УДК:517.988.6

ОБ УПЛОТНЯЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СЮРЪЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Б. Д. Гельман, С. Н. Калабухова

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 17 июля 2010 г.

Аннотация: данная статья посвящена изучению разрешимости операторных уравнений, содержащих уплотняющие возмущения непрерывных линейных сюръективных операторов. В ней вводится понятие обратного образа меры некомпактности относительно линейного оператора, дается определение и приводятся примеры уплотняющих отображений относительно такого оператора. В статье доказываются теоремы о разрешимости уравнений, содержащих уплотняющие возмущения непрерывных линейных сюръективных операторов. В заключение статьи полученные теоремы применяются для изучения разрешимости одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной.
Ключевые слова: мера некомпактности; сюръективный оператор; уплотняющее отображение; дифференциальное уравнение.

Abstract: this article is devoted to study of solvability of operator equations containing condensing perturbations of continuous linear surjective operator. Notion of inverse image of a measure of noncompactness with respect to a linear operator is introduced. Definition and examples of condensing mappings relative to such operator are given. In this paper we prove theorems on the solvability of equations containing condensing perturbations of continuous linear surjective operators. In conclusion of the article obtained theorems are applied to studying of solvability of a class of ordinary differential equations, which can't be solved according to derivative.
Key words: a measure noncompactness, surjective operator; condensing map; differential equation.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известна теория уплотняющих отображений (как однозначных [1], так и многозначных [2]), которая находит многочисленные приложения в различных задачах современной математики. В работах [3], [4], [5], [6] изучались возмущения непрерывных отображений, уплотняющие относительно некоторой главной части. В этих работах устанавливалась гомотопическая классификация таких возмущений и строилась топологическая степень для новых классов векторных полей. Отметим работу [3] (и другие работы этого автора) в которой изучались возмущения, у которых главной частью являлся линейный фредгольмов оператор.

С другой стороны, в работах [7], [8] изучалась разрешимость уравнений вида $A(x) - f(x) = 0$, где A — произвольный непрерывный линейный сюръективный оператор, а f — вполне непрерывный оператор. Естественно возникает идея изучить уравнения такого же вида, но когда отображение f является уплотняющим относительно оператора A. Заметим также, что в этом случае гомотопическая классификация, построенная в работах [3], [4], [5], [6] оказывается неприменимой. Решению этой задачи и посвящена данная статья. В ней вводится понятие обратного образа меры некомпактности относительно линейного оператора, дается определение и приводятся примеры уплотняющих отображений относительно оператора. В ней также изучаются уравнения с уплотняющими возмущениями непрерывных линейных сюръективных операторов. В заключение статьи полученные теоремы применяются для изучения разрешимости одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной.

* Это исследование поддержено РФФИ: грант № 08-01-00192а

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЗАМКНУТЫХ СЮРЪЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор.

Определение 1. *Число*

$$\left\|A^{-1}\right\| = \sup_{y \in E_2}\left(\frac{\inf\{\left\|x\right\| \mid x \in E_1, A(x) = y\}}{\| y \|}\right) < \infty$$

называется нормой многозначного отображения A^{-1}.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления $\left\|A^{-1}\right\|$.

Пример 1. Пусть $C_{[a,b]}$ — пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[a,b]$ со значениями в банаховом пространстве E. Пусть $A : D(d) \subset C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ — оператор дифференцирования, $D(A)$ — множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Очевидно, что A является замкнутым сюръективным оператором. В работе [9] показано, что $\left\|A^{-1}\right\| = \frac{b-a}{2}$.

Пример 2. Хорошо известно, что если $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, то в множестве $D(A)$ можно рассмотреть норму графика $\left\|x\right\|_c = \left\|x\right\|_1 + c\left\|A(x)\right\|_2$. Множество $D(A)$ снабженное нормой $\left\|x\right\|_c$ является банаховым пространством. Обозначим его E. Тогда определен непрерывный линейный оператор $\tilde{A} : E \to E_2$, $\tilde{A}(x) = A(x)$. В силу определения нормы многозначного обратного оператора $\left\|A^{-1}\right\|$ и $\left\|\tilde{A}^{-1}\right\|$ связаны следующим соотношением: $\left\|\tilde{A}^{-1}\right\| = \left\|A^{-1}\right\| + c$.

Рассмотрим некоторые свойства многозначного отображения $A^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$, где

$$A^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid A(x) = y\}.$$

Если подпространство $Ker(A)$ не является дополняемым в пространстве E_1, то не существует линейного непрерывного оператора правого обратного к оператору A, однако имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *(i) Пусть y_0 — произвольная точка из пространства E_2, x_0 — произвольная точка из множества $A^{-1}(y_0)$, тогда для любого числа k, $\left\|A^{-1}\right\| < k$, существует непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*

1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\left\|x_0 - q(y)\right\| \le k\left\|y_0 - y\right\|$ для любого $y \in E_2$.

(ii) Для любого числа k, $\left\|A^{-1}\right\| < k$, существует непрерывное отображение $\tilde{q} : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:

1) $A(\tilde{q}(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\left\|\tilde{q}(y)\right\| \le k\left\|y\right\|$ для любого $y \in E_2$.

Доказательство этой леммы содержится, например, в [9].

3. МЕРА НЕКОМПАКТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПРЕРЫВНОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И УПЛОТНЯЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть E — банахово пространство, $P(E)$ — множество всех непустых подмножеств в E. Отображение $\psi : P(E) \to \Xi$, где Ξ — частично упорядоченное множество, называется мерой некомпактности в E, если $\psi(\overline{co}(\Omega)) = \psi(\Omega)$ для любого $\Omega \in P(E)$.

Мера некомпактности называется монотонной, если из $\Omega_0, \Omega_1 \in 2^E, \Omega_0 \subset \Omega_1$ следует $\psi(\Omega_0) \le \psi(\Omega_1)$.

Мера некомпактности называется несингулярной, если $\psi(a \cup \Omega) = \psi(\Omega)$ для любых $a \in E, \Omega \in P(E)$.

Мера некомпактности называется алгебраически полуаддитивной, если $\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \le \le \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$ для любых $\Omega_1, \Omega_2 \in P(E)$.

Мера некомпактности называется вещественной, если $\Xi = [0, +\infty)$.

Вещественная мера некомпактности называется правильной, если $\psi(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности множества Ω.

Распространенными примерами мер некомпактности, обладающими указанными выше свойствами, являются: мера некомпактности Хаусдорфа,

$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon \mid \varepsilon > 0, \Omega$ имеет конечную ε-сеть$\}$,

и мера некомпактности Куратовского,

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d \mid d > 0, \Omega = \bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i, diam(\Omega_i) < d, n \in N\}.$$

Определим понятие меры некомпактности множества относительно оператора.

Пусть E, E_0 — банаховы пространства. Пусть $A : E \to E_0$ — ограниченный линейный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ.

Рассмотрим отображение $\psi_A : P(E) \to R$, определенное следующим образом:

$$\psi_A(\Omega) = \psi(A(\Omega)).$$

Изучим свойства этого отображения.

1. *Это отображение является монотонным.*

Действительно, пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2$, тогда $\psi_A(\Omega_1) = \psi(A(\Omega_1)) \le \psi(A(\Omega_2)) = \psi_A(\Omega_2)$.

2. *Это отображение инвариантно относительно взятия выпуклой оболочки.*

В силу линейности отображения A имеем,

$$\psi_A(co(\Omega)) = \psi(A(co(\Omega))) =$$
$$= \psi(co(A(\Omega)) = \psi(A(\Omega)) = \psi_A(\Omega)$$

для любого $\Omega \in P(E)$.

3. $\psi_A(\overline{\Omega}) = \psi_A(\Omega)$ *для любого* $\Omega \in P(E)$.

Действительно, так как $A(\overline{\Omega}) \supset A(\Omega)$, то

$$\psi_A(\Omega) = \psi(A(\Omega)) = \psi(\overline{A(\Omega)}) \ge \psi(A(\overline{\Omega})) = \psi_A(\overline{\Omega}).$$

Так как в силу свойства 1 имеем противоположное неравенство, то это и доказывает свойство 3.

4. $\psi_A(a \cup \Omega) = \psi_A(\Omega)$ *для любых* $a \in E$, $\Omega \in P(E)$.

Действительно,

$$\psi_A(a \cup \Omega) = \psi(A(a \cup \Omega)) =$$
$$= \psi(A(a) \cup A(\Omega)) = \psi(A(\Omega)) = \psi_A(\Omega).$$

5. *Отображение* ψ_A *является алгебраически полуаддитивным, т.е.* $\psi_A(\Omega_1 + \Omega_2) \le \le \psi_A(\Omega_1) + \psi_A(\Omega_2)$ *для любых* $\Omega_1, \Omega_2 \in P(E)$.

Действительно,

$$\psi_A(\Omega_1 + \Omega_2) = \psi(A(\Omega_1 + \Omega_2)) \le$$
$$\le \psi(A(\Omega_1)) + \psi(A(\Omega_2)) = \psi_A(\Omega_1) + \psi_A(\Omega_2).$$

6. *Если оператор* A *является сюръективным, то* $\psi_A(\Omega) = 0$, *тогда и только тогда, когда существует такой компакт* $K \subset E$, *что* $\Omega \subset K + Ker(A)$.

Действительно, если $\Omega \subset K + Ker(A)$, то $A(\Omega) \subset A(K)$. Следовательно, $\psi_A(\Omega) = = \psi(A(\Omega)) = 0$.

Пусть теперь $\psi_A(\Omega) = 0$, тогда $\psi(A(\Omega)) = 0$. В силу того, что мера некомпактности ψ является правильной, существует компакт $K_1 \supset A(\Omega)$. Рассмотрим множество $K = q(K_1)$, где q — непрерывное отображение, правое обратное к отображению A (см. лемму 1). Тогда $\Omega \subset A^{-1}(K_1) = K + Ker(A)$. Свойство доказано.

Таким образом, отображение ψ_A является мерой некомпактности. Эту меру некомпактности ψ_A будем называть *обратным образом меры некомпатности* ψ *при действии оператора* A.

Пусть $A : E \to E_1$ — линейный непрерывный сюръективный оператор, $f : D(f) \subset E \to E_0$ — непрерывное отображение.

Определение 2. *Отображение* f *называется* (A, ψ)*-уплотняющим, если для любого множества* $Q \subset D(f)$ *из неравенства* $\psi(f(Q)) \ge \psi_A(Q)$ *вытекает равенство* $\psi_A(Q) = 0$.

Замечание. Если $D(f)$ является замыканием ограниченного открытого множества, то определение 2 совпадает с определением A-уплотняющего отображения, данного в [6].

Пусть $f : D(f) \subset E \to E_0$ является (A, ψ)-уплотняющим отображением, $q : E_0 \to E$ — непрерывное отображение, правое обратное к отображению A. Пусть множество $Y = q^{-1}(A(D(f))) \bigcap D(f)$ непусто, $X = A(Y)$. Рассмотрим непрерывное отображение $g : X \to E_0$, $g(x) = f(q(x))$.

Предложение 1. *Если* f *является* (A, ψ)*-уплотняющим отображением, то* g *— уплотняющее отображение.*

Доказательство. Пусть множество $\Omega \subset X$ и $\psi(g(\Omega)) \ge \psi(\Omega)$. Тогда $\psi(f(\Omega_1)) \ge \psi(\Omega)$, где $\Omega_1 = q(\Omega)$. Так как q является правым обратным к отображению A, то

$$\psi(f(\Omega_1)) \ge \psi(\Omega) = \psi(A(\Omega_1)) = \psi_A(\Omega_1).$$

Так как f является (A, ψ)— уплотняющим отображением, то $\psi_A(\Omega_1) = 0$. Тогда

$$\psi(\Omega) = \psi_A(\Omega_1) = 0.$$

Следовательно, отображение g является уплотняющим.

Рассмотрим пример (A, ψ)-уплотняющего отображения. Пусть X — ограниченное подмножество в E, $A : E \to E_0$ — ограниченный линейный оператор. Пусть $f_1 : X \to E_0$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию:

существует такое число $k \in (0,1)$, *что для любых точек* $x_1, x_2 \in X$ *справедливо неравенство*

$$\left\| f_1(x_1) - f_1(x_2) \right\| \le k \left\| A(x_1) - A(x_2) \right\|, \qquad (1)$$

т.е. f_1 является A-сжимающим отображением. Примером такого отображения является отображение $f_1 = q \circ A$, где $q : E_0 \to E_0$ — сжимающее отображение.

Пусть $f_2 : X \to E_0$ — вполне непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $f = f_1 + f_2$. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Куратовского α.

Предложение 2. *При сделанных предположениях отображение f является (A,α)-уплотняющим отображением.*

Доказательство. Пусть множество $Q \subset X$ и

$$\alpha(f(Q)) \geq \alpha_A(Q). \tag{2}$$

Пусть ε — произвольное число большее $\alpha_A(Q)$. Тогда существует конечное число множеств $\{N_i\}_{i=1}^n$, $N_i \subset A(Q)$, таких, что $\bigcup_{i=1}^n N_i = A(Q)$ и $diam(N_i) < \varepsilon$ для любого $i = 1,2,...,n$. Пусть $Q_i = A^{-1}(N_i) \cap Q$. Обозначим $M_i = f_1(Q_i)$. Вычислим диаметр множества M_i.

$$diam(M_i) = \sup_{u,v \in M_i} \|u - v\| = \sup_{x,y \in Q_i} \|f_1(x) - f_1(y)\| \leq$$
$$\leq \sup_{x,y \in Q_i} k\|A(x) - A(y)\| \leq$$
$$\leq k \sup_{a,b \in N_i} \|a - b\| = k diam(N_i) < k\varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > \alpha_A(Q)$ существует конечное число множеств M_i, $i = 1,2,...,n$, таких, что $\bigcup_{i=1}^n M_i = f_1(Q)$ и $diam(M_i) < k\varepsilon$. Следовательно,

$$k\alpha_A(Q) \geq \alpha(f_1(Q)). \tag{3}$$

Так как множество X ограничено и отображение f_2 — вполне непрерывно, то $\alpha(f_2(\Omega)) = 0$ для любого множества $\Omega \subset X$.

В алгебраической полуаддитивности меры некомпактности α имеем:

$$\begin{aligned}\alpha(f_1(Q)) = \alpha(f_1(Q)) + \alpha(f_2(Q)) \geq \\ \geq \alpha(f(Q)) \geq \alpha_A(Q).\end{aligned} \tag{4}$$

Сравнивая неравенства (3) и (4) получаем, что $\alpha_A(Q) = 0$. Утверждение доказано.

Рассмотрим еще один пример (A,ψ)-уплотняющего отображения.

Пусть $A : E \to E_0$ — непрерывный линейный сюръективный оператор, X — ограниченное подмножество в E, $g : X \times E_0 \to E_0$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) существует такое число $k \in (0,1)$, что для любой точки $x \in X$ и любых $y_1, y_2 \in E_0$ справедливо неравенство $\|g(x,y_1) - g(x,y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$;

(2) для любого $y \in E_0$ отображение $g(\cdot,y) : X \to E_0$ является вполне непрерывным.

Рассмотрим отображение $f : X \to E_0$, $f(x) = g(x, A(x))$. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ.

Предложение 3. *При сделанных предположениях отображение f является (A,χ)-уплотняющим отображением.*

Доказательство. Докажем, что для любого множества $Q \subset X$ справедливо неравенство $\chi(f(Q)) \leq k\chi_A(Q)$, откуда и следует доказываемое утверждение. Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ — конечная $(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$-сеть множества $A(Q)$. Тогда множество $S_1 = g(Q \times S) = \bigcup_{i=1}^n g(Q \times s_i)$ — относительно компактное множество, т.к. оно является объединением конечного числа относительно компактных множеств. Покажем теперь, что множество S_1 является $k(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$-сетью в $f(Q)$.

Пусть z — произвольная точка из $f(Q)$, тогда существует такая точка $x \in Q$, что $z = g(x, A(x))$. Пусть точка $s_{i_0} \in S$ такая, что $\|A(x) - s_{i_0}\| < \chi(A(Q)) + \varepsilon$. Рассмотрим точку $\tilde{z} = g(x, s_{i_0}) \in S_1$. Тогда

$$\|z - \tilde{z}\| = \|g(x, A(x)) - g(x, s_{i_0})\| \leq$$
$$\leq k\|A(x) - s_{i_0}\| < k(\chi(A(Q)) + \varepsilon),$$

т.е. $\chi(f(Q) < k(\chi(A(Q)) + \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\chi(f(Q) \leq k(\chi(A(Q)) = k\chi_A(Q).$$

Утверждение доказано.

4. ОБ УРАВНЕНИЯХ С (A,ψ)-УПЛОТНЯЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Пусть E, E_0 — банаховы пространства. Пусть $A : E \to E_0$ — ограниченный линейный сюръктивный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ. Пусть $x_0 \in E$ — некоторая точка, $B_R[x_0]$— замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $f : B_R[x_0] \to E_0$ — непрерывное (A,ψ)— уплотняющее отображение.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) = f(x). \tag{5}$$

Пусть $N(A,f)$ — множество решений этого уравнения.

Теорема 1. *Если существует такое число $k > \|A^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\|A(x_0) - f(x)\| \leq \frac{R}{k},$$

то уравнение (5) имеет решение.

Доказательство. Пусть $q : E_2 \to E$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\|x_0 - q(y)\| \le k\|A(x_0) - y\|$ для любого $y \in E_2$.

Такое отображение всегда существует в силу леммы 1.

Обозначим $y_0 = A(x_0)$ и рассмотрим шар

$$B_{\frac{R}{k}}[y_0] = \left\{ y \in E_2 \mid \|y - y_0\| \le \frac{R}{k} \right\}.$$

Пусть отображение $p : B_{\frac{R}{k}}[y_0] \to E_2$, определено условием $p(y) = f(q(y))$. Проверим, что это отображение корректно определено. Для этого оценим $\|x_0 - q(y)\|$ и покажем, что это число не превосходит R. Действительно,

$$\|x_0 - q(y)\| = k\|y_0 - y\| \le R.$$

Очевидно, что отображение p является непрерывным. Покажем, что оно является уплотняющим отображением относительно меры некомпактности ψ. Это вытекает из того, что f является A — уплотняющим и q является правым обратным отображением к A.

Покажем, что отображение $p : B_{\frac{R}{k}}[y_0] \to$ $\to B_{\frac{R}{k}}[y_0]$.

Действительно,

$$\|y_0 - p(y)\| = \|y_0 - f(q(y))\| \le \frac{R}{k},$$

так как $q(y) \in B_R[x_0]$.

Тогда уплотняющее отображение $p : B_R[y_0] \to B_R[y_0]$. Следовательно, по теореме Садовского (см., например, [1]) это отображение имеет неподвижную точку, которая и будет решением уравнения (5).

Рассмотрим следствие из теоремы 1.

Пусть $f : E \to E_0$ — непрерывное (A, ψ)-уплотняющее отображение.

Следствие 1. *Если выполнены следующие условия:*

(i) существуют такие константы $c > 0$ и $d > 0$ что для любой точки $x \in E$ справедливо неравенство $\|f(x)\| < c\|x\| + d$;

(ii) $c\| \, \|A^{-1} < 1$.

Тогда уравнение (5) имеет решение.

Доказательство. Для доказательства найдем шар $B_R[0]$ и число $k > \|A^{-1}\|$ такие, чтобы для любой точки $x \in B_R[0]$ было выполнено неравенство

$$\|f(x)\| \le \frac{R}{k}. \qquad (6)$$

Пусть k произвольное число удовлетворяющее неравенству

$$\|A^{-1}\| < k < \frac{1}{c}.$$

Тогда очевидно, что $ck < 1$. Рассмотрим число R удовлетворяющее неравенству

$$\frac{dk}{1 - ck} \le R.$$

Проверим, что для любой точки $x \in B_R[0]$ было выполнено неравенство (6). Действительно,

$$\|f(x)\| \le c\|x\| + d \le cR + d \le cR + \frac{R(1 - ck)}{k} = \frac{R}{k}.$$

Таким образом отображение f в шаре $B_R[0]$ удовлетворяет условиям теоремы 1, что и доказывает утверждение.

5. ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ НЕРАЗРЕШЕННОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

5.1. ЛОКАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Пусть $\varphi : [a, b] \times R^n \times R^n \to R^n$ отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(φ 1) отображение φ непрерывно по совокупности переменных;

(φ 2) существует такое число $k \in (0, 1)$; что для любых $t \in [a, b]$, $x \in R^n$ и $y_1, y_2 \in R^n$ справедливо неравенство

$$\|\varphi(t, x, y_1) - \varphi(t, x, y_2)\| \le k\|y_1 - y_2\|;$$

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$x' = \varphi(t, x, x'). \qquad (7)$$

Пусть $h \in (0, b - a]$, решением уравнения (7) на промежутке $(0, a + h]$ будем называть непрерывно дифференцируемую функцию x_*, определенную на этом промежутке и для любого $t \in [a, a + h]$ удовлетворяющую уравнению (7).

Рассмотрим следующую задачу:

$$x' = \varphi(t, x, x'), \qquad (7)$$

$$x(a) = 0. \qquad (8)$$

Дадим операторную трактовку задачи (7), (8). Пусть

$$\breve{C}^1_{[a,a+h]} = \left\{ x \in C^1_{[a,a+h]} | x(a) = 0 \right\},$$

$A : \breve{C}^1_{[a,a+h]} \to C_{[a,a+h]}$ — оператор дифференцирования. Очевидно, что оператор A непрерывно обратим и $A^{-1}(y)(t) = \int_a^t y(s)ds$. Нетрудно видеть также, что $\left\| A^{-1} \right\| = h$.

Рассмотрим оператор суперпозиции, порожденный отображением φ. Пусть $g : \breve{C}^1_{[a,a+h]} \times C_{[a,a+h]} \to C_{[a,a+h]}$ отображение, порожденное условием: $g(x,y)(t) = \varphi(t, x(t), y(t))$. Рассмотрим свойства этого отображения.

Лемма 2. *При сделанных предположениях g является непрерывным отображением и удовлетворяет следующим условиям:*

(1) для любой точки $x \in \breve{C}^1_{[a,a+h]}$ и любых $y_1, y_2 \in C_{[a,a+h]}$ справедливо неравенство $\left\| g(x,y_1) - g(x,y_2) \right\| \le k \left\| y_1 - y_2 \right\|$;

(2) для любого $y \in C_{[a,a+h]}$ отображение $g(\cdot, y) : \breve{C}^1_{[a,a+h]} \to C_{[a,a+h]}$ является вполне непрерывным.

Доказательство этой леммы очевидно.

Рассмотрим отображение $f : \breve{C}^1_{[a,a+h]} \to C_{[a,a+h]}$ определенное условием: $f(x) = g(x, A(x))$, т.е. $f(x)(t) = \varphi(t, x(t), x'(t))$.

Лемма 3. *При сделанных предположениях отображение f является непрерывным (A, χ)-уплотняющим отображением.*

Доказательство. Непрерывность отображения f очевидна и вытекает из непрерывности отображения φ по совокупности переменных.

Из леммы 2 и предложения 3 вытекает (A,χ)-уплотняемость отображения f.

Очевидно, что задача (7), (8) эквивалентна следующему операторному уравнению

$$A(x) = f(x). \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть отображение φ удовлетворяет условиям (φ 1) и (φ 2), тогда существует такое число $h_0 \in (0, b-a]$, что задача (7), (8) имеет решение на промежутке $\left[a, a+h_0\right]$..*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi_{(a,0)} : R^n \to R^n$, $\varphi_{(a,0)}(y) = \varphi(a,0,y)$. Это отображение в силу условия (φ 2) является сжимающим, следовательно имеет единственную неподвижную точку y_0, т.е. $y_0 = \varphi(a,0,y_0)$. Рассмотрим функцию $\hat{y}_0(t) = ty_0 \in \breve{C}^1_{[a,a+h]}$.

Пусть $B_R[\hat{y}_0]$ — замкнутый шар радиуса $R > 0$ с центром в $\hat{y}_0$ в пространстве $\breve{C}^1_{[a,a+h]}$. Пусть x произвольная функция из $B_R[\hat{y}_0]$, оценим $\left\| A(\hat{y}_0) - f(x) \right\|$. Имеем,

$$\left\| A(\hat{y}_0) - f(x) \right\| = \max_{t \in [a,a+h]} \left\| y_0 - \varphi(t, x(t), x'(t) \right\| =$$
$$= \max_{t \in [a,a+h]} \left\| \varphi(a,0,y_0) - \varphi(t,x(t),x'(t) \right\|.$$

Если $t \in \left[a, a+h\right]$, то

$$\left\| \varphi(a,0,y_0) - \varphi(t,x(t),x'(t) \right\| \le$$
$$\le \left\| \varphi(a,0,y_0) - \varphi(a,0,x'(t)) \right\| +$$
$$+ \left\| \varphi(a,0,x'(t)) - \varphi(t,x(t),x'(t)) \right\| \le k \left\| y_0 - x'(t) \right\| +$$
$$+ \left\| \varphi(a,0,x'(t)) - \varphi(t,x(t),x'(t)) \right\|.$$

Так как $x \in B_R[\hat{y}_0]$, то $\left\| y_0 - x'(t) \right\| \le R$. Оценим теперь $\left\| \varphi(a,0,x'(t)) - \varphi(t,x(t),x'(t)) \right\|$. Очевидно, что существует ограниченное замкнутое множество $G \in [a,a+h] \times R^n \times R^n$ такое, что если $x \in B_R[\hat{y}_0]$, то $\left(t, x(t), x'(t)\right) \in G$. Так как φ непрерывное отображение, то оно является равномерно непрерывным на множестве G, т. е. для любого $\delta > 0$ найдется $\eta = \eta(\delta) > 0$ такое, что как только $\left| t_1 - t_2 \right| < \eta$, $\left\| x_1 - x_2 \right\| < \eta$ и $\left\| y_1 - y_2 \right\| < \eta$, то $\left\| \varphi(t_1,x_1,y_1) - \varphi(t_2,x_2,y_2) \right\| < \delta$.

Заметим также, что существует такое число $M > 0$, что $\left\| x'(t) \right\| \le M$ для любого $t \in [a, a+h]$ и любого $x \in B_R[\hat{y}_0]$. Тогда $\left\| 0 - x(t) \right\| = \left\| x(a) - x(t) \right\| \le \le M(t-a)$. Рассмотрим в качестве $\delta = R$, тогда существует $h_1 > 0$ такое, что $h_1 < \eta$ и $Mh_1 < \eta$. Тогда $\left\| \varphi(a,0,x'(t)) - \varphi(t,x(t),x'(t)) \right\| < R$ для любого $t \in \left[a, a+h_1\right]$.

Таким образом получаем, если $t \in \left[a, a+h_1\right]$, то

$$\left\| \varphi(a,0,y_0) - \varphi(t,x(t),x'(t) \right\| \le kR + R = R(1+k).$$

Выберем число h_2 так, чтобы $h_2(1+k) < 1$. Пусть положительное число $h_0 < \min\left\{h_1, h_2, b-a\right\}$. Рассмотрим уравнение (9) в пространстве $\breve{C}^1_{[a,a+h_0]}$. Пусть x произвольная функция из $B_R[\hat{y}_0]$. Имеем,

$$\left\| A(\hat{y}_0) - f(x) \right\| \le R(1+k) < \frac{R}{h_2},$$

где $h_2 > h_0 = \left\| A^{-1} \right\|$. Мы находимся в условиях теоремы 1, что и доказывает существование решения задачи (7), (8). Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 может быть доказана другим методом. Рассмотрим отображение $\varphi_{(t,x)} : R^n \to R^n$, $\varphi_{(t,x)}(y) = \varphi(t,x,y)$. Это отображение в силу условия (φ 2) является сжимающим, следовательно имеет единственную неподвижную точку $y = y(t,x)$, т.е. $y(t,x) = \varphi\left(t, x, y(t,x)\right)$. Нетрудно проверить, что в силу сделанных предположений отображение $y : [a,b] \times R^n \to R^n$ является непрерывным по совокупности переменных. Очевидно также, что задача (7), (8) эквивалентна следующей задаче Коши:

$$x' = y(t,x),$$

$$x(a) = 0.$$

Локальное решение такой задачи всегда существует. Однако, в этом случае оценить величину интервала, на котором существует решение, сложно, т.к. отображение y трудно построить конструктивно. Приведенное выше доказательство теоремы 2 позволяет это сделать через свойства заданного отображения φ.

5.2. ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Пусть $\varphi : [a,b] \times R^n \times R^n \to R^n$ отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(φ 1) отображение φ непрерывно по совокупности переменных;

(φ 2) существует такое число $k \in (0,1)$, что для любых $t \in [a,b]$, $x \in R^n$ и $y_1, y_2 \in R^n$ справедливо неравенство

$$\left\|\varphi(t,x,y_1) - \varphi(t,x,y_2)\right\| \le k\left\|y_1 - y_2\right\|;$$

(φ 3) существуют такие числа c и d, что для любых $t \in [a,b]$ и $x \in R^n$ справедливо неравенство $\left\|\varphi(t,x,0)\right\| \le c\left\|x\right\| + d$.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение (7):

$$x' = \varphi(t,x,x').$$

Глобальным решением этого уравнения будем называть непрерывно дифференцируемую функцию x_*, определенную на промежутке $[a,b]$, и для любого $t \in [a,b]$ удовлетворяющую уравнению (7).

Дадим операторную трактовку этого уравнения. Пусть $A : D(A) \subset C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ — оператор дифференцирования, $D(A)$ — множество непрерывно дифференцируемых функций на $[a,b]$. Рассмотрим в $D(A)$ следующую норму

$$\left\|x\right\| = \max_{t\in[a,b]}\left\|x(t)\right\| + \frac{k}{c}\max_{t\in[a,b]}\left\|x'(t)\right\|.$$

Полученное пространство $\left(D(A), \left\|\cdot\right\|\right)$ будем обозначать $\hat{C}^1_{[a,b]}$.

Рассмотрим теперь оператор суперпозиции, порожденный отображением φ. Пусть $g : \hat{C}^1_{[a,b]} \times C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ отображение, порожденное условием: $g(x,y)(t) = \varphi\left(t, x(t), y(t)\right)$. Рассмотрим свойства этого отображения.

Лемма 4. *При сделанных предположениях g является непрерывным отображением и удовлетворяет следующим условиям:*

(1) для любой точки $x \in \hat{C}^1_{[a,b]}$ и любых $y_1, y_2 \in C_{[a,b]}$ справедливо неравенство $\left\|g(x,y_1) - g(x,y_2)\right\| \le k\left\|y_1 - y_2\right\|$;

(2) для любого $y \in C_{[a,b]}$ отображение $g(\cdot, y) : \hat{C}^1_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ является вполне непрерывным.

Доказательство этой леммы очевидно.

Рассмотрим отображение $f : \hat{C}^1_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ определенное условием: $f(x) = g\left(x, A(x)\right)$, т.е. $f(x)(t) = \varphi\left(t, x(t), x'(t)\right)$.

Лемма 5. *При сделанных предположениях отображение f удовлетворяет следующим условиям:*

a) отображение f является непрерывным (A,χ)-уплотняющим отображением;

b) для любого $x \in \hat{C}^1_{[a,b]}$ справедливо следующее неравенство:

$$\left\|f(x)\right\|_{C_{[a,b]}} \le c\left\|x\right\|_{\hat{C}^1_{[a,b]}} + d. \qquad (10)$$

Доказательство. Непрерывность отображения f очевидна и вытекает из непрерывности отображения φ по совокупности переменных.

Из леммы 2 и предложения 3 вытекает (A,χ)-уплотняемость отображения f.

Проверим справедливость неравенства (8). Действительно, для любого $t \in [a,b]$ имеем:

$$\left\|f(x)(t)\right\| = \left\|\varphi(t, x(t), x'(t))\right\| \le \left\|\varphi(t, x(t), 0)\right\| +$$
$$\left\|\varphi(t, x(t), 0) - \varphi(t, x(t), x'(t))\right\| \le$$
$$\le c\left\|x(t)\right\| + d + k\left\|x'(t)\right\| = c\left(\left\|x(t)\right\| + \frac{k}{c}\left\|x'(t)\right\|\right) + d.$$

Следовательно,

$$\left\|f(x)\right\|_{C_{[a,b]}} \le c\left\|x\right\|_{\hat{C}^1_{[a,b]}} + d.$$

Теорема 3. *Пусть отображение φ удовлетворяет условиям (φ 1), (φ 2) и (φ 3). Если выполнено неравенство $c(b-a) < 2(1-k)$, то уравнение (7) имеет глобальное решение.*

Доказательство. Очевидно, что дифференциальное уравнение (7) эквивалентно операторному уравнению $A(x) = f(x)$, где отображение f является непрерывным (A,χ)-уплотняющим отображением. Для доказательства теоремы воспользуемся следствием 1. Так как

A является оператором дифференцирования, то в силу примеров 1 и 2 имеем, $\left\|A^{-1}\right\| = \dfrac{b-a}{2} + \dfrac{k}{c}$. Тогда

$$c\left\|A^{-1}\right\| = c\left(\frac{b-a}{2} + \frac{k}{c}\right) = \frac{c\,(b-a)+2k}{2} < 1.$$

Таким образом все условия следствия 1 выполнены, уравнение $A(x) = f(x)$ имеет решение, которое и будет решением уравнения (7). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахмеров Р. Р.* Меры некомпактности и уплотняющие отображения / Р. Р. Ахмеров и др. — Новосибирск: Наука. — 1986.

2. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Walter de Gruyter, Berlin — New York, 2001.

3. *Hetzer G.* Some remarks on operators and the coincidence degri for Fredholm equationwith noncompact nonlinearperturbation / G. Hetzer // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. 1. — 1975. — V. 89, n. 1. — P. 497—508.

4. *Борисович Ю. Г.* Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. I / Ю. Г. Борисович // Геом. и теория особенностей в нелинейных уравнениях. — Воронеж, ВорГУ. — 1987. — С. 24—46.

5. *Борисович Ю. Г.* Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. II / Ю. Г. Борисович // Глобал. анал. и нелинейн. уравнения. — Воронеж, ВорГУ. — 1988. — С. 22—43.

6. *Дмитриенко В. Т., Звягин В. Г.* Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений / В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин // Матем. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 801—812.

7. *Ricceri B.* On the topological dimension of the solution set of a class of nonlinear equations / B. Ricceri // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. — 1997. — V. 325, no. 1. — P. 65—70.

8. *Гельман Б. Д.* Об одном классе операторных уравнений / Б. Д. Гельман // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 4. — С. 544—552.

9. *Гельман Б. Д.* Многозначные сжимающие отображения и их приложения / Б. Д. Гельман // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: математика, физика. — 2009. — № 1. — С. 74—86.

Гельман Борис Данилович — доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и геометрии. Воронежский государственный университет

E-mail: gelman@math.vsu.ru

Тел.: 223-56-92

Калабухова Светлана Николаевна — аспирантка кафедры алгебры и геметрии. Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: sv-tik.86@mail.ru

Тел.: 8-908-131-82-67

Gel'man Boris Danilovich — Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Docent of the Department of Theory of Functions and Geometry. Voronezh State University

E-mail: gelman@math.vsu.ru

Tel.: 223-56-92

Kalabuhova Svetlana Nikolaevna — aspirant department of algebra and gemetrii. Voronezh State Pedagogical University

E-mail: sv-tik.86@mail.ru

Tel.: 8-908-131-82-67