УДК 517.9

О НЕПРЕРЫВНОЙ ОБРАТИМОСТИ И ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ*

В. Б. Диденко

Воронежский государственный университет

Поступила 25 октября 2010 г.

Аннотация: получены необходимые и достаточные условия для непрерывной обратимости и фредгольмовости операторов, порожденных семейством эволюционных операторов, граничными условиями, заданными линейным отношением, и импульсными воздействиями, также заданными при помощи линейного отношения.
Ключевые слова: непрерывная обратимость, фредгольмовость, семейство эволюционных операторов, линейное отношение, импульсное воздействие.

Abstract: the necessary and sufficient conditions of continuous reversibility and Fredholm property of operators, generated by evolutional operators family, with boundary condition, given using the linear relation and with multivalued impulse effects are found.
Key words: continuous reversibility, Fredholm property, evolutional operators family, linear relation, impulse effects.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Довольно часто на практике (см. [1, 2]) возникают задачи, в которых рассматривается эволюция процессов с кратковременными возмущениями. В этом случае удобно пренебречь длительностью этих возмущений, т.е. считать, что они носят мгновенный характер. Это приводит нас к необходимости рассматривать динамические системы с разрывными траекториями. Обычно такие системы описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями.

Линейные дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями в конечномерном пространстве рассматривались в работе [3] и в банаховом пространстве — в работе [4]. В этих работах импульсные воздействия задавались с помощью линейного ограниченного оператора, определенного на всем фазовом пространстве. В то же время возникают задачи, в которых импульсные воздействия задаются многозначными отображениями, а также отображениями, область которых не совпадает со всем фазовым пространством. Например, такие задачи в случае конечномерного пространства были рассмотрены в работах [5], [6].

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), t \in [t_0, t_2], \quad (1)$$

с многозначными импульсными воздействиями, заданными с помощью линейного отношения (многозначного линейного оператора)

$$x^+(t_1) \in \mathcal{A}x(t_1), t_1 \in [t_0, t_2], \quad (2)$$

и граничными условиями, также заданными с помощью линейного отношения

$$x(t_2) \in \Gamma x(t_0), \quad (3)$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$ — семейство линейных замкнутых операторов, действующих в банаховом пространстве X, $x^+(t_1)$ — предел справа функции x в точке t_1, линейные отношения $\mathcal{A}$ и Γ являются замкнутыми.

Предполагается корректная разрешимость задачи Коши

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), s \in [t_0, t_2], \quad (4)$$

для однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, t \in [t_0, t_2], t \geq s. \quad (5)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда Фундаментальных исследований (грант № 10-01-00276).

Она ведет к существованию семейства эволюционных операторов (определение будет дано ниже) $\mathcal{U}:\Delta\to EndX$, где $\Delta=\left\{(t,s)\in\left[t_0,t_2\right]\times\left[t_0,t_2\right]\mid s\le t\right\}$ и $EndX$ —банахова алгебра линейных ограниченных операторов, определенных на всем пространстве X. Кроме того, предполагается, что $\mathcal{U}$ можно продолжить на весь квадрат $\left[t_0,t_2\right]\times\left[t_0,t_2\right]$ с сохранением некоторых свойств.

Отображение $\mathcal{U}:\left[t_0,t_2\right]\times\left[t_0,t_2\right]\to EndX$ называется (сильно непрерывным) *семейством эволюционных операторов* на $\left[t_0,t_2\right]$, если выполнены следующие условия:

(1) $\mathcal{U}(t,t)=I$ — тождественный оператор для любого $t\in\left[t_0,t_2\right]$;

(2) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau)=\mathcal{U}(t,\tau)$ для всех t,s,τ из $\left[t_0,t_2\right]$;

(3) отображение $(t,s)\mapsto\mathcal{U}(t,s)x:\left[t_0,t_2\right]\times\times\left[t_0,t_2\right]\to X$ непрерывно для любого $x\in X$.

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}:\left[t_0,t_2\right]\times\left[t_0,t_2\right]\to EndX$ *решает абстрактную задачу Коши* (4), (5), если для любого $s\in\left[t_0,t_2\right]$ существует плотное в X подпространство X_s из $D(A(s))$ такое, что для каждого x_0 из X_s функция $x(t)=\mathcal{U}(t,s)x_0$, $t_0\le s\le t\le t_2$, дифференцируема при всех $t\ge s$, $x(t)\in D(A(t))$ и выполнены равенства (4), (5).

Если функция $f:\left[t_0,t_2\right]\to X$ принадлежит линейному пространству $L_1\left(\left[t_0,t_2\right],X\right)$ суммируемых измеримых по Бохнеру (классов) функций, определенных на промежутке $\left[t_0,t_2\right]$ со значениями в X, то (слабым) решением уравнения (1) (при условии, что семейство $\mathcal{U}$ на $\left[t_0,t_2\right]$ решает задачу Коши (4),(5)) называется любая непрерывная функция $x:\left[t_0,t_2\right]\to X$, удовлетворяющая при всех $t_0\le s\le t\le t_2$ равенствам

$$x(t)=\mathcal{U}(t,s)x(s)+\int\limits_s^t\mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau. \qquad (6)$$

В работе получены необходимые и достаточные условия непрерывной обратимости и фредгольмовости операторов, построенных при помощи семейства эволюционных операторов и условий (2)—(3).

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Пусть X — банахово пространство над полем $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. Любое линейное подпространство $\mathcal{A}\subseteq X\times X$ называется *линейным отношением* на пространстве X. Множество всех замкнутых линейных отношений на X будем обозначать $LRC(X)$. Множество всех линейных отношений на X будем обозначать $LR(X)$. Используемые далее понятия из теории линейных отношений(многозначных линейных операторов) можно найти в монографии [7].

Областью определения $D(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}\in LR(X)$ называется подпространство вида $D(\mathcal{A})=\left\{x\in X:(x,y)\in\mathcal{A}\ \text{ для некоторого }\ y\in X\right\}$.

Образом $Im\mathcal{A}$ отношения $\mathcal{A}\in LR(X)$ называется подпространство вида $Im\mathcal{A}=\left\{y\in X:(x,y)\in\mathcal{A}\ \text{ для некоторого }\ x\in X\right\}$.

Ядром линейного отношения $\mathcal{A}$ из $LR(X)$ называется подпространство $Ker\mathcal{A}=\left\{x\in D(\mathcal{A}):(x,0)\in\mathcal{A}\right\}$.

Для отношения $\mathcal{A}\in LR(X)$ и элемента $x\in X$ определим множество вида $\mathcal{A}x=\left\{y:(x,y)\in\mathcal{A}\right\}$. В частности, подпространство $\mathcal{A}0$ имеет вид $\mathcal{A}0=\left\{y:(0,y)\in\mathcal{A}\right\}$.

Суммой двух линейных отношений $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ из $LR(X)$ называется линейное отношение вида $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2=\left\{(x,y)\in X\times X:x\in D(\mathcal{A}_1)\cap D(\mathcal{A}_2),\ y\in\mathcal{A}_1x+\mathcal{A}_2x\right\}$.

Обратным к линейному отношению $\mathcal{A}\in LR(X)$ называется линейное отношение $\mathcal{A}^{-1}=\left\{(y,x)\in X\times X:(x,y)\in\mathcal{A}\right\}$.

Отношение $\mathcal{A}$ из $LRC(X)$ называется *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}^{-1}\in EndX$.

Линейное отношение $\mathcal{A}$ из $LR(X)$ называется *фредгольмовым*, если его ядро $Ker\mathcal{A}$ конечномерно, образ $Im\mathcal{A}$ замкнут и его коразмерность $\beta(\mathcal{A})=CodimIm\mathcal{A}=dim(X/Im\mathcal{A})$ конечна. Число $ind\mathcal{A}=\alpha(\mathcal{A})-\beta(\mathcal{A})$, где $\alpha(\mathcal{A})=dimKer\mathcal{A}$, называется индексом фредгольмова отношения $\mathcal{A}$.

§ 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть X — банахово пространство над полем $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

Рассмотрим отрезок $\left[t_0, t_2\right]$ и точку t_1 из интервала $\left(t_0, t_2\right)$. Символом $\tilde{C} = \tilde{C}\left(\left[t_0, t_2\right], X\right)$ обозначим банахово пространство непрерывных на каждом из интервалов $\left[t_0, t_1\right]$ и $\left(t_1, t_2\right]$ ограниченных функций $x : \left[t_0, t_2\right] \to X,$ имеющих предел справа в точке t_1. Норму в $\tilde{C}$ определим равенством

$$\|x\| = \sup_{t \in [t_0, t_2]} \|x(t)\|.$$

Пусть на отрезке $\left[t_0, t_2\right]$ задано семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \left[t_0, t_2\right] \times \left[t_0, t_2\right] \to EndX$ и пусть Γ и $\mathcal{A}$ — некоторые отношения из $LRC(X)$. Определим оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \tilde{C} \to \tilde{C}$ следующим образом. Функция x из $\tilde{C}$, для которой

$$\left(x(t_0), x(t_2)\right) \in \Gamma, \tag{7}$$

$$\left(x(t_1), x^+(t_1)\right) \in \mathcal{A}, \tag{8}$$

включается в область определения $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$, если существует такая функция f из $\tilde{C}$, что справедливы равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t,s)x(s) + \int_s^t \mathcal{U}(t,\tau) f(\tau) d\tau, \quad t_{i-1} < s \le t \le t_i, i \in \{1,2\}. \tag{9}$$

При этом полагается $\mathcal{L}x = f$. Отметим корректность определения оператора $\mathcal{L}$, т.е. единственность функции f, построенной по функции x.

В работе ставится задача найти необходимые и достаточные условия непрерывной обратимости и фредгольмовости оператора $\mathcal{L}$, построенного описанным выше способом.

§ 4. ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНОЙ ОБРАТИМОСТИ И ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{L}x = f$ для некоторых функций x и f из $\tilde{C}$. Тогда справедливы следующие равенства*

$$x(t) = \mathcal{U}(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{U}(t,\tau) f(\tau) d\tau, \;\; t_0 \le t \le t_1, \tag{10}$$

$$x(t) = \mathcal{U}(t,t_1)x^+(t_1) + \int_{t_1}^t \mathcal{U}(t,\tau) f(\tau) d\tau, \; t_1 < t \le t_2. \tag{11}$$

Введем в рассмотрение линейное отношение

$$\mathcal{D} = \Gamma - \mathcal{U}(t_2,t_1)\mathcal{A}\mathcal{U}(t_1,t_0), \tag{12}$$

и два подпространства из X

$$\mathcal{X}_1 = \Gamma 0 \cap \mathcal{U}(t_2,t_1)\mathcal{A}0, \tag{13}$$

$$\mathcal{X}_2 = \mathcal{U}(t_1,t_0)D(\Gamma) + D(\mathcal{A}). \tag{14}$$

Введем в рассмотрение операторы $\mathcal{C}_i : \tilde{C} \to X, \;\; i = 1,2,$ определенные по правилам

$$\mathcal{C}_i f = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{U}(t_i, s) f(s) ds, \; f \in \tilde{C}. \tag{15}$$

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимым является отношение $\mathcal{D}$ и выполняются равенства*

$$\mathcal{X}_1 = \{0\}, \tag{16}$$

$$\mathcal{X}_2 = X. \tag{17}$$

Для любой функции f из $\tilde{C}$ функция $x = \mathcal{L}^{-1}f$ задается равенствами (10) и (11), где $x(t_0)$ можно найти из равенства

$$x(t_0) = \mathcal{D}^{-1}(v_1 + v_2 + \mathcal{C}_2 f) - \mathcal{U}(t_0,t_1)y_1, \tag{18}$$

а $x^+(t_1)$ можно найти из равенства

$$\left\{x^+(t_1)\right\} = = \mathcal{A}\left(\mathcal{U}(t_1,t_0)x(t_0) + \mathcal{C}_1 f\right) \cap \mathcal{U}(t_1,t_2)\left(\Gamma x(t_0) - \mathcal{C}_2 f\right), \tag{19}$$

где v_1 произвольный элемент из $\Gamma\mathcal{U}\left(t_0,t_1\right)y_1$, v_2 произвольный элемент из $\mathcal{U}\left(t_2,t_1\right)\mathcal{A}y_2$, y_1 и y_2 элементы из $\mathcal{U}\left(t_1,t_0\right)D(\Gamma)$ и $D(\mathcal{A})$ такие, что $y_1 + y_2 = \mathcal{C}_1 f$.

Теорема 2. *Оператор $\mathcal{L}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является отношение $\mathcal{D}$, пространство $\mathcal{X}_1$ является конечномерным и пространство $\mathcal{X}_2$ имеет конечную коразмерность. Если оператор $\mathcal{L}$ фредгольмов, то его индекс можно вычислить по формуле*

$$ind\mathcal{L} = \alpha(\mathcal{D}) - \beta(\mathcal{D}) + dim\mathcal{X}_1 - codim\mathcal{X}_2. \tag{20}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Suresh P. Sethi, Gerald L.* Thompson. Optimal control theory: applications to management science and economics // Kluwer Academic Publishers. 2000.

2. *Tao Yang.* Impulsive Control Theory // Springer, 2001.

3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием // Киев: Вища Школа, 1987.

4. *Bainov D. D., Kostadinov S. I., Myshkis A. D.* Bounded and periodic solutions of differential equations with impulse effect in a Banach space // Differential and integral equations 1, 2, 1988. P. 223—230.

5. *Aubin J.-P.* Optimal impulse control problems and quasi-variational inequalities thirty years later: a viability approach // Optimal control and partial differential equations. IOS Press, 2001. P. 311—324.

6. *Saint-Pierre P.* Hybrid kernels and capture basins for impulse constrained systems // Hybrid systems: computation and control. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 2002. P. 378—392.

7. *Cross R.* Multivalued linear operators // New York: M. Dekker, 1998.

Диденко Владимир Борисович — аспирант. Воронежский государственный университет
E-mail: vladimir.didenko@gmail.com
Тел.: 8-920-404-53-46

Didenko Vladimir Borisovich — postgraduate student. Voronezh State Univirsity
E-mail: vladimir.didenko@gmail.com
Tel.: 8-920-404-53-46