УДК 517.9

ПОНЯТИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И СВОЙСТВА МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРУППАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПЛОСКОГО ТОРА

Ю. Е. Гликлих

Воронежский государственный университет

С. В. Фильчаков

Курский филиал Российского государственного торгово-экономического университета

Поступила в редакцию 11 января 2011 г.

Аннотация: на основе использования понятия параллельности на группах диффеоморфизмов плоского n-мерного тора исследуются свойства многозначных векторных полей на указанных группах. Получены теоремы существования решений задачи Коши для дифференциальных включений.
Ключевые слова: плоский тор, параллельность, группы диффеоморфизмов, многозначные векторные поля, дифференциальные включения.

Abstract: on the basis of using the notion of parallelism on the groups of diffeomophisms of flat n-dimensional torus, we investigate the properties of set-valued vector fields on the groups. Existence theorems are obtained for solutions of initial value problem for differential inclusions.
Key words: flat torus, parallelism, groups of diffeomorphisms, set-valued vector fields, differential inclusions.

1. ВВЕДЕНИЕ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы исследуем векторные поля на группе $D^s(\mathcal{T}^n)$ соболевских H^s-диффеоморфизмов плоского n-мерного тора $\mathcal{T}^n$, $s > \frac{n}{2}+1$. Необходимые предварительные сведения о структуре гильбертова многообразия и структуре группы на этих пространствах имеются в [1, 2].

Наше исследование основано на применении понятия параллельности. При этом выбор для изучения групп диффеоморфизмов именно плоского тора, вызван следующими причинами. Прежде всего, соболевские группы диффеоморфизмов в полном объеме описаны только для компактных многообразий (см. [1]). С другой стороны, понятие параллельности корректно определено только на группах диффеоморфизмов параллелизуемых многообразий. Среди компактных параллелизуемых многообразий плоский тор является наиболее известным объектом, естественным образом возникающим во многих задачах математической физики. В частности, отметим активное изучение задач гидродинамики на плоском торе, к которым сводятся периодические по пространственным переменным движения жидкости в линейном пространстве.

Через i мы обозначаем изометрическое вложение $\mathcal{T}^n$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^k$ при достаточно большом k, которое существует по известной теореме Нэша.

Вложение $i : \mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^k$ порождает вложение $D^s(\mathcal{T}^n)$ в гильбертово пространство $H^s(\mathcal{T}^n, \mathbb{R}^k)$, которое мы обозначаем тем же символом i.

Напомним, что трубчатая окрестность U подмногообразия $iD^s(\mathcal{T}^n)$ в $H^s(\mathcal{T}^n, \mathbb{R}^k)$ имеет структуру прямого произведения $U = iD^s(\mathcal{T}^n) \times W$, где W — шар из пространства, нормального к касательному пространству $T_e D^s(\mathcal{T}^n)$, $e = id$ — единица группы $D^s(\mathcal{T}^n)$. Ретракцию трубчатой окрестности мы обозначим через $r : U \to D^s(\mathcal{T}^n)$. Из сказанного выше следует, что, касательные пространства к U имеют представление вида $T_\xi U = T_{r\xi} D^s(\mathcal{T}^n) \times T_\xi W$. Если $X(\eta)$ — векторное поле на $D^s(\mathcal{T}^n)$, то касательное отображение Ti переводит его в векторное поле TiX на $iD^s(\mathcal{T}^n)$. Символом $\bar{X}$ мы обозначим продолжение поля TiX на U вида $\bar{X}_\xi = (TiX_{r\xi}, 0)$.

На $D^s(\mathcal{T}^n)$, кроме упомянутой выше алгебраической структуры, имеется дополнительная структура, порожденная абсолютным параллелизмом касательного расслоения на торе. Эта структура описывается следующим образом (см., например, [2]).

Определение 1. *Введем операторы:*

(i) $B : T\mathcal{T}^n \to R^n$, *проекция на второй сомножитель в* $T\mathcal{T}^n = \mathcal{T}^n \times R^n$;

(ii) $A(m) : R^n \to T_m\mathcal{T}^n$, *обратное к* B *(см. (i)) отображение на касательное пространство к* $\mathcal{T}^n$ *в* $m \in \mathcal{T}^n$;

(iii) $Q_g = A(g(m)) \circ B$ *— линейный изоморфизм* $Q_g : T_m\mathcal{T}^n \to T_{g(m)}\mathcal{T}^n$, *где* $g \in D^s$ *и* $m \in \mathcal{T}^n$.

Оператор Q_e является отличным от правого сдвига отображением, которое взаимно однозначно отображает любое касательное пространство к группе на касательное пространство в единице e. Поэтому, кроме правоинвариантных векторных полей, на $D^s(\mathcal{T}^n)$ имеется еще один класс полей, обладающих свойством инвариантности — на этот раз относительно действия операторов Q. Мы называем эти поля параллельными.

Определение 2. *Векторное поле* X *на* $D^s(\mathcal{T}^n)$ *называется параллельным, если в каждой точке* $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ *вектор* $X_\eta = Q_\eta X_e$, *где* $X_e \in T_eD^s(\mathcal{T}^n)$.

Отметим, что параллельное векторное поле X является инвариантным относительно Q_θ для любого $\theta \in D^s(\mathcal{T}^n)$.

На $D^s(\mathcal{T}^n)$ вводится сильная риманова метрика, например, так же, как в [1, 2]. Через $dist(\eta, \theta)$ мы обозначим риманово расстояние между η и θ (т.е. инфимум длин кривых, соединяющих η и θ). Введем на касательном расслоении $TD^s(\mathcal{T}^n)$ расстояние d формулой

$$d\left(\left(X(\eta)\right),\left(Y(\theta)\right)\right) = \\ = dist(\eta,\theta) + \left\|Q_eX(\eta) - Q_eY(\theta)\right\|, \tag{1}$$

где норма в $T_eD^s(\mathcal{T}^n)$ порождена сильной римановой метрикой. Кроме того, мы будем использовать расстояние между указанными векторами в $\mathbb{R}^k$ после вложения. Это расстояние мы будем обозначать $\left\|iX(\eta) - iY(\theta)\right\|$.

Для указанных метрик $dist$, d и нормы $\left\|\cdot\right\|$ в $T_eD^s(\mathcal{T}^n)$ мы будем рассматривать их меры некомпактности Куратовского, которые обозначим α_{dist}, α_d и $\alpha_{\|\cdot\|}$, соответственно. Мы отсылаем читателя, например, к [3], где даны определения мер некомпактности и уплотняющих операторов, а также подробно описана соответствующая теория.

Основной целью статьи является исследование многозначных векторных полей и дифференциальных включений на группах диффеоморфизмов плоского n-мерного тора с использованием понятия параллельности. Изучаются свойства типа непрерывности многозначных векторных полей. В терминах операторов параллельного переноса найдены условия, при которых многозначное векторное поле является уплотняющим. На этой основе получены теоремы существования решений для дифференциальных включений на указанных группах диффеоморфизмов.

Определения и основные факты теории многозначных отображений и дифференциальных включений можно найти в [4].

2. СВОЙСТВА МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ТИПА НЕПРЕРЫВНОСТИ

Определение 3. *Многозначным векторным полем* $\tilde{X}$ *на* $D^s(\mathcal{T}^n)$ *назовем отображение* $\tilde{X} : D^s(\mathcal{T}^n) \to P\left(TD^s(\mathcal{T}^n)\right)$, *где* $P\left(TD^s(\mathcal{T}^n)\right)$ *— совокупность всех непустых подмножеств* $T\ D^s(\mathcal{T}^n)$ *такое, что для любой точки* $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ *выполнено* $\pi(\tilde{X}(\eta)) = \eta$.

Рассмотрим $T_eD^s(\mathcal{T}^n)$. Пусть в $T_eD^s(\mathcal{T}^n)$ задано непустое множество векторов X. Определим многозначное векторное поле $\hat{X}$ на $D^s(\mathcal{T}^n)$ как множество всевозможных параллельных переносов множества X. Таким образом мы определим многозначное отображение $\hat{X} : D^s(\mathcal{T}^n) \to P\left(TD^s(\mathcal{T}^n)\right)$ которое мы называем *многозначным параллельным векторным полем.*

Теорема 1. *Многозначное параллельное векторное поле* $\hat{X}$ *является полунепрерывным снизу.*

Доказательство. Пусть $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ и пусть $V \subset TD^s$ — открытое множество в $\mathrm{T}\,D^s(\mathcal{T}^n)$ такое, что $\hat{X}(\eta) \bigcap V \neq \varnothing$. Так как это пересечение не пусто, то в нем существует точка $\hat{x}(\eta)$, являющаяся в свою очередь значением однозначного векторного поля $\hat{x}$ в точке η. Тогда в силу непрерывности $\hat{x}$ существует такая окрестность $W(\eta) \subset D^s(\mathcal{T}^n)$ точки η что для любой точки $\xi \in W(\eta)$ выполняется включение $\hat{x}\left(\xi\right) \in V$. Но $\hat{x}\left(\xi\right) \in \hat{X}\left(\xi\right)$, то есть $\hat{X}\left(\xi\right) \bigcap V \neq \varnothing$, что и доказывает полунепрерывность снизу этого векторного поля. $\square$

Теорема 2. *Пусть множество* X *компактно. Тогда соответствующее многознач-*

ное параллельное векторное поле $\hat{X}$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Так как множество X компактно, а параллельный перенос непрерывен, то для любой точки $\eta \in D^s$ множество $\hat{X}(\eta)$ также компактно.

Пусть $V \subset TD^s(\mathcal{T}^n)$ открытое множество такое, что $\hat{X}(\eta) \subset V$.

Рассмотрим отображение $F : D^s(\mathcal{T}T^n) \times T_e D^s(\mathcal{T}^n) \to TD^s(\mathcal{T}^n)$ заданное формулой $F(\eta, x) = \hat{x}(\eta)$, где $\hat{x}$ — параллельное векторное поле, порожденное вектором $x \in T_e D^s$. Это отображение непрерывно по совокупности переменных, что следует из построения. Очевидно, что $F(\eta, X) = \hat{X}(\eta)$. Выберем теперь в качестве окрестности точки $\hat{E}(\eta) \in TD^s(\mathcal{T}^n)$ множество V. Тогда в силу непрерывности отображения F по совокупности переменных существует такая окрестность $U(\eta, x) \subset D^s \times T_e D^s(\mathcal{T}^n)$, что для любой пары $(\zeta, y) \in U(\eta, x)$ выполнено $F(\zeta, y) = \hat{y}(\zeta) \in V$. Так как окрестность $U(\eta, x)$ есть открытое множество, то в него входит меньшая окрестность, которая является прямым произведением соответствующих окрестностей этих точек. Поэтому без ограничения общности будем считать, что окрестность $U(\eta, x)$ и есть прямое произведение окрестностей $W^x(\eta) \subset D^s, W_x \subset T_e D^s(\mathcal{T}^n)$. Построим аналогичные окрестности $W^y(\eta) \subset D^s$, $W_y \subset T_e D^s(\mathcal{T}^n)$ для каждой точки $y \in X$. Система окрестностей $Q_\eta W_y$ будет являться покрытием множества $\hat{X}(\eta)$. Так как X и $\hat{X}(\eta)$ являются компактными множествами, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Множества входящие в это покрытие обозначим $Q_\eta W_1$, $Q_\eta W_2$, $\ldots$, $Q_\eta W_k$, а соответствующие им окрестности точки η — через W^1, W^2, $\ldots$, W^k. Рассмотрим теперь окрестность $\hat{W}(\eta) = W^1 \bigcap W^2 \bigcap \ldots \bigcap W^k$. Из построения множеств $W_x(\eta)$, $W^x(\eta)$ следует, что для любого $\theta \in W_x(\eta)$ и для любого $y \in W^x(\eta)$ выполнено включение $\hat{y}(\theta) \in V$. Следовательно для любого $\theta \in \hat{W}$ и для любого $y \in X \subset W_1 \bigcup W_2 \bigcup \ldots \bigcup W_k$ выполнено включение $\hat{y}(\theta) \in V$. Однако по построению $\hat{X}(\theta) = \{Q_\theta y \,/\, y \in X\}$. Таким образом построена окрестность $\hat{W}(\eta)$ точки η такая, что для любого $\theta \in \hat{W}$ выполнено включение $\hat{X}(\theta) \subset V$. ☐

Следствие 3. *Пусть множество X компактно. Тогда соответствующее многозначное параллельное векторное поле $\hat{X}$ непрерывно в том смысле, что оно полунепрерывно и сверху, и снизу.*

Теорема 4. *Пусть множество $X \in T_e D^s(\mathcal{T}^n)$ замкнуто. Тогда отображение $\hat{X} : D^s(\mathcal{T}^n) \to P(TD^s(\mathcal{T}^n))$ является непрерывным по Хаусдорфу, то есть непрерывным относительно метрики Хаусдорфа на пространстве замкнутых подмножеств T $D^s(\mathcal{T}^n)$.*

Доказательство. Рассмотрим на $D^s(\mathcal{T}^n)$ расстояние d. Для любых двух точек $\eta, \theta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ уклонение множеств $\hat{X}(\eta)$, $\hat{X}(\theta)$ в метрике Хаусдорфа, порожденной данной метрикой, будет равно сумме расстояния между точками η, θ и уклонения параллельных сдвигов этих множеств в $T_e D^s(\mathcal{T}^n)$. Но последнее уклонение очевидно равно нулю, так как по построению при параллельном переносе в $T_e D^s(\mathcal{T}^n)$ оба этих множества отображаются в одно и тоже множество X. Таким образом для отображения $\hat{X}$ уклонение двух множеств X_η, X_θ равно расстоянию между точками η, θ на D^s. Отсюда следует непрерывность отображения $\hat{X}$ как однозначного в метрике Хаусдорфа, то есть оно является непрерывным по Хаусдорфу. ☐

Теорема 5. *Многозначное (непараллельное) векторное поле $\hat{Y}$ на $D^s(\mathcal{T}^n)$ непрерывно по Хаусдорфу тогда и только тогда, когда непрерывно соответствующее отображение $Y = Q_e \hat{Y}(\eta) : D^s(\mathcal{T}^n) \to T_e D^s(\mathcal{T}^n)$.*

Доказательство. Пусть векторное поле $\hat{Y}$ непрерывно по Хаусдорфу. Это означает, для любой точки $\eta \in D^s$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что из того, что $dist(\eta, \theta) < \delta$ следует, что $d(\hat{Y}(\eta), \hat{Y}(\theta)) < \varepsilon$. Рассмотрим $\eta \in D^s$ и выберем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим δ, которая существует для этого ε в окрестности точки η. По построению метрики из того, что $dist(\eta, \theta) < \delta$ следует, что $d(Y(\eta), Y(\theta)) < \varepsilon$. Пусть теперь отображение $Y = Q_e \hat{Y}(\eta)$ непрерывно по Хаусдорфу. Это означает, для любой точки $\eta \in D^s$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что из того что $dist(\eta, \theta) < \delta$ следует, что $d(Y(\eta), Y(\theta)) < \varepsilon$. Рассмотрим $\eta \in D^s$ и выберем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим δ, которое существует для $\frac{\varepsilon}{2}$ такое, что из того что $dist(\eta, \theta) < \delta$ следует, что $d(Y(\eta), Y(\theta)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда из того, что $dist(\eta, \theta) < \delta$ следует, что $d\left(\hat{Y}(\eta), \hat{Y}(\theta)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \delta < \varepsilon$. □

Теорема 6. *Для того, чтобы многозначное (непараллельное) векторное поле $\hat{Y}$ на $D^s(\mathcal{T}^n)$ было полунепрерывно снизу необходимо и достаточно, чтобы соответствующее отображение $Y = Q_e\hat{Y}(\eta) : D^s(\mathcal{T}^n) \to T_eD^s(\mathcal{T}^n)$ было полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Пусть векторное поле $\hat{Y}$ полунепрерывно снизу. Это означает, что для любой точки $\eta \in D^s$ и произвольного множества $V \subset TD^s(\mathcal{T}^n)$ таких, что $\hat{Y}(\eta) \bigcap V \neq Ш$, существует окрестность $U(\eta) \subset D^s(\mathcal{T}^n)$ точки η такая, что для любой $\theta \in U(\eta)$ выполнено $\hat{Y}(\theta) \bigcap V \neq \varnothing$.

Покажем, что $Y = Q_e\hat{Y}(\eta) : D^s(\mathcal{T}^n) \to$ $\to T_eD^s(\mathcal{T}^n)$ полунепрерывно снизу. Зафиксируем произвольную точку $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ и пусть открытое множество $W \subset T_eD^s(\mathcal{T}^n)$ таково, что выполнено $W \bigcap Y(\eta) \neq \varnothing$. Выберем некоторую окрестность $U(\eta)$ точки η. Рассмотрим прямое произведение $\hat{W} = U(\eta) \times W \subset TD^s(\mathcal{T}^n)$. В силу того, что $W \bigcap Y(\eta) \neq \varnothing$ следует, что $\hat{W} \bigcap \hat{Y}(\eta) \neq \varnothing$. В силу полунепрерывности снизу многозначного векторного поля $\hat{Y}$ существует такая окрестность $\hat{U}(\eta)$ точки η, что для любого $\theta \in \hat{U}(\eta)$ выполнено $\hat{W} \bigcap \hat{Y}(\theta) \neq \varnothing$. Тогда по построению для этой окрестности также выполнено $W \bigcap Y(\theta) \neq \varnothing$.

Обратно, пусть отображение Y полунепрерывно снизу. Зафиксируем произвольную точку $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$. Пусть множество $W \subset TD^s(\mathcal{T}^n)$ таково, что выполнено $\hat{Y}(\eta) \bigcap W \neq \varnothing$. Выберем точку $y \in \hat{Y}(\eta) \bigcap W$. Так как базой топологии $TD^s(\mathcal{T}^n)$ являются прямые произведения открытых множеств из $D^s(\mathcal{T}^n)$ и $T_eD^s(\mathcal{T}^n)$, в множестве W содержится подмножество $\hat{W}$ такое, что $y \in \hat{W} \subset W$ и $\hat{W} = U \times V$ для некоторых открытых множеств $U \subset D^s(\mathcal{T}^n), V \subset T_eD^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда в силу полунепрерывности снизу отображения Y для точки $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ существует такая окрестность $Q(\eta)$, что для любого $\theta \in Q(\eta)$ выполнено $Y(\theta) \in V$. Отсюда по построению множества W следует, что для любого $\theta \in Q(\eta)$ также выполнено $\hat{Y} \bigcap W \neq \varnothing$. □

Теорема 7. *Если многозначное (непараллельное) векторное поле $\hat{Y}$ на $D^s(\mathcal{T}^n)$ полунепрерывно сверху, то и соответствующее ему отображение $Y = Q_e\hat{Y}(\eta) : D^s(\mathcal{T}^n) \to$ $\to T_eD^s(\mathcal{T}^n)$ также полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Пусть $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$. Пусть $V \subset T_eD^s(\mathcal{T}^n)$ таково, что $Y(\eta) \subset V$. Выберем произвольную окрестность $U(\eta)$ точки η в $D^s(\mathcal{T}^n)$. Рассмотрим прямое произведение $\hat{V} = U(\eta) \times V \subset TD^s(\mathcal{T}^n)$. Из того, что $Y(\eta) \subset V$ следует, что $\hat{Y}(\eta) \subset \hat{V}$. В силу полунепрерывности сверху многозначного векторного поля $\hat{Y}$ существует такая окрестность $\hat{U}(\eta)$ точки η, что для любого $\theta \in \hat{U}(\eta)$ выполнено $\hat{Y}(\theta) \subset \hat{W}$. Тогда по построению для этой окрестности также выполнено $Y(\theta) \subset W$. □

Теорема 8. *Пусть задано многозначное (непараллельное) векторное поле $\hat{Y}$ на $D^s(\mathcal{T}^n)$. Если соответствующее ему отображение*

$$Y = Q_e\hat{Y}(\eta) : D^s(\mathcal{T}^n) \to T_eD^s(\mathcal{T}^n)$$

полунепрерывно сверху и имеет компактные образы, то $\hat{Y}$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Пусть $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ и открытое множество $W \subset TD^s(\mathcal{T}^n)$ таково, что выполнено $\hat{Y}(\eta) \subset W$. Рассмотрим произвольную точку $\zeta \in \hat{Y}(\eta)$. В силу того, что базой топологии $TD^s(\mathcal{T}^n)$ являются прямые произведения открытых множеств из $D^s(\mathcal{T}^n)$ и $T_eD^s(\mathcal{T}^n)$, существует окрестность $Q(\zeta)$ точки ζ, такая, что $Q(\zeta) = U_\zeta \times V_\zeta$, где $U_\zeta \subset D^s(\mathcal{T}^n)$ — окрестность точки η и $V_\zeta \subset T_eD^s(\mathcal{T}^n)$. Таким образом, построили покрытие множества $\hat{Y}(\eta)$ открытыми множествами вида $Q(\zeta) = U_\zeta \times V_\zeta$. В силу того, что отображение Y имеет компактные образы, легко видеть, что и образы отображения $\hat{Y}$ так же будут компактны. Таким образом из построенного покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Обозначим его $Q_1, \ldots, Q_k$. Соответственно, каждое множество $Q_i = U_i \times V_i$. Рассмотрим теперь множества $\tilde{U} = U_1 \bigcap, \ldots, \bigcap U_k$, $\tilde{V} = V_1 \bigcup, \ldots, \bigcup V_k$. Тогда в силу того что отображение Y полунепрерывно сверху, существует такая окрестность $\hat{U} \subset \tilde{U}$ точки η, что для любого $\theta \in \hat{U}$ выполнено $Y(\theta) \subset \tilde{V}$ и, следовательно, $\hat{Y}(\theta) \subset W$. □

3. СВОЙСТВА УПЛОТНЯЕМОСТИ

Лемма 9. *Пусть многозначное (непараллельное) векторное поле*

$$\hat{Y} : [0, l] \times D^s(\mathcal{T}^n) \to TD^s(\mathcal{T}^n)$$

удовлетворяет верхнему условию Каратеодори и таково, что при почти всех t для отображения $Y : D^s(\mathcal{T}^n) \to T_e D^s(\mathcal{T}^n)$ вида $Y(t,\eta) = Q_e \hat{Y}(t,\eta)$ является k-ограниченным относительно мер некомпактности α_{dist} и $\alpha_{\|\|}$ с коэффициентом $g(t)$. Тогда векторное поле $\hat{Y}$ является k-ограниченным относительно мер некомпактности α_{dist} и α_d с константой $1+g(t)$.

Доказательство. Зафиксируем $t \in [0,l]$. По условию леммы для любого $\Omega \subset D^s(\mathcal{T}^n)$, для которого конечно $\alpha_{dist}(\Omega)$, выполнено $\alpha_{\|\|}(Y(t,\Omega)) \le g(t)\alpha_{dist}(\Omega)$. Пусть $\alpha_{dist}(\Omega) = \xi$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие Ω множествами Θ_i диаметром $\xi + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда из условия леммы следует, что существует конечное покрытие множества $Y(t,\Omega) \subset T_e D^s(\mathcal{T}^n)$ множествами G_j диаметром $g(t)\xi + \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим множество $Q_\eta Y(t,\Omega) \subset T_\eta D^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда множество $\Gamma = \bigcup_{\eta\in\Omega} Q_\eta Y(t,\Omega)$ имеет естественную структуру прямого произведения $\Omega \times Y(t,\Omega)$. Рассмотрим множество $G_{ij} = \bigcup_{\eta\in\Theta_i} Q_\eta G_j$. Набор множеств G_{ij} образует конечное покрытие множества Γ и диаметр каждого такого множества относительно расстояния d не превосходит $\xi + g(t)\xi + \varepsilon$. Отсюда следует, что $\alpha_d(\Gamma) \le (1+g(t))\xi$. Так как $\hat{Y}(t,\Omega) \subset \Gamma$, то при почти всех t векторное поле $\hat{Y}$ является k-ограниченным относительно мер некомпактности α_d с коэффициентом $1+g(t)$. □

Теорема 10. *Для любого вектора $X \in TD^s(\mathcal{T}^n)$ и для любого числа $C > 0$ существует окрестность вектора $X \in TD^s(\mathcal{T}^n)$ и числа $A, K > 0$ такие, что для любых Y, Z из этой окрестности выполнено $\|TiY - TiZ\| \le$ $\le (1 + A + (C + \|X\|)K)\, d(Y,Z)$.*

Это утверждение доказано как [5, Теорема 1].

Теорема 11. *Пусть многозначное (непараллельное) векторное поле с выпуклыми образами $\hat{Y} : [0,l] \times D^s(\mathcal{T}^n) \to TD^s(\mathcal{T}^n)$ удовлетворяет верхнему условию Каратеодори и таково, что при почти всех t для отображения $Y : [0,l] \times D^s(\mathcal{T}^n) \to T_e D^s(\mathcal{T}^n)$ вида $Y(t,\eta) = Q_e \hat{Y}(t,\eta)$ и для любого ограниченного множества $\Omega \subset D^s(\mathcal{T}^n)$ выполнено неравенство $\alpha_{\|\|}(X(t,\Omega)) \le g(t)\alpha_{dist}(\Omega)$. Тогда продолжение $\bar{X}$ векторного поля X на трубчатую окрестность U обладает свойством: при почти всех t для любой точки $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ и для любого числа $C > 0$ существуют числа $A, K > 0$ и окрестность D точки η в $H^s(T^n, \mathbb{R}^k)$ на которой $\bar{X}$ k-ограничено относительно меры некомпактности Куратовского с коэффициентом $2(1+g(t))(1 + A + (C + \|X(t,\eta)\|)K)$ по норме в пространстве $H^s(T^n, \mathbb{R}^k)$.*

Доказательство. Зафиксируем $t \in [0,l]$. Выберем произвольную точку $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ и число $\tilde{N} > 0$. Из полунепрерывности сверху поля F при заданном t следует, что существует окрестность точки η такая, что для любого ξ из этой окрестности $\|F(t,\xi)\| < \|F(t,\eta)\| + C$. Выберем константы A, K и окрестность $V(F(t,\eta))$ как и в доказательстве теоремы 10. По [6, теорема 1.4] существует окрестность $D \subset U$ точки η такая, что на D ретракция r липшицева с константой 2 относительно нормы в объемлющем пространстве и расстояния $dist$. Без ограничения общности можно считать, что $r(D) \subset V$. Тогда утверждение теоремы следует из теоремы 10 и леммы 9. □

Теорема 12. *Пусть $\hat{Y}$ — многозначное векторное поле на $D^s(\mathcal{T}^n)$, такое же как в теореме 11. Пусть функция $g(t)$ интегрируема с квадратом на $[0,l]$. Выберем точку $\eta_0 \in D^s(\mathcal{T}^n)$. Пусть на замыкании $\bar{D}$ окрестности D этой точки, где D из теоремы 11, выполняется оценка $\|\hat{Y}(t,\xi)\| < f(t)$, $\xi \in \bar{D}$, где $f(t) > 0$ — числовая функция, интегрируемая с квадратом на $[0,l]$. Тогда задача Коши для включения $\dot{\eta}(t) \in \hat{Y}(t,\eta)$, с начальными условием $\eta(0) = \eta_0$ имеет решение на достаточно малом промежутке.*

Доказательство. Пусть $\bar{Y}$ — продолжение поля $Ti\hat{Y}$ на трубчатую окрестность, описанное выше. Из условий теоремы следует, что многозначное векторное поле $\bar{X}(t)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори. В условиях теоремы функция

$$2(1+g(t))(1 + A + (C + \|X(t,\eta)\|)K) > 0$$

интегрируема на $[0,l]$. Тогда из теоремы 11 следует, что для $\bar{Y}$ выполнены условия [6, теорема 2.4], следовательно решение $\dot{\eta}(t) = \bar{Y}(t, \eta(t))$, $\eta(0) = \eta_0$ в D существует на достаточно малом промежутке. Аналогично доказательству [6, теорема 2.4] устанавливается, что это решение принадлежит $D^s(\mathcal{T}^n)$. $\square$

Теорема 13. *Пусть* $\hat{X}$ *— многозначное параллельное векторное поле на* $D^s(\mathcal{T}^n)$, *полученное параллельными переносами компактного выпуклого множества* $X \subset T_e D^s(\mathcal{T}^n)$. *Тогда для любого* $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ *на некотором промежутке* $[0, \varepsilon(\eta))$ *существует решение дифференциального включения* $\dot{\eta}(t) \in \hat{X}(\eta(t))$ *с начальным условием* $\eta(0) = \eta$.

Поскольку для параллельного многозначного векторного поля $\hat{X}$ соответствующее отображение $Q_e \hat{X} : D^s(\mathcal{T}^n) \to T_e D^s(\mathcal{T}^n)$ имеет постоянное компактное значение X, то Теорема 13 вытекает из Теоремы 8 и Теоремы 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эбин Д.* Группы диффеоморфизмов и движение несжимаемой жидкости / Д. Эбин, Дж. Марсден // Математика (сб. переводов). — 1973. — Т. 17, № 5. — С. 142—167; № 6. — С. 111—146.

2. *Гликлих Ю. Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю. Е. Гликлих. — М.: Комкнига, 2005. — 416 с.

3. *Ахмеров Р. Р.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, А. Е. Родкина, Б. Н. Садовский. — Новосибирск: Наука, 1986. — 266 с.

4. *Борисович Ю. Г.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений (2-е издание, исправленное и дополненное) / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: Либоком, 2011. — 224 с.

5. *Gliklikh A. Y.* On existence of integral curves of continuous right-invariant vector fields of groups of diffeomorphisms / A. Y. Gliklikh // Fixed point theory. — 2005. — Vol. 6. — No. 2. — P. 279—284.

6. *Gliklikh Yu. E.* Tubular neighbourhoods of Hilbert manifolds and differential equations of Caratheodory type on groups of diffeomorphisms / Yu. E. Gliklikh, V. V. Obukhovskii // New Approaches in Nonlinear Analysis (T. M. Rassias, Ed.). — Palm Harbor, FL.: Hadronic Press.—1999. — P. 109—123.

Гликлих Юрий Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и топологических методов анализа. Воронежский государственный университет

E-mail: yeg@math.vsu.ru

Тел.: 220-86-41

Фильчаков Сергей Владимирович — ст. преподаватель кафедры информационных технологий. Курский филиал Российского государственного торгово-экономического университета

E-mail:sergeifil@gmail.com

Тел.: (4712) 54-88-33

Gliklikh Yu. E. — Doctor of physical and masthematical sciences, Voronezh State University, professor of the Department of algebra and topological methods of analysis

E-mail: yeg@math.vsu.ru

Tel.: 220-86-41

Filchakov S. V. — Kursk branch of Russian State Trade-Economicak Universityt, senior lecturer of the department of Information Technologies

E-mail:sergeifil@gmail.com

Tel.: (4712) 54-88-33