УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СЛАБЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ*

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию: 14.09.2010.

Аннотация: в статье исследуется разрешимость в слабом смысле краевой задачи для системы уравнений, описывающей стационарное движение слабых водных растворов полимеров в ограниченной области с локально-липшицевой границей, а во второй части статьи и в произвольной области (возможно неограниченной).
Ключевые слова: слабо концентрированные водные растворы полимеров, слабые решения, аппроксимационная задача, теорема существования.

Abstract: this paper establishes the solvability in weak sense for a model describing the stationary motion of weak aqueous polymer solutions in the boundary domain with locally-lipshitz boundary and in the second part of this article in an arbitrary domain (probably unbounded).
Keywords: weak aqueous polymer solutions, the solvability in weak sense, approximative problem, the existence theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Соответствующая, рассматриваемой здесь стационарной системе, эволюционная система возникла в работе [1], хотя ее можно рассматривать как обобщение модели движения жидкости Фойгта при замене в этой модели частной производной на полную [2]. В работе [3] отмечено, что экспериментально подтверждено, что именно такая система описывает поведение слабо концентрированных водных растворов полимеров (полиэтиленоксида, полиакриламида).

Исследование сильной и слабой разрешимости соответствующей начально-краевой задачи для эволюционной системы и ее модификаций посвящены работы [4]—[7]. В работе [8] доказано существование глобального аттрактора для слабых решений этой системы. Естественно встает вопрос о полном или частичном описании этого глобального аттрактора. Поскольку стационарные решения (если они есть) входят в глобальный аттрактор, то естественно возникает задача о слабой разрешимости краевой задачи соотвествующей стационарной системы. Она имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \mathrm{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k} \right) + \mathrm{grad} p = f, \quad x \in \Omega; \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div} v = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1.2}$$

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.3}$$

где v — вектор-функция скоростей в точке области Ω пространства $\mathbb{R}^n, n = 2,3$ с границей $\partial\Omega$, p — функция давления, $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij})$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор скоростей деформации, f — плотность внешних сил, ν — кинематический коэффициент вязкости, а $\varkappa$ — время запаздывания. Коэффициент $\varkappa$ называют также временем релаксации деформаций.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с локально-липшицевой границей.

Через $L_p(\Omega)^n, 1 \leqslant p < \infty$, будем, как обычно, обозначать множество всех измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-той степенью. Данное пространство является банаховым с нормой:

* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009—2013 годы” (госконтракт № П941).

$$\|u\|_{L_p(\Omega)^n} = \left(\int_\Omega |\, u(x)\,|^p \; dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Через $W_2^k(\Omega)^n, p \geqslant 0$ будем обозначать пространство функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, которые вместе со своими производными до порядка k включительно принадлежат пространству $L_2(\Omega)^n$. Обычно такие пространства называют пространствами Соболева (или соболевскими пространствами). Известно, что пространство $W_2^k(\Omega)^n$ банахово относительно нормы

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)^n} = \left(\int_\Omega \sum_{\alpha:|\alpha|\leqslant k} |\, D^\alpha u\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω;

$\mathcal{V} = \left\{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n,\ \mathrm{div} v = 0\right\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega)^n$;

H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^n$;

V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$ со скалярным произведением

$$((v,w)) = \left(\int_\Omega \nabla v : \nabla w dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь символ $\nabla u : \nabla \varphi$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ обозначает покомпонентное умножение матриц, определяемое равенством

$$\nabla u : \nabla \varphi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}.$$

Норма, порождаемая этим скалярным произведением в пространстве V, обозначается $\|\cdot\|_V$ и эквивалентна норме, индуцированной из пространства $W_2^1(\Omega)^n$.

Через E^* мы обозначим пространство сопряженное к пространству E. Через $\langle f, v\rangle$ будем обозначать действие функционала $f \in E^*$ на элемент $v \in E$.

По теореме Рисса будем отождествлять пространство H с его сопряженным пространством H^*. Поэтому имеем следующие вложения:

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*.$$

В силу того, что пространство V плотно в H и того, что пространство V рефлексивно, получаем, что пространство H^* плотно в V^*.

Символ C с индексом внизу будет обозначать различные положительные константы.

Пусть X — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^3(\Omega)^n$; мы будем рассматривать пространство X с нормой

$$\|\, v\,\|_X = \left(\int_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Данная норма эквивалентна в X норме, индуцированной из пространства $W_2^3(\Omega)^n$.

Определение 2. 1. *Пусть $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи* (1.1)—(1.3) *называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in X$ равенству:*

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx - \\ &-\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \\ &-\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \langle f, \varphi\rangle.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача* (1.1)—(1.3) *имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.*

3. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Доказательство теоремы 2.1 основано на рассмотрение семейства апроксимационных задач, доказательства их разрешимости и последующего предельного перехода. Итак, добавим в уравнение (1.1) слагаемое $-\varepsilon\Delta^3 v, \varepsilon > 0$. Полученные уравнения называют ε-аппроксимациями уравнения (1.1). Увеличение порядка уравнения приводит к необходимости введения дополнительных граничных условий.

Поэтому рассматривается следующая краевая задача с малым параметром, которую будем называть ε- аппроксимацией исходной задачи (1.1)—(1.3):

$$\begin{aligned}&-\varepsilon\Delta^3 v - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \\ &-\varkappa \mathrm{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right) + \mathrm{grad}\, p = f, \quad x \in \Omega;\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega; \tag{3.2}$$

$$v\,|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.3}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.4}$$

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.5}$$

Здесь ε — некоторое фиксированное положительное число; n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Предполагается, что $f \in V^*$.

Определение 3.1. *Слабым решением краевой задачи* (3.1)—(3.5) *называется функция* $v \in X$, *удовлетворяющая для любого* $\varphi \in X$ *равенству:*

$$\varepsilon\int_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx +$$
$$+\nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx - \frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx - \tag{3.6}$$
$$-\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx = \langle f, \varphi\rangle.$$

Для исследования слабых решений дадим операторную трактовку аппроксимационной задачи.

Определим операторы A, N, B_1, B_2, B_3 с помощью следующих равенств:

$$A : V \to V^*,\ \langle Av, \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx, \quad v, \varphi \in V;$$

$$N : X \to X^*, \langle Nv, \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi) dx, v, \varphi \in X;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*, \langle B_1(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx,$$
$$v \in L_4(\Omega)^n, \varphi \in V;$$

$$B_2 : V \to X^*, \langle B_2(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx,$$
$$v \in V,\ \varphi \in V;$$

$$B_3 : V \to X^*,\ \langle B_3(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx,$$
$$v \in V,\ \varphi \in V;$$

Далее заметим, что V вложено в $L_4(\Omega)^n$ для $n = 2{,}3$, значит B_1 можно рассматривать и как отображение $B_1 : V \to V^*$, а поскольку X вложено в V, то операторы $A, B_i, i = 1,2,3$ можно рассматривать и как отображения $A, B_1, B_2, B_3 : X \to X^*$. При этом, чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, определенных одной и той же формулой, но действующих в разных функциональных пространствах, когда из контекста ясно, в каких функциональных пространствах действуют операторы в данном месте текста.

В силу произвольности $\varphi \in X$ в определении 3.1 равенство (3.6) эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon Nv + \nu Av - B_1(v) - \frac{\varkappa}{2}B_2(v) - \frac{\varkappa}{2}B_3(v) = f. \tag{3.7}$$

Таким образом, каждое слабое решение задачи (3.1)—(3.5) является решением операторного уравнения (3.7) и обратно.

Введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L_\varepsilon : X \to X^*, \quad L_\varepsilon(v) = \varepsilon Nv;$$
$$K : X \to X^*,$$
$$K(v) = \nu Av - B_1(v) - \frac{\varkappa}{2}B_2(v) - \frac{\varkappa}{2}B_3(v).$$

В этих обозначениях уравнение (3.7) записывается в виде:

$$L_\varepsilon(v) + K(v) = f. \tag{3.8}$$

Для дальнейшего нам необходимо исследовать свойства операторов A, N, B_1, B_2, B_3.

Лемма 3.1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

1. Оператор $A : V \to V^*$ — непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Au\|_V \leqslant \|u\|_{V^*}. \tag{3.9}$$

2. Оператор $A : X \to X^*$ — вполне непрерывен.

Доказательство. 1) Достаточно показать ограниченность линейного оператора A. По определению имеем

$$|\langle Au, \varphi\rangle| = \left|\int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi dx\right| \leqslant \|u\|_V\,\|\varphi\|_V.$$

Отсюда и следует неравенство (3.9) и непрерывность оператора A.

2) Докажем вполне непрерывность оператора A, действующего из X в X^*. Из первого пункта этой леммы имеем, что оператор $A : V \to V^*$ — непрерывен, а в композиции отображений $X \subset V \xrightarrow{A} V^* \subset X^*$ первое вложение вполне непрерывно. Учитывая, что отображение A и последнее вложение непрерывны, получаем, что отображение $A : X \to X^*$ — вполне непрерывно.

Лемма 3.2. *Оператор $L_\varepsilon = \varepsilon N : X \to X^*$ — непрерывен, обратим и для него имеет место оценка:*

$$\left\|L_\varepsilon u\right\|_{X^*} = \left\|(\varepsilon N)u\right\|_{X^*} \leqslant \varepsilon \left\|u\right\|_X . \qquad (3.10)$$

Кроме того, обратный оператор $L_\varepsilon^{-1} = (\varepsilon N)^{-1} : X^* \to X$ — непрерывен.

Доказательство. В силу линейности оператора εN для доказательства его непрерывности достаточно показать его ограниченность. Имеем

$$\left|\langle(\varepsilon N)u, \varphi\rangle\right| = \left|\varepsilon \int_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta\varphi)dx\right| \leqslant \leqslant \varepsilon \left\|u\right\|_X \left\|\varphi\right\|_X . \qquad (3.11)$$

Отсюда и следует оценка (3.10). Таким образом, оператор $L_\varepsilon : X \to X^*$ ограничен и, следовательно, непрерывен.

Для доказательства обратимости воспользуемся теоремой 2.2 из [9] (с. 28—31). Приведем её формулировку:

Теорема. *Пусть W — сепарабельное вещественное гильбертово пространство (с нормой $\|\cdot\|_W$), и пусть $a(u,v)$ — непрерывная билинейная форма на $W \times W$, которая коэрцитивна, т.е. существует $\alpha > 0$, такое что*

$$a(u,u) \geqslant \alpha \left\|u\right\|_W^2 \qquad \forall u \in W.$$

Тогда для каждого l из W^* — пространства, сопряженного к W, — существует один и только один элемент $u \in W$, такой что

$$a(u,v) = \langle l, v\rangle \qquad \forall v \in W.$$

Для того чтобы применить данную теорему нам достаточно показать, что непрерывная билинейная форма

$$a(u,v) = \left\langle(\varepsilon N)u, v\right\rangle = \varepsilon \int_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta v)dx$$

коэрцитивна.

Действительно, для любого $u \in X$ имеем, что

$$a(u,u) = \left\langle(\varepsilon N)u, u\right\rangle = \varepsilon \int_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta u)dx = = \varepsilon \left\|u\right\|_X^2 \geqslant \varepsilon \left\|u\right\|_X^2 , \quad \varepsilon > 0. \qquad (3.12)$$

Отсюда следует, что $L_\varepsilon : X \to X^*$ — изоморфизм.

Итак, имеем линейный непрерывный оператор εN, который отображает все банахово пространство X на все банахово пространство X^* взаимно-однозначно. Отсюда по теореме Банаха следует, что существует линейный непрерывный оператор L_ε^{-1}, обратный оператору L_ε, отображающий X^* на X.

Лемма 3.3. *Для отображения B_1 имеют место следующие свойства:*

1. Отображение $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*$ — непрерывно и для него имеет место оценка:

$$\left\|B_1(v)\right\|_{V^*} \leqslant C_1 \left\|v\right\|_{L_4(\Omega)^n}^2 . \qquad (3.13)$$

2. Для любой функции $v \in X$ функция $B_1(v) \in X^*$ и отображение $B_1 : X \to X^*$ — вполне непрерывно.

Доказательство. 1) Для любых $v \in L_4(\Omega)^n, \varphi \in V$ имеем

$$\left|\langle B_1(v), \varphi\rangle\right| \leqslant C_1 \max_{i,j} \left\|v_i v_j\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\varphi\right\|_V \leqslant \leqslant C_1 \left\|v\right\|_{L_4(\Omega)^n}^2 \left\|\varphi\right\|_V ,$$

откуда и следует, что

$$\left\|B_1(v)\right\|_{V*} \leqslant C_1 \left\|v\right\|_{L_4(\Omega)^n}^2$$

с некоторой константой C_1.

Покажем непрерывность отображения $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*$, $v \mapsto B(v)$. Для произвольных $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)^n$ имеем:

$$\left|\left\langle B_1(v^m), \varphi\right\rangle - \left\langle B_1(v^0), \varphi\right\rangle\right| =$$

$$= \left|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^m v_j^m \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^0 v_j^0 \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\varphi\right\|_V \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\varphi\right\|_V \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} .$$

Отсюда следует, что

$$\left\|B_1(v^m) - B_1(v^0)\right\|_{V*} \leqslant \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} .$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 + v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\left\|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n}\left\|v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left\|v_i^m (v_j^m - v_j^0)\right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n}\left\|v_j^0 (v_i^m - v_i^0)\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\left\|v_i^m\right\|_{L_4(\Omega)}\left\|v_j^m - v_j^0\right\|_{L_4(\Omega)} +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|v_j^0\right\|_{L_4(\Omega)}\left\|v_i^m - v_i^0\right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2\left\|v^m\right\|_{L_4(\Omega)^n}\left\|v^m - v^0\right\|_{L_4(\Omega)^n} +$$
$$+C_2\left\|v^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}\left\|v^m - v^0\right\|_{L_4(\Omega)^n} =$$
$$= C_2\left(\left\|v^m\right\|_{L_4(\Omega)^n} + \left\|v^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}\right)\left\|v^m - v^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}.$$

Таким образом получили, что

$$\left\|B_1(v^m) - B_1(v^0)\right\|_{V*} \leqslant$$
$$\leqslant C_2\left(\left\|v^m\right\|_{L_4(\Omega)^n} + \left\|v^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}\right)\left\|v^m - v^0\right\|_{L_4(\Omega)^n}. \tag{3.14}$$

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(\Omega)^n$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in L_4(\Omega)^n$. Тогда непрерывность отображения $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*$ следует из неравенства (3.14).

2) Так как в силу теоремы вложения Соболева мы имеем компактное вложение $X \subset L_4(\Omega)^n$, для $n = 2,3$, то имеем:

$$X \subset L_4(\Omega)^n \xrightarrow{B_1} V^* \subset X^*,$$

где первое вложение вполне непрерывно, а отображение B_1 и последнее вложение — непрерывны. Таким образом, получили, что для любой функции $v \in X$ функция $B_1(v) \in X^*$ и отображение $B_1 : X \to X^*$ — вполне непрерывно.

Лемма 3.4. *Для операторов B_2 и B_3 имеют место следующие свойства:*

1. Для $i = 2,3$ операторы $B_i : V \to X^*$ — непрерывены и для них имеет место оценка:

$$\left\|B_i(v)\right\|_{X*} \leqslant C_3\left\|v\right\|_V^2. \tag{3.15}$$

2. Для $i = 2,3$ и любой функции $v \in X$ $B_i(v) \in X^*$ и отображения $B_i : X \to X^*$ — вполне непрерывны.

Доказательство. Мы докажем данную лемму для оператора B_2. Доказательство в случае оператора B_3 полностью аналогично.

1) Для любых $v \in V, \varphi \in X$ в силу определения оператора B_2 имеем

$$\left|\langle B_2(v), \varphi\rangle\right| = \left|\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|v_k\right\|_{L_4(\Omega)}\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} C_3\left\|v\right\|_{L_4(\Omega)^n}\left\|v\right\|_V\left\|\varphi\right\|_X \leqslant C_4\left\|v\right\|_V^2\left\|\varphi\right\|_X.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (3.15).

Покажем непрерывность отображения $B_2 : V \to X^*$. Для произвольных $v^m, v^0 \in V$ имеем:

$$\left|\left\langle B_2(v^m), \varphi\right\rangle - \left\langle B_2(v^0), \varphi\right\rangle\right| =$$
$$= \left|\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}dx - \right.$$
$$\left. -\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\right\|_{L_{4/3}(\Omega)}\left\|\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\right\|_{L_{4/3}(\Omega)}\left\|\varphi\right\|_X.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|B_2(v^m) - B_2(v^0)\right\|_{X*} \leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\right\|_{L_{4/3}(\Omega)}.$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\right\|_{L_{4/3}(\Omega)} =$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\right\|_{L_{4/3}(\Omega)} +$$
$$+\sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|v_k^m\right\|_{L_4(\Omega)}\left\|\frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\right\|_{L_2(\Omega)} +$$
$$+\sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|v_k^m - v_k^0\right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \left\|v^m\right\|_{L_4(\Omega)^n} \left\|v^m - v^0\right\|_V + C_5 \left\|v^0\right\|_V \left\|v^m - v^0\right\|_{L_4(\Omega)^n} \leqslant$$
$$\leqslant C_6 \left(\left\|v^m\right\|_V + \left\|v^0\right\|_V\right)\left\|v^m - v^0\right\|_V .$$

Отсюда следует, что

$$\left\|B_2(v^m) - B_2(v^0)\right\|_{X^*} \leqslant$$
$$\leqslant C_6 \left(\left\|v^m\right\|_V + \left\|v^0\right\|_V\right)\left\|v^m - v^0\right\|_V . \tag{3.16}$$

Итак, если последовательность $\{v^m\} \subset V$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in V$, то из неравенства (3.16) следует непрерывность отображения $B_2 : V \to X^*$.

2) Для доказательства утверждения этого пункта мы уже имеем:

$$X \subset V \xrightarrow{B_2} X^*.$$

Здесь первое вложение вполне непрерывно, а отображение B_2 — непрерывно. Таким образом для любой функции $v \in X$ получим, что функция $B_2(v) \in X^*$, а отображение $B_2 : X \to X^*$ — вполне непрерывно.

Лемма 3.5. *Оператор $K : X \to X^*$ — вполне непрерывен.*

Доказательство. Вполне непрерывность оператора $K : X \to X^*$ следует из вполне непрерывности операторов

$A : X \to X^*$ лемма 3.1;

$B_1 : X \to X^*$ лемма 3.3;

$B_2 : X \to X^*$ лемма 3.4;

$B_3 : X \to X^*$ лемма 3.4;

4. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА

Вместе с уравнением (3.8) мы будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений

$$L_\varepsilon(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \quad \lambda \in [0,1], \tag{4.1}$$

которое совпадает с (3.8) при $\lambda = 1$.

Теорема 4.1. *Если $v \in X$ — решение операторного уравнения (4.1) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\varepsilon \| v \|_X^2 \leqslant C_7, \tag{4.2}$$

где $C_7 = \dfrac{\left\|f\right\|_{V^*}^2}{2\nu}$. *Более того, при $\lambda = 1$ имеет место следующая оценка:*

$$\nu \left\|v\right\|_V^2 \leqslant C_8, \tag{4.3}$$

где $C_8 = \dfrac{\left\|f\right\|_{V^*}^2}{2\nu}$.

Доказательство. Пусть $v \in X$ — решение (4.1), тогда для него при любом $\varphi \in X$ имеет место равенство

$$\varepsilon\int_\Omega \nabla\left(\Delta v\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right) dx - \lambda\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx +$$
$$+\lambda\nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx - \frac{\lambda\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \tag{4.4}$$
$$-\frac{\lambda\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \lambda\langle f, \varphi\rangle.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx =$$
$$= \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \varepsilon_{ij}(v)\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx =$$
$$= -\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial\varepsilon_{ij}(v)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx -$$
$$-\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\varepsilon_{ij}(v)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx =$$
$$= -\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial\varepsilon_{ij}(v)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

Тогда (4.4) можно переписать в виде

$$\varepsilon\int_\Omega \nabla\left(\Delta v\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right) dx - \lambda\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx +$$
$$+\lambda\nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx + \lambda\varkappa\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx =$$
$$= \lambda\langle f, \varphi\rangle.$$

Поскольку последнее равенство имеет место при всех $\varphi \in X$, то оно имеет место и при $\varphi = v$.

$$\varepsilon\int_\Omega \nabla\left(\Delta v\right) : \nabla\left(\Delta v\right) dx - \lambda\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx +$$
$$+\lambda\nu\int_\Omega \nabla v : \nabla v dx + \lambda\varkappa\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \tag{4.5}$$
$$= \lambda\langle f, v\rangle.$$

Преобразуем слагаемые в левой части (4.5) следующим образом:

$$\varepsilon\int_\Omega \nabla\left(\Delta v\right):\nabla\left(\Delta v\right)dx=\varepsilon\left\|v\right\|_X^2;$$

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_i v_j\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_i\frac{\partial(v_j v_j)}{\partial x_i}dx=$$

$$=-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial v_i}{\partial x_i}v_i v_j dx=0;$$

$$\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial\varepsilon_{ij}(v)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx=$$

$$=2\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial\varepsilon_{ij}(v)}{\partial x_k}\varepsilon_{ij}(v)dx=$$

$$=\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial\left(\varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\right)}{\partial x_k}dx=$$

$$=-\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx=$$

$$=-\int_\Omega \operatorname{div}v\sum_{i,j,=1}^n\varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx=0;$$

$$\nu\int_\Omega\nabla v:\nabla v\,dx=\nu\left\|v\right\|_V^2;$$

Здесь мы воспользовались симметричностью тензора скоростей деформаций $\mathcal{E}$.

Таким образом (4.5) можно переписать в следующем виде:

$$\varepsilon\left\|v\right\|_X^2+\lambda\nu\left\|v\right\|_V^2=\lambda\langle f,v\rangle.$$

Так как правую часть последнего равенства можно оценить сверху

$$\lambda\langle f,v\rangle\leqslant\lambda\left|\langle f,v\rangle\right|\leqslant\lambda\left\|f\right\|_{V^*}\left\|v\right\|_V.$$

Правую часть последнего неравенства можно оценить следующим образом

$$\left\|f\right\|_{V^*}\left\|v\right\|_V\leqslant\frac{\left\|f\right\|_{V^*}^2}{2\delta}+\frac{\delta\left\|v\right\|_V^2}{2}$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера и неравенством Коши:

$$bc\leqslant\frac{\delta b^2}{2}+\frac{c^2}{2\delta}$$

Таким образом получили для $\delta=\nu$

$$\varepsilon\left\|v\right\|_X^2+\lambda\nu\left\|v\right\|_V^2\leqslant\lambda\frac{\left\|f\right\|_{V^*}^2}{2\nu}+\lambda\frac{\nu\left\|v\right\|_V^2}{2}$$

$$\varepsilon\left\|v\right\|_X^2+\lambda\frac{\nu\left\|v\right\|_V^2}{2}\leqslant\lambda\frac{\left\|f\right\|_{V^*}^2}{2\nu}$$

$$\varepsilon\left\|v\right\|_X^2\leqslant\lambda\frac{\left\|f\right\|_{V^*}^2}{2\nu}\leqslant\frac{\left\|f\right\|_{V^*}^2}{2\nu}$$

Аналогично при $\lambda=1$ получаем:

$$\nu\left\|v\right\|_V^2\leqslant\frac{\left\|f\right\|_{V^*}^2}{\nu}$$

Отсюда и следуют требуемые оценки (4.2) и (4.3).

5. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 5.1. *Операторное уравнение* (3.8) *имеет хотя бы одно решение* $v\in X$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу априорной оценки (4.2) все решения семейства уравнений (4.1):

$$L_\varepsilon(v)+\lambda K(v)=\lambda f,\ \text{где}\ \lambda\in[0,1],$$

лежат в шаре B_R радиуса $R=C_7+1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений

$$v+\lambda L_\varepsilon^{-1}\left[K(v)-f\right]=0,\ \text{где}\ \lambda\in[0,1],$$

лежат в том же шаре B_R. В силу леммы 3.5 отображение $\left[K(\cdot)-f\right]:X\to X^*$ является вполне непрерывным. А из леммы 3.2 следует, что оператор $L_\varepsilon^{-1}:X^*\to X$ непрерывен.

Таким образом отображение

$$L_\varepsilon^{-1}\left[K(\cdot)-f\right]:X\to X$$

вполне непрерывно. Тогда отображение

$$G:[0,1]\times X\to X,\quad G(\lambda,v)=\lambda L_\varepsilon^{-1}\left[K(v)-f\right]$$

вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v.

Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi(\lambda,v)=v-G(\lambda,v)$$

невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена степень Лере—Шаудера $\deg_{LS}(\Phi,B_R,0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot),B_R,0)=\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot),B_R,0).$$

Вспомним, что $\Phi(0,\cdot)=I$ и выполнено равенство:

$$\deg_{LS}(I,B_R,0)=1.$$

Отсюда,

$$\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot),B_R,0)=1.$$

Таким образом получили, что существует хотя бы одно решение $v\in X$ уравнения

$$v + L_\varepsilon^{-1}\left[K(v) - f\right] = 0$$

и, следовательно, уравнения (3.8).

Поскольку существует решение $v \in X$ уравнения (3.8), то из вышеприведенных рассуждений следует, что краевая задача (3.1) — (3.5) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1

Доказательство. Положим в (3.6) $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$.

В силу выбора последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. В силу теоремы 5.1 при каждом ε_m существует $v_m \in X \subset V$ — слабое решение (3.1)—(3.5). Таким образом каждое v_m удовлетворяет уравнению:

$$\begin{gathered}\varepsilon_m \int_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right) dx - \\ -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi dx - \\ -\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \\ -\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \langle f, \varphi\rangle. \end{gathered} \tag{6.1}$$

В силу существования априорной оценки (4.3), (и в силу рефлексивности пространства V) $\{v_m\}$ будет слабо сходиться к некоторому элементу $v_* \in V$.

Тогда при $m \to \infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu \int_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi dx \to \nu \int_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi dx.$$

Далее заметим:

$$\begin{gathered}\lim_{m\to\infty}\left|\varepsilon_m \int_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right) dx\right| = \\ = \lim_{m\to\infty}\sqrt{\varepsilon_m}\left|\sqrt{\varepsilon_m}\int_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right) dx\right| = \\ = \lim_{m\to\infty}\sqrt{\varepsilon_m}\lim_{m\to\infty}\left|\sqrt{\varepsilon_m}\int_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right) dx\right|\end{gathered}$$

Без ограничения общности, в силу оценки (4.2) теоремы 4.1 получаем:

$$\varepsilon_m \int_\Omega \nabla\left(\Delta(v_m)\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right) dx \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Так как V вполне непрерывно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для $n = 2{,}3$, отсюда, учитывая оценку (4.3), без ограничения общности можно считать, что

$$v_m \to v_*, \text{сильно } L_4(\Omega)^n.$$

Откуда следует, что

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \to \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

В оставшихся интегралах имеем

$$\begin{gathered}\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \to \\ \to \frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \\ \frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \to \\ \to \frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx.\end{gathered}$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^n$. Таким образом их произведение сходится слабо к $v_* \nabla v_*$ в $L_{4/3}(\Omega)^n$.

Таким образом переходя в равенстве (6.1) к пределу при $m \to +\infty$ получим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему равенству

$$\begin{gathered}\nu \int_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \\ -\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \\ -\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \langle f, \varphi\rangle.\end{gathered} \tag{6.2}$$

Вспоминаем, что $v_* \in V$. Это и завершает доказательство теоремы 2.1.

7. СЛУЧАЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ

Рассмотрим теперь задачу (1.1)—(1.3) в случае, когда Ω — произвольная область в пространстве $\mathbb{R}^n, n = 2, 3,$ возможно неограниченная. Аналогично случаю с ограниченной областью вводятся понятия слабого решения (2.1) для задачи (1.1)—(1.3), аппроксимационной задачи (3.1)—(3.5) и слабого решения (3.6) для аппроксимационной задачи. И в этом случае справедлив следующий аналог теоремы 2.1:

Теорема 7.1. *Пусть* Ω *— произвольная область пространства* $\mathbb{R}^n$ *и* $n = 2,3$. *Тогда для любого* $f \in V^*$ *краевая задача* (1.1.1)—(1.3) *имеет хотя бы одно слабое решение* $v_* \in V$.

Доказательство. Обозначим через Ω_m пересечение Ω с шаром B_m с центром в нуле радиуса m в пространстве $R^n, m = 1,2,...$

Введем новые обозначения:

Через $L_p(\Omega_m)^n, 1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество всех измеримых функций $u : \Omega_m \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-той степенью.

$\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$ — пространство функций на Ω_m со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω_m;

$\mathcal{V}(\Omega_m) = \left\{ v : v \in \mathfrak{D}(\Omega_m)^n, \ \mathrm{div} v = 0 \right\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$;

$V(\Omega_m)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega_m)^n$;

$X(\Omega_m)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^3(\Omega_m)^n$.

Аналогично введем обозначения $V(B_k)$ и $L_4(B_k)$, где B_k — шар с центром в нуле и радиусом k.

Следуя [10], с. 117, можно рассмотреть сужение f на $\Omega_m : f|_{\Omega_m} \in V^*(\Omega_m)$, которое задается формулой

$$\langle f|_{\Omega_m}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle, \qquad (7.1)$$

где φ — произвольная функция из $X(\Omega_m)$, а $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ нулем на все Ω. Очевидно, $\left\| f|_{\Omega_m} \right\|_{V^*(\Omega_m)} \leqslant \|f\|_{V^*(\Omega)}$.

На каждой области Ω_m рассмотрим задачу (3.6). Заменим в (3.6) f на $f|_{\Omega_m}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$. По теореме 2.1 эти задачи имеют хотя бы одно решение v_m. Обозначим через $\tilde{v}_m$ продолжение v_m нулем на все Ω. По теореме 4.1 нормы $\|\tilde{v}_m\|_{V(\Omega)} = \|v_m\|_{V(\Omega_m)}$ равномерно ограничены. Поэтому при $m \to \infty$ без ограничения общности можно считать, что $\tilde{v}_m \rightharpoonup \tilde{v}_0$ слабо в V. Покажем, что $\tilde{v}_0$ есть решение задачи (2.1).

Возьмем произвольное $\varphi \in X$ (напомним, что $X = X(\Omega)$). При некотором k носитель φ лежит в Ω_k. Обозначим через v_m^* продолжение $\tilde{v}_m$ нулем за пределы Ω, суженное на B_k. Ясно, что $v_m^* \to v_0^*$ слабо в $V(B_k)$, и значит, сильно в $L_4(B_k)$.

Поэтому все слагаемые (3.6) с $\varepsilon = \dfrac{1}{m}, v = \tilde{v}_m$:

$$\begin{gathered} \frac{1}{m}\int_\Omega \nabla(\Delta(\tilde{v}_m)) : \nabla(\Delta\varphi)dx - \\ -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\tilde{v}_m)_i (\tilde{v}_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_\Omega \nabla \tilde{v}_m : \nabla\varphi dx - \\ -\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial(\tilde{v}_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \\ -\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial(\tilde{v}_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \langle f, \varphi \rangle \end{gathered} \qquad (7.2)$$

сходятся к соответствующим слагаемым (2.1):

$$\begin{gathered} -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\tilde{v}_0)_i (\tilde{v}_0)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_\Omega \nabla \tilde{v}_0 : \nabla\varphi dx - \\ -\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial(\tilde{v}_0)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \\ -\frac{\varkappa}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial(\tilde{v}_0)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \langle f, \varphi \rangle \end{gathered} \qquad (7.3)$$

причем, без ограничения общности, в силу оценки (4.2) теоремы 4.1 получаем:

$$\frac{1}{m}\int_\Omega \nabla\left(\Delta(\tilde{v}_m)\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right) dx \to 0 \quad \text{где } m \to \infty.$$

Итак, $\tilde{v}_0$ удовлетворяет тождеству (2.1) при всех $\varphi \in X$. Значит $\tilde{v}_0$ является слабым решением задачи (1.1)—(1.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В. А. Павловский // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809—812.

2. *Бетчов Р.* Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале. — М. : Мир, 1971. — 350 с.

3. *Амфилохиев В. Б., Войткунский Я. И., Мазаева Н. П., Ходорновский Я. С.* Течение полимерных растворой при наличии конвективных ускорений / В. Б. Амфилохиев и др. // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института. — 1975. — Т. 96, С. 3—9.

4. *Осколков А. П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1973. — Т. 38. — С. 98—136.

5. *Осколков А. П.* О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А. П. Осколков // Записки

научных семинаров ЛОМИ. — 1975. — Т. 52. — С. 128—157.

6. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи с краевыми условиями проскальзывания для модифицированных уравнений Навье—Стокса / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1994. — Т. 213. — С. 93—115.

7. *Zvyagin V. G., Turbin M. V.* The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids / V. G. Zvyagin, M. V. Turbin // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — V. 168. — P. 157—308.

8. *Кондратьев С. К.* Об аттракторах модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров / С. К. Кондратьев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2010. — № 1. — С. 117—138.

9. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 408 с.

10. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 204 с.

Звягин Андрей Викторович — студент. Воронежский государственный университет
E-mail: zvyagin@math.vsu.ru
Тел.: 8-915-587-75-88

Zvyagin Andrey Viktorovich — student. Voronezh State University
E-mail: zvyagin@math.vsu.ru
Tel.: 8-915-587-75-88