$$\varphi'_{n0}(\chi) = \frac{G_0 \tau}{\sqrt{1-\chi^2}} \left\{ e^{-\delta y_n^0} \cos \alpha_n \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta - \chi} e^{-\delta_1 \theta} d\theta + \chi \text{Re} \left[e^{i\alpha_n} \left(1 - \frac{w_n}{\sqrt{w_n^2 - 1}} \right) \right] \right\}. \quad (38)$$

Интеграл $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - \chi} e^{-b\tau} d\tau$ будем вычислять по схеме:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - \chi} e^{-b\tau} d\tau = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - \chi} \left(1 - b\tau + \frac{1}{2} b^2 \tau^2 - \frac{1}{6} b^3 \tau^3 + \frac{1}{24} b^4 \tau^4 + \dots \right) d\tau = \\ & = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{b^p}{p!} I_p(\chi), \end{aligned} \quad (39)$$

где [5, 9]

$$\begin{aligned} I_p(\tau, \chi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - \chi} \tau^p d\tau = \\ &= \sum_{q=0}^p (-1)^{q+p} C_p^q \left(-\chi^{q+1} + \sum_{2r=2,4,\dots}^{q+1} \frac{|2r-3|!!}{(2r)!!} \chi^{q-2r+1} \right), \quad (40) \\ C_p^q &= \frac{p!}{q!(p-q)!}. \end{aligned}$$

Таким образом, получим для $\varphi'_0(\chi)$ следующее представление:

$$\begin{aligned} \varphi'_0(\chi) &= \frac{G_0 \tau}{\sqrt{1-\chi^2}} \left\{ -\chi + \lambda^2 \sum_{k=1}^N \text{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_k}(w_k \chi - 1)}{(\chi - w_k)^2 \sqrt{w_k^2 - 1}} \right] \times \right. \\ & \quad \times \left(e^{-\delta^* \text{Im} w_k} \cos \alpha_k \frac{1}{\pi} \times \right. \\ & \quad \times \int_{-1}^1 \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(\delta^* \lambda \sin \alpha_k)^p}{p!} I_p(\theta) d\theta + \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \text{Re} \left[e^{i\alpha_k} \left(1 - \frac{w_k}{\sqrt{w_k^2 - 1}} \right) \right] \right] \right\}, \quad (41) \end{aligned}$$

где $\delta^* = \delta a_0$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ

Коэффициенты интенсивности напряжений k_{III}^- и k_{III}^+ межфазной трещины, характеризующие напряженное состояние соответственно в окрестности левой и правой вершине трещины, вычисляется по формуле [5]:

$$k_{III}^{\pm} = \mp \lim_{\chi \rightarrow \pm 1} \sqrt{a_0} \sqrt{1-\chi^2} \varphi'_0(\chi). \quad (42)$$

Подставляя (41) в формулу (42), имеем представление для k_{III}^- :

$$k_{III}^{\pm} = \sqrt{a_0} G_0 \tau \left\{ 1 + \lambda^2 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_k}}{(w_k \mp 1) \sqrt{w_k^2 - 1}} \right] \times \right. \\ \times \left(-e^{-\delta^* \operatorname{Im} w_k} \cos \alpha_k \times \right. \\ \times \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(\delta^* \lambda \sin \alpha_k)^p}{p!} I_p(\theta) d\theta - \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha_k} \left(1 - \frac{w_k}{\sqrt{w_k^2 - 1}} \right) \right] \right) \right\}. \quad (43)$$

При параметре неоднородности $\delta^* = 0$ получим уже известный ранее [8] коэффициент интенсивности напряжений:

$$k_{III}^{\pm} = \sqrt{a_0} G_0 \tau \left\{ 1 + \lambda^2 \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_k}}{(w_k \mp 1) \sqrt{w_k^2 - 1}} \right] \operatorname{Re} \left[\frac{w_k}{\sqrt{w_k^2 - 1}} \right] \right\}. \quad (44)$$

Анализ результатов. Аналитическое решение (43) позволяет проанализировать влияние различных полей микротрещин в функционально-градиентном материале на КИН межфазной трещины.

Рассмотрим взаимодействие одной микротрещины и межфазной трещины. На рис. 2а

представлены графики зависимости нормализованного КИН $K_3^{\pm} = k_{III}^{\pm} / G_0 \tau \sqrt{a_0}$ в вершинах межфазной трещины от угла наклона α микротрещины в случае, когда центр микротрещины находится в точке $0.25i$ (расположение микротрещины относительно макротрещины представлено на рис. 2б).

Графики построены при разных значениях параметра неоднородности $\delta^* = 0, 0.5, 1$. Было принято, что размер микротрещины равен $2a = 0.2a_k$, параметр $\lambda = 0.1$. График показывает влияние угла наклона α микротрещины и существенное влияние параметра неоднородности δ^* на КИН $k_{III}^{\pm} / G_0 \tau \sqrt{a_0}$. КИН k_{III}^+ / $G_0 \tau \sqrt{a_0}$ в правой вершине межфазной трещины меньше 1, что означает некоторое упрочнение материала в окрестности правой вершины при наличии микродефекта. При увеличении параметра неоднородности δ^* , которое соответствует увеличению модуля сдвига материала, кривые графиков $k_{III}^+ / G_0 \tau \sqrt{a_0}$ и $k_{III}^- / G_0 \tau \sqrt{a_0}$ приближаются к единице. Значит, влияние дефекта на КИН межфазной трещины уменьшается с увеличением модуля сдвига функционально-градиентного материала, в котором он расположен.

На рис. 2б представлены графики зависимости нормализованного КИН $k_{III}^{\pm} / G_0 \tau \sqrt{a_0}$ от

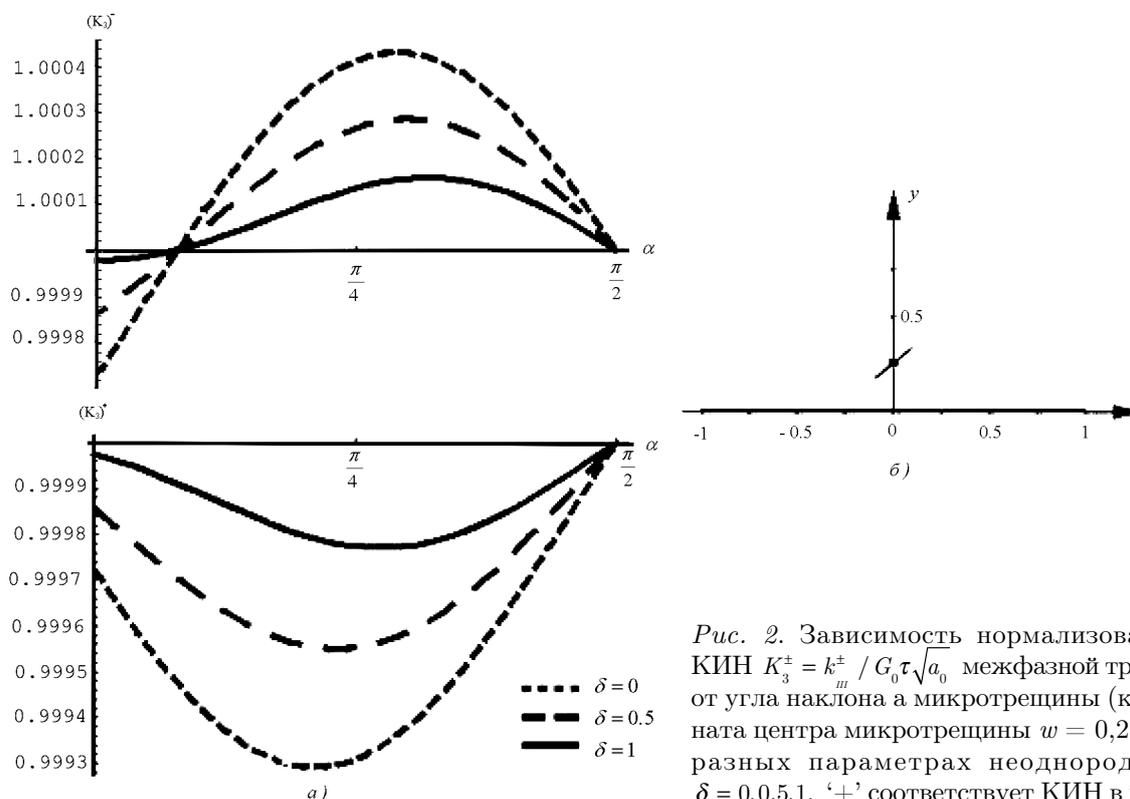


Рис. 2. Зависимость нормализованного КИН $K_3^{\pm} = k_{III}^{\pm} / G_0 \tau \sqrt{a_0}$ межфазной трещины от угла наклона α микротрещины (координата центра микротрещины $w = 0,25i$) при разных параметрах неоднородности $\delta = 0, 0.5, 1$. '+' соответствует КИН в правой вершине трещины, '-' — в левой

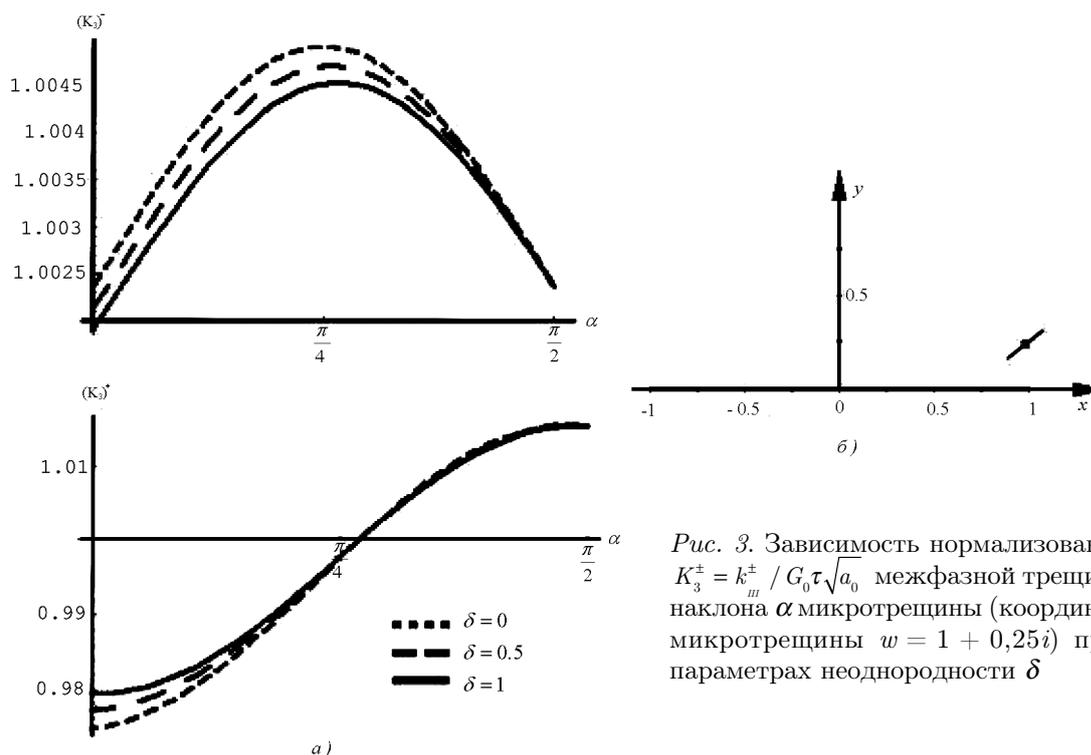


Рис. 3. Зависимость нормализованного КИН $K_3^{\pm} = k_m^{\pm} / G_0 \tau \sqrt{a_0}$ межфазной трещины от угла наклона α микротрещины (координата центра микротрещины $w = 1 + 0,25i$) при разных параметрах неоднородности δ

угла наклона α микротрещины, когда её центр имеет координату $1 + 0,25i$ (рис. 3б).

Здесь видно существенное влияние угла α на КИН и незначительное влияние параметра неоднородности δ^* .

Рассмотрим взаимодействие поля микротрещин и макротрещины. Расчёты проводились при $\lambda = 0,1$. Предполагалось, что все микротрещины имеют одинаковый угол наклона $\alpha_n = \alpha$, координаты центров дефектов определялись по формуле $w_n = x_n + iy_n$, $x_n = a_0 n / r$, $y_n = a_0 m / s$ ($n, m = \pm 1, \pm 2, \dots$), при $r = s = 4$.

На рис. 4а, 5а, 6а представлены графики зависимости нормализованного КИН от угла наклона микротрещин α_k при расположении поля микротрещин, изображенном соответственно на рис. 4б, 5б, 6б. Графики, лежащие выше $k_m^{\pm} / G_0 \tau \sqrt{a_0} = 1$, показывают, что соответствующее поле микродефектов ослабляет материал, кривые, лежащие ниже 1, означают, что дефекты способствуют некоторому упрочнению материала. Поле микротрещин впереди межфазной трещины инициирует распространение межфазной трещины для большинства углов α_k и параметров неоднородности δ^* (рис. 4).

Система микродефектов над межфазной трещиной (рис. 5а) создаёт «экранирующий»

эффект, КИН в этом случае меньше единицы (рис. 5б).

В случае однородной полосы микротрещин (рис. 6б) коэффициенты интенсивности напряжений в правой и левой вершинах межфазной трещины равны. Как видно из рис. 6а, при $\delta^* = 1$ для большинства углов наклона α_k такая система микротрещин приводит к ослаблению материала, при $\delta^* = 0,5$ этот эффект наблюдается для углов $3\pi / 16 < \alpha_k < \pi / 2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена математическая модель двухкомпонентного материала, состоящего из функционально-градиентного материала с экспоненциально изменяющимся модулем сдвига и однородного изотропного материала, под действием антиплоского сдвига. В неоднородном материале содержится система произвольно ориентированных трещин и на границе раздела материалов — межфазная трещина. Предполагая, что неоднородность ФГМ проявляется в виде соответствующих неоднородных распределений напряжений на поверхностях трещин, решение краевой задачи антиплоского сдвига сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Для случая, когда межфазная трещина намно-

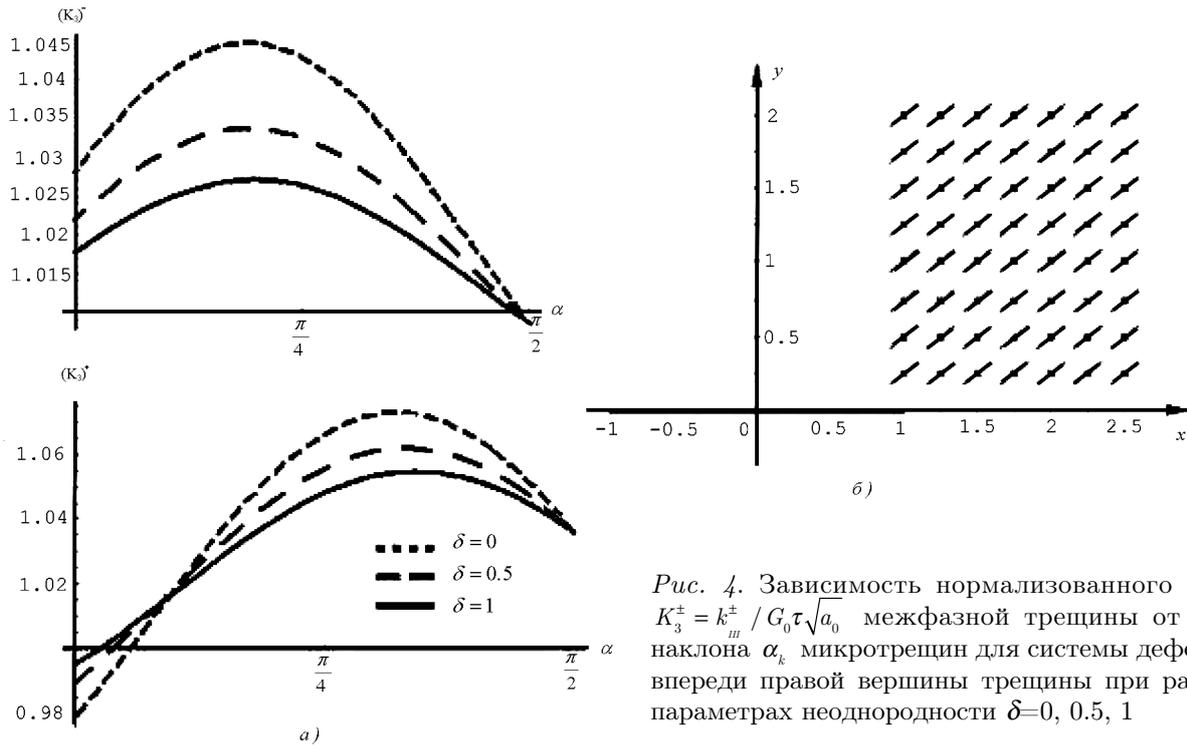


Рис. 4. Зависимость нормализованного КИН $K_3^\pm = k_{III}^\pm / G_0 \tau \sqrt{a_0}$ межфазной трещины от угла наклона α_k микротрещин для системы дефектов впереди правой вершины трещины при разных параметрах неоднородности $\delta=0, 0.5, 1$

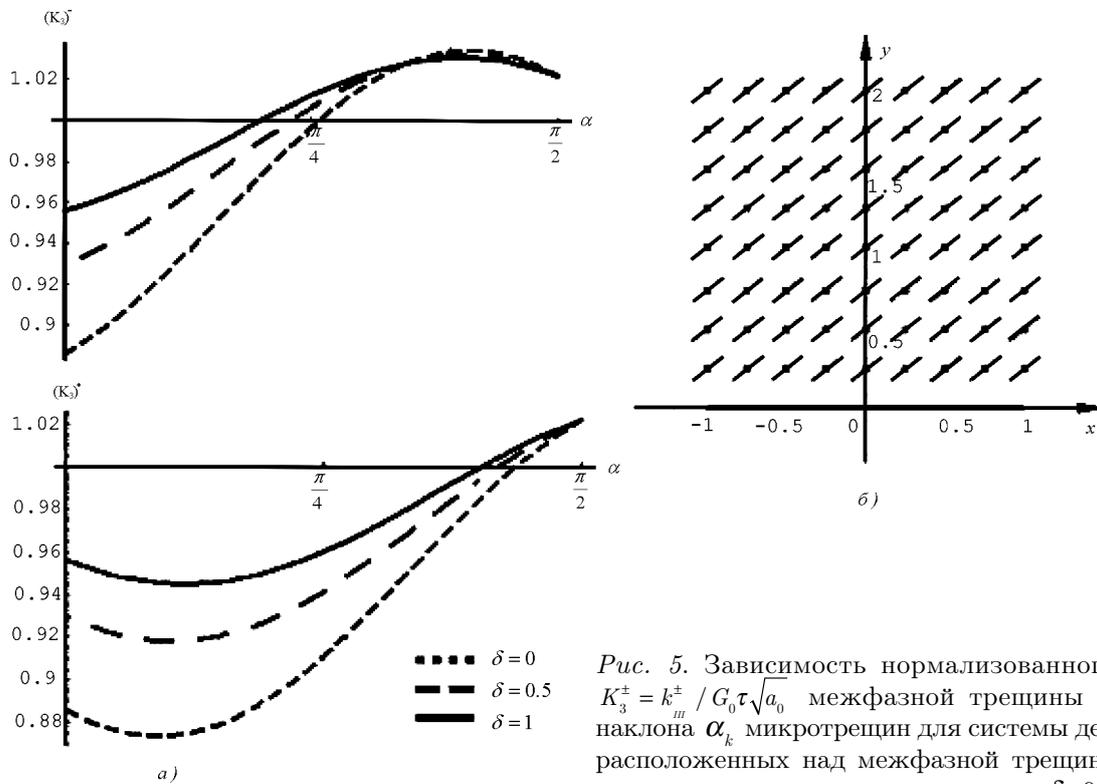


Рис. 5. Зависимость нормализованного КИН $K_3^\pm = k_{III}^\pm / G_0 \tau \sqrt{a_0}$ межфазной трещины от угла наклона α_k микротрещин для системы дефектов, расположенных над межфазной трещиной, при разных параметрах неоднородности $\delta=0, 0.5, 1$

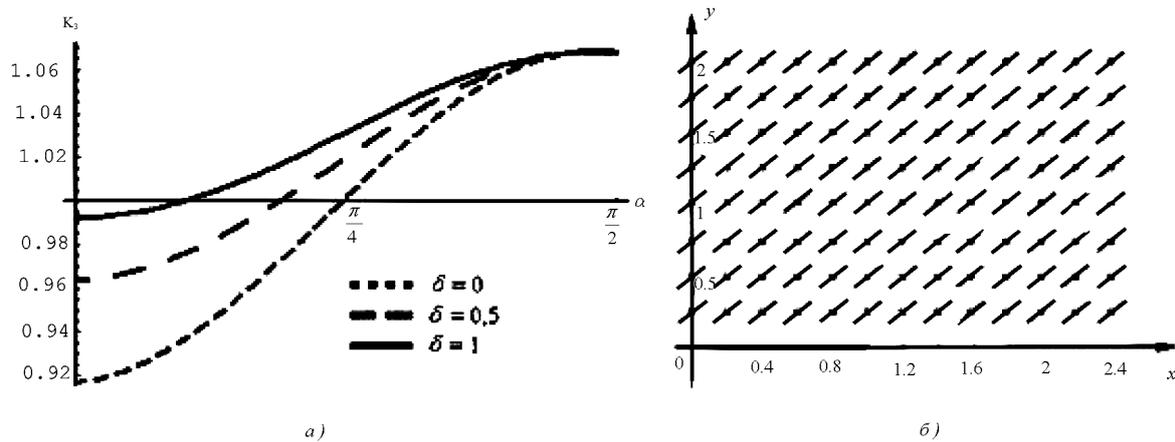


Рис. 6. Зависимость нормализованного КИН $K_3^\pm = k_{III}^\pm / G_0 \tau \sqrt{a_0}$ межфазной трещины от угла наклона α_k микротрещин для полосы дефектов, расположенных над межфазной трещиной (показана только её правая часть), при разных параметрах неоднородности $\delta=0, 0.5, 1$.

го больше внутренних трещин, система интегральных уравнений была решена методом малого параметра. Получены коэффициенты интенсивности напряжений межфазной трещины как функции геометрии задачи и характеристик материала. Исследовано влияние различных систем трещин и их ориентации на КИН межфазной трещины, а также влияние на него параметра неоднородности. Показано, что влияние систем микротрещин может, как инициировать распространение межфазной трещины, так и тормозить её. Показателем является величина нормированного КИН, в первом случае она больше единицы, во втором — меньше. Системы трещин, расположенные перед межфазной трещиной приводят к увеличению КИН. Микротрещины, ориентированные перпендикулярно к межфазной трещине, не влияют на КИН. Параметр неоднородности функционально градиентного материала наибольшее влияние оказывает на КИН межфазной трещины в случае расположения микротрещин над межфазной трещиной, причём, как правило, такие системы уменьшают КИН по сравнению с КИН одной трещины, то есть они создают ‘экранирующий’ эффект. В рассмотренной задаче исследован только случай влияния положительных параметров неоднородности, что соответствует увеличивающемуся модулю сдвига в функционально-градиентном материале. Отрицательные параметры δ^* будут рассмотрены в дальнейших публикациях. Задача имеет много параметров, полу-

ченное аналитическое решение позволяет изучить их влияние на основные характеристики напряженно-деформированного состояния в окрестности межфазной трещины и применить эти результаты для исследования трещиностойкости конкретных двухкомпонентных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birman V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L. W. Byrd // Applied Mechanics Reviews. — 2007. — V. 60. — P. 195-216.
2. Tamuzs V. Fracture of Solids with Microdefects / V. Tamuzs, N. Romalis, V. Petrova. — Nova Science Publishers Inc., 2000. — 247 p.
3. Shbeeb N.I. Analysis of the driving forces for multiple cracks in an infinite nonhomogeneous plate. Part I: Theoretical analysis. Part II: Numerical solutions/ N.I. Shbeeb, W.K. Binieda, K.L. Kreider // ASME J. Appl. Mech. — 1999. — V. 66. — P. 492—506.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. / Н. И. Мухелишвили — М.: Физматлит, 1962. — 599 с.
5. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. — Киев: Наукова думка, 1976. — 445 с.
6. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат — М.: Наука, 1965. — 716 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов — М.: Наука, 1977. — 640с.

8. *Петрова В.Е.* Взаимодействие магистральной трещины с микротрещинами в условиях продольного сдвига / В.Е. Петрова, В.П. Тамуж // Трех-

мерные задачи структурно-неоднородных сред — Воронеж: Изд. ВГУ, 1991. — С. 135—140.

9. *Пыхтеев Г. Н.* Точные методы вычисления интегралов типа Коши / Г.Н. Пыхтеев — Новосибирск : Наука : Сиб. отд., 1980.— 121 с.

Петрова Вера Евгеньевна — докт. физ.-мат. наук, профессор каф. уравнений в частных производных и теории вероятности ВГУ

Тел. 4732 208 618

E-mail: veraep@gmail.com

Vera E. Petrova — Dr.Sci., Professor of the Department of Partial Derivative Equations and Theory of Probability, The Faculty of Mathematics, Voronezh State University

Telephone: 4732 208 618

E-mail: veraep@gmail.com

Караулова Наталья Евгеньевна — студентка каф. уравнений в частных производных и теории вероятности ВГУ

Тел. 920 4138010

E-mail: nasy87@mail.ru

Natalia E. Karaulova — Student of the Department of Partial Derivative Equations and Theory of Probability, The Faculty of Mathematics, Voronezh State University

Telephone: 8 920 4138010

E-mail: nasy87@mail.ru