УДК 539.374

К СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СВЯЗНЫХ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Н. Д. Вервейко, Е. Н. Ерохина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.09.2010 г.

Аннотация: предлагается аппроксимация гладкого выпуклого условия пластичности в пространстве напряжений семейством плоскостей. В случае идеального жесткопластического материала условие пластичности Мизеса аппроксимируется парой касательных плоскостей. Пересечение ребра, даваемого парой касательных плоскостей, и плоскости, задаваемой условием полной пластичности Хаара—Кармана—Ишлинского—Ивлева, дает дополнительные три условия в напряжениях к трем уравнениям равновесия, что замыкает систему уравнений равновесия, которая является гиперболической. В общем случае главное выпуклое условие пластичности в каждой его точке аппроксимируется тремя плоскостями, образующими трехгранный угол, касательный к поверхности.
Ключевые слова: пластичность, пластический сжимаемый сыпучий материал

Ключевые слова: пластичность, пластический сжимаемый сыпучий материал.
Abstract: an approximation of smooth convex plasticity condition by set of planes is suggested. Mises criterion is approximated by two tangent planes in case of ideal rigid-plastic material. Closed system of equilibrium equations and plasticity conditions is resulted.
Key words: plasticity, plastic compressible material, soil.

ВВЕДЕНИЕ

Пространственная задача предельного равновесия пластических материалов, сформулированная в терминах напряжений, определяется тремя уравнениями равновесия *

$$\partial\sigma_{ij} / \partial x_j = 0, (i, j = 1, 2, 3) \qquad (1)$$

одним условием предельного состояния — условием пластичности

$$f(\sigma) = 0, \qquad (2)$$

и является незамкнутой в смысле совпадения числа неизвестных напряжений — 6 и числа уравнений — 4. Для случая условия пластичности Треска условие (2) задается шестигранной призмой в пространстве напряжений и дополнение этого условия условием полной пластичности Хаара—Кармана—Ишлинского—Ивлева позволяет замкнуть систему уравнений предельного пространственного равновесия материала. Д. Д. Ивлевым в ряде работ и в монографиях [1, 2] проанализирована замкнутая система предельного пространственного равновесия и установлена ее гиперболичность, что позволило провести аналогию между гиперзвуковым течением газа и пластическим течением идельно-жесткопластического материала.

В ряде работ [3, 4] Ю. Н. Радаев исследовал особенности пространства напряжений трехмерного напряженного состояния идеальных пластических материалов и путем введения таких понятий как расслоенные пространства и t-гиперболичность систем уравнений в частных производных показал замкнутость и гиперболичность статических уравнений идеального несжимаемого пластического материала.

Сама идея замены гладкого выпуклого условия пластичности семейством аппроксимирующих плоскостей лежит в основе классической модели математической теории идеальной пластичности как для несжимаемых [1, 2, 3, 4], так и пластически сжимаемых материалов [5, 6].

В предлагаемой работе приводится идея замены одного гладкого выпуклого условия пластичности семейством касательных плоскостей, для которых само условие пластичности является огибающей поверхностью в пространстве главных напряжений.

1. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДЕЛИ МИЗЕСА

Плоское напряженное состояние пластического материала модели Мизеса определяется системой двух уравнений в частных производных (уравнений равновесия) для трех компонент напряжения σ_{ij}

$$\partial\sigma_{ij} / \partial x_j = 0, (i, j = 1, 2) \tag{3}$$

и одного уравнения предельного состояния — условия пластичности в форме Мизеса

$$f(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_1^2 = 4k^2, \tag{4}$$

здесь σ_1, σ_2 — главные напряжения тензора напряжений σ_{ij}.

Обозначим через $\overline{n}_l$ направляющий вектор главных напряжений. Так что

$$\overline{n}_l \cdot \overline{n}_l = 1; \overline{n}_l \cdot \overline{n}_p = 0, l \neq p(l, p = 1, 2), \tag{5}$$

Как следует из (5) из четырех компонент векторов $n_{ij}(i, j = 1, 2)$ независимыми являются только две компоненты. Система уравнений (3—5) является замкнутой относительно напряжений σ_{ij} и направляющих косинусов n_{lp} главных осей тензора напряжений. Замена нелинейного условия пластичности (4) парой касательных плоскостей (рис. 1) линеризует систему уравнений (3—5), а уравнения касательных принимают следующий вид [7, 8, 9]:

$$\begin{gathered} \sigma_1 = k_2\sqrt{2}(\tan\varphi + 1)\Lambda(\varphi), \\ \sigma_2 = k_2\sqrt{2}\tan\varphi \cdot \Lambda(\varphi), \end{gathered} \tag{6}$$

где $\tan\varphi = \sigma_2 / (\sigma_1 - \sigma_2)$; $k_2 = (1 + \varepsilon)k$; $\varepsilon = \Delta k / k$; $\Lambda(\varphi) = (1 + \tan\varphi + \tan^2\varphi)^{-1/2}$.

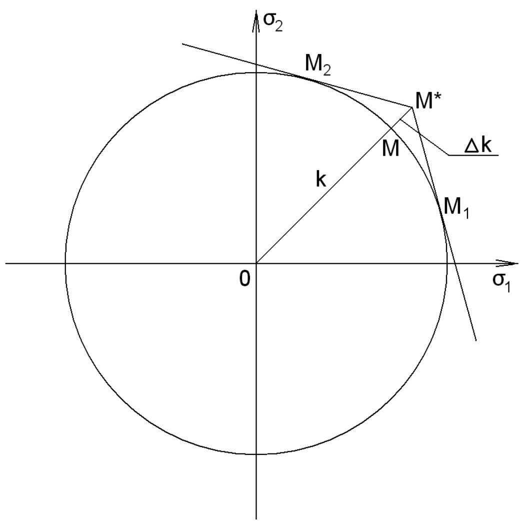


Рис. 1. Аппроксимация условия пластичности (4) в девиаторной плоскости парой касательных M^*M_1, M^*M_2 в окрестности точки M

Уравнения равновесия (3) совместно с линеаризованными условиями пластичности (6) и с условием единичности направляющих векторов $\overline{n}_l$ (5) примут вид:

$$\begin{gathered} \delta_{ij}\left(\tan\varphi \cdot \Lambda(\varphi)\right)_{,j} + \left(c_{i1} \cdot c_{j1} \cdot \Lambda(\varphi)\right) = 0; \\ c_{i1} \cdot c_{i1} = 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Система уравнений (7) допускает характеристики $\chi_{1,2}$ в осях координат, совпадающих с главными направлениями тензора напряжений:

$$c_{i1} \cdot \left(f_{,i} / \left|\nabla f\right|\right) = \pm\left(\sqrt{2} / 2\right), \tag{8}$$

где $f(x, y) = 0$ — уравнение характеристической поверхности в плоскости (x, y).

Характеристики (8) составляют с главными направлениями $\overline{n}_1\left(c_{11}, c_{12}\right)$ и $\overline{n}_2\left(c_{21}, c_{22}\right)$ углы $\mu = \pm\pi / 4$, что соответствует известным результатам [1, 2]. Соотношения вдоль характеристик $\chi_{1,2}$ для системы (7) можно представить в виде:

$$\pm\theta(\varphi)d(\tan\varphi) + \tan(\xi \pm \pi / 4)d\xi = 0, \tag{9}$$

где $\theta(\varphi) = \Lambda^2(\varphi) \cdot (1 - \tan\varphi); \sin\xi = c_{11}; \cos\xi = c_{21}$.

Итерационный параметр $\varepsilon = \Delta k / k$, , входящий в (6) для σ_1 и σ_2 является регулярным и при $\varepsilon = \Delta k / k \to 0$ уравнения характеристик (8) и уравнения вдоль характеристик (9) полностью переходят (после преобразования обозначений) в известные соотношения плоской задачи теории идеальной пластичности [1, 2]. Таким образом метод предложенной линеризации условия пластичности Мизеса в плоской задаче обладает сходимостью к точному решению при $\varepsilon \to 0$.

2. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СЖИМАЕМОГО СВЯЗНОГО СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА

Для пластически сжимаемых материалов, моделирующих предельное состояние связных сыпучих материалов [10], условие пластичности в пространстве с координатными линиями первого и второго инвариантов тензора напряжений $I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma'}$ представляет собой эллипс (рис. 2) при $f > \alpha$.

$$\Phi = I_{2\sigma'}^2 - (Y + \alpha I_{1\sigma})^2 + f^2 I_{1\sigma}^2 = 0, \tag{10}$$

Само условие пластичности (10) обладает уникальными свойствами, обобщающими условие пластичности Мизеса и условие Кулона—Амонтона—Соколовского. Так при $\alpha = f = 0$ условие (10) переходит в условие Мизеса (прямая YM на рис. 2). При $f = 0$, $\alpha \neq 0$ условие

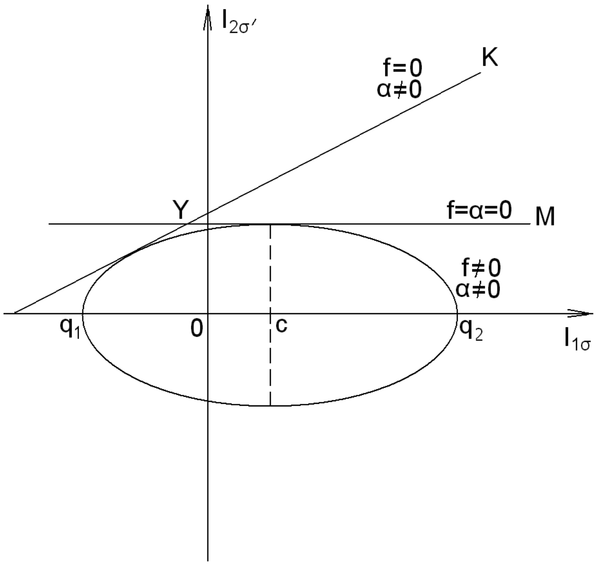


Рис. 2. Изображение условия пластичности (8) в пространстве инвариантов $\left(I_{1\sigma}, I_{2\sigma'}\right)$

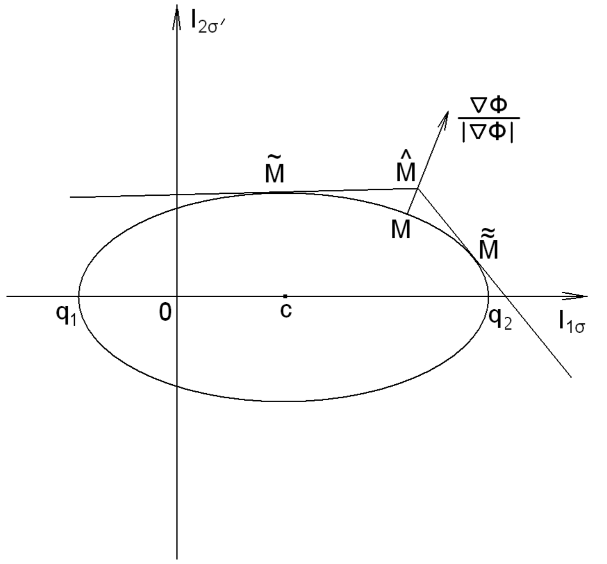


Рис. 3. Схематичное изображение условия пластичности (10) в пространстве инвариантов $\left(I_{1\sigma}, I_{2\sigma'}\right)$ и аппроксимирующей его в окрестности точки M пары касательных $\hat{M}\tilde{M}$ и $\hat{M}\tilde{\tilde{M}}$

(10) представляет собой условие пластичности Кулона—Амонтона—Соколовского для сжимаемых грунтов (прямая YK на рис. 2).

Таким образом, результаты исследования напряженно-деформированного состояния при условии (10) в пределе при $\alpha \to 0$ и $f \to 0$ будут переходить в решения аналогичных задач идеальной пластичности, а при $f \to 0,\ \alpha \neq 0$ будут переходить в решение задач идеально сжимаемого пластического материала [1—3].

Плоское напряженное состояние пластически деформируемого связного сыпучего материала описывается тензором напряжений $\sigma_{ij}(i, j = 1,2)$, компоненты которого подчиняются условию равновесия (3) и условию пластичности (10).

Система трех уравнений — двух уравнений в частных производных (3) и одного нелинейного уравнения (10) является замкнутой. Одним из методов решения представленной задачи является применяемый далее метод линеаризации нелинейного уравнения (10). На рис. 3 представлена картина замены условия пластичности (10) в некоторой точке M его приближением — парой касательных прямых в пространстве напряжений, которые проходят через точку $\hat{M}$, находящуюся на расстоянии $\varepsilon \cdot Y$ по нормали в точке M к поверхности $\Phi = 0$.

В безразмерном виде уравнения равновесия (3) и условие пластичности (10) представимы в виде:

$$\sigma_{ij,j} = 0; \tau^2 - (1 - \alpha q)^2 + f^2 q^2 = 0. \qquad (11)$$

Здесь знак безразмерности у напряжений опущен $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / Y;$; $\tau^2 = I_{2\sigma'}^2 / Y^2;$ $q = p / Y;$ $p = -I_{1\sigma}$.

Зная точки $q_1 = 1/(\alpha - f);$ $q_2 = 1/(\alpha + f);$ $(f > \alpha)$, определяется центр эллипса: $c = \alpha / (\alpha^2 - f^2)$, а также величина его полуосей a и b: $a = f/(f^2 - \alpha^2);$ $b = f / \sqrt{f^2 - \alpha^2}$.

В системе координат с центром в точке c центра эллипса условие пластичности (10, 11) принимает вид:

$$\tilde{q}^2 / a^2 + \tau^2 / b^2 = 1. \qquad (12)$$

Путем растяжения или сжатия вдоль осей $\tilde{q}$ и τ условие пластичности (10) можно преобразовать в уравнение окружности единичного радиуса

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \qquad (13)$$

где $\xi = \tilde{q} / a;$ $\eta = \tau / b$.

Переход к новым переменным $\xi,\ \eta$ в пространстве инвариантов $I_{1\sigma},\ I_{2\sigma'}$ тензора напряжений связан с тем, что при аппроксимации условия пластичности (10) парой касательных, в точке $\hat{M}$ необходимо использовать единичный вектор нормали к поверхности эллипса (10) $\bar{N} = \nabla\Phi / |\nabla\Phi|$, а длина $|\nabla\Phi|$ есть функция координат точки M, что не совсем удобно при проведении алгебраических вычислений. На рис. 4 видно, что в рассматриваемой задаче,

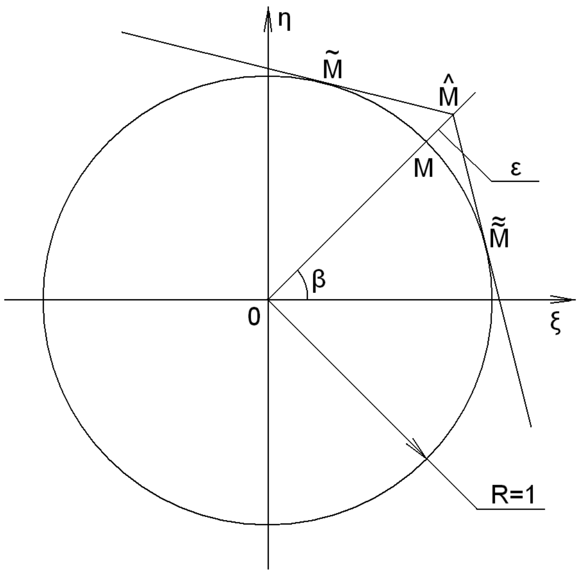


Рис. 4. Схематичное изображение условия пластичности (10) в виде окружности единичного радиуса и касательных прямых $\hat{M}\tilde{M}$ и $\hat{M}\tilde{\tilde{M}}$, аппроксимирующих условие пластичности в точке $\hat{M}$

определяемой замкнутой системой уравнений (11), линеаризация условия пластичности (10) позволяет провести параметризацию задачи (11) и уменьшить число неизвестных. Сама итерация в решениях по параметру $\varepsilon = \Delta Y / Y$ не является необходимой, поскольку построена будет система уравнений, в которой предельный переход по $\varepsilon \to 0$ возможно провести уже в самой дифференциальной постановке.

Как следует из рис. 4, при введении параметра $\beta(\tan\beta = \eta/\xi)$ значения "инвариантов" ξ и η определяются однозначно:

$$\xi = \cos\beta; \eta = \sin\beta. \tag{14}$$

Для линеаризированной задачи координаты точки $\hat{M}$, аппроксимирующей точку M, находятся

$$\hat{\xi} = (1+\varepsilon)\cos\beta; \hat{\eta} = (1+\varepsilon)\sin\beta. \tag{15}$$

Сформулируем систему (11) уравнений равновесия и условия пластичности в новых переменных ϕ, β, где ϕ - направляющий косинус первого главного направления σ_1 тензора напряжений, β - угол определяющий вид напряженного сосотяния (рис.4). Уравнения равновесия (3) примут вид:

$$(\sigma_l c_{il} \cdot c_{jl})_{,j} = 0; c_{il}c_{jl} = \delta_{ij}(i, j, l = 1, 2), \tag{16}$$

где $c_{11} = \cos\varphi$; $c_{21} = \sin\varphi$.

Система уравнений (16) сводится к системе двух квазилинейных уравнений в частных производных для $\beta(x, y)$, $\varphi(x, y)$:

$$[\gamma f \sin\beta - f\gamma^2 \cdot \cos\beta - 2f\gamma\cos^2\varphi \cdot \sin\beta]_{,x} - \\ -f\gamma(\sin 2\varphi \cdot \sin\beta)_{,y} = 0$$

$$-f\gamma(\sin 2\varphi \cdot \sin\beta)_{,x} + \\ +[f\gamma\sin\beta - f\gamma^2 \cdot \cos\beta - 2f\gamma\cos^2\varphi \cdot \sin\beta]_{,y} = 0, \tag{17}$$

где $\gamma = 1/\sqrt{f^2 - \alpha^2}$.

При замене переменных

$$U = \sin 2\varphi \cdot \sin\beta; \\ V = \cos 2\varphi \cdot \sin\beta + \gamma\cos\beta \tag{18}$$

система уравнений в частных производных для $U(\phi, \beta)$ и $V(\varphi, \beta)$ приводится к гиперболическому виду:

$$U_{,x} + V_{,y} = 0; U_{,y} + V_{,x} = 0. \tag{19}$$

Характеристики системы (19) представляют собой семейства ортогональных прямых наклоненных к оси x под углом $\psi = \pi/4$:

$$\tan\psi = dy/dx = \pm 1. \tag{20}$$

Вдоль характеристик (20) имеют место дифференциальные уравнения:

$$\chi_1, dy/dx = 1 : dW_1 = 0, W_1 = Const,$$

$$\chi_2, dy/dx = -1 : dW_2 = 0, W_2 = Const, \tag{21}$$

здесь

$$W_1 = U + V = \sqrt{2}\sin\beta\sin(2\varphi - \pi/4) + \gamma\cos\beta$$

$$W_2 = U - V = \sqrt{2}\sin\beta\cos(2\varphi - \pi/4) + \gamma\cos\beta. \tag{22}$$

Таким образом, плоская задача механики деформирования связных сыпучих материалов сводится к решению в напряжениях системы уравнений (19), имеющих гиперболический тип, простые уравнения характеристик (20) и дифференциальные соотношения (21) вдоль характеристик. При этом отметим, что в процессе решения методом характеристик в каждой точке плоскости находятся инварианты W_1 вдоль χ_1 и W_2 вдоль χ_2. Сами параметры φ и β определяющие напряженное состояние находятся в результате решения системы двух нелинейных тригонометрических уравнений (22), где W_1, W_2 известны в каждой точке плоскости.

3. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СВЯЗНЫХ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

3.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование пространственного напряженного состояния связного сыпучего материала основывается на рассмотрении системы уравнений: уравнения равновесия (1) и условия пластичности типа Мизеса—Шлейхера—Соколовского (2).

При использовании метода линеаризации условия пластичности представляется удобным привести условие пластичности (2) к сферической форме в некоторой повернутой и растянутой системе координат в пространстве главных напряжений. В пространстве главных напряжений условие (2) представляет собой эллипсоид вращения:

$$\Phi = \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \\ +(\sigma_2 - \sigma_3)^2) - (Y + \alpha I_{1\sigma})^2 + \\ +f^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = 0. \quad (23)$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\alpha Y + fY\cos\phi\sin\varphi + fY(6\cos\theta - 4\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\sqrt{f^2 - \alpha^2}}{3(f^2 - \alpha^2)^2} \\ \sigma_2 = \dfrac{\alpha Y + fY\cos\varphi\sin\theta + fY(9\cos\theta - \sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\sqrt{f^2 - \alpha^2}}{3(f^2 - \alpha^2)^2} \\ \sigma_3 = \dfrac{\alpha Y + fY\cos\varphi\sin\theta + fY(3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\sqrt{f^2 - \alpha^2}}{3(f^2 - \alpha^2)^2} \end{cases} \quad (28)$$

3.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ К СФЕРЕ В ГЛАВНЫХ ОСЯХ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

В главных осях эллипсоида вращения условие пластичности Мизеса—Шлейхера—Соколовского принимает вид:

$$\left(\frac{3(f^2 - \alpha^2)\sigma'_1 - \sqrt{3}\alpha Y}{\sqrt{3}fY}\right)^2 + \\ +\left(\frac{\sqrt{3}(f^2 - \alpha^2)\sigma'_2}{\sqrt{6}fY}\right)^2 + \\ +\left(\frac{\sqrt{3}(f^2 - \alpha^2)\sigma'_3}{\sqrt{6}fY}\right)^2 = 1, \quad (24)$$

где главные оси эллипсоида пластичности σ'_1, σ'_2, σ'_3 выражаются через главные оси тензора напряжений σ_1, σ_2, σ_3 из:

$$\sigma'_3 = (\sigma_2 - \sigma_3)/\sqrt{2}, \\ \sigma'_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/\sqrt{3}, \quad (25) \\ \sigma'_2 = (\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_1)/\sqrt{6}.$$

Из (24) легко ввести преобразование эллипсоида вращения в сферу, вводя замену:

$$\xi = \frac{3(f^2 - \alpha^2)\sigma'_1 - \sqrt{3}\alpha Y}{\sqrt{3}fY}, \\ \eta = \frac{\sqrt{3}(f^2 - \alpha^2)\sigma'_2}{\sqrt{6}fY}, \quad (26) \\ \zeta = \frac{\sqrt{3}(f^2 - \alpha^2)\sigma'_3}{\sqrt{6}fY},$$

так, что условие пластичности связного сыпучего материала в новых осях ξ, η, ζ принимает вид:

$$\Phi = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 = 0. \quad (27)$$

Условие пластичности представленное в виде сферы единичного радиуса (27) позволяет выразить неизвестные главные напряжения через сферические углы ϕ, θ:

3.3. АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА-ШЛЕЙХЕРА-СОКОЛОВСКОГО СЕМЕЙСТВОМ ПЛОСКОСТЕЙ

Положим, что точка M находится на расстоянии ε по нормали от поверхности сферы единичного радиуса и заменим приближенно поверхность семейством касательных плоскостей. Для этого введем угол ψ, осчитываемый от плоскости $\varphi = Const$ в плоскости перпендикулярной нормали n к сфере в точке M. Уравнение плоскости, проходящей через точку M и кастальной к сфере в точке M^* имеет вид:

$$\xi^*(\hat{\xi} - \xi^*) + \eta^*(\hat{\eta} - \eta^*) + \zeta^*(\hat{\zeta} - \zeta^*) = 0, \quad (29)$$

так как касательная плоскость перпендикулярна вектору нормали к Φ, который имеет вид $grad\Phi = (2\xi^*, 2\eta^*, 2\zeta^*)$.

На рис. 5 представлено сечение сферы единичного радиуса плоскостью $\psi = Const$, которое позволяет выразить координаты точки $M^*(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$ через малый параметр ε, угол ψ и Эйлеровы углы φ, θ. Обозначим:

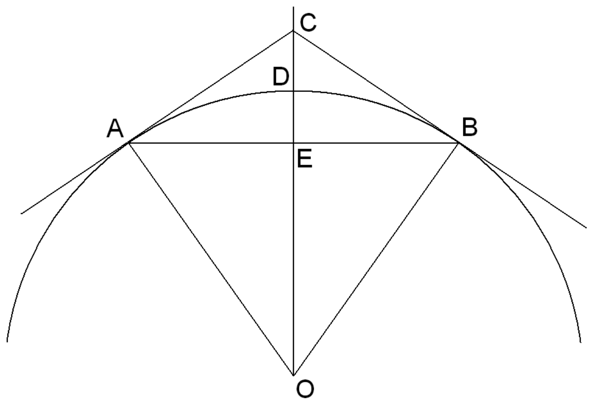


Рис. 5. Схематичное изображение сечения сферы единичного радиуса плоскостью $\psi = Const$

$$\begin{gathered} AC = \sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)};\, DE = \varepsilon / (\varepsilon+1) \\ BE = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)} / (\varepsilon+1); \\ OE = 1 - DE = 1/(\varepsilon+1). \end{gathered} \tag{30}$$

Вычислим необходимые для дальнейшего промежуточные значения:

$$\begin{gathered} M^0M^- = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}\cos\psi / (1+\varepsilon), \\ OM^- = \sqrt{1+\varepsilon(2+\varepsilon)\cos^2\psi} / (1+\varepsilon), \\ \cos(\widehat{M^0OM^-}) = 1/\sqrt{1+\varepsilon(2+\varepsilon)\cos^2\psi}, \\ \sin(\widehat{M^0OM^-}) = \\ = \sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)/(1+\varepsilon(2+\varepsilon)\cos^2\psi)}\cos\psi. \end{gathered} \tag{31}$$

Координаты точки касания ξ^*, η^*, ζ^* представимы в форме:

$$\begin{aligned} \zeta^* &= (\cos\theta - \sin\theta\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}\cos\psi)/(1+\varepsilon) \\ \eta^* &= (\sqrt{1+\varepsilon(2+\varepsilon)\cos^2\psi}\sin(\theta+\Delta\theta)\sin\varphi + \\ &\quad +\sqrt{(\varepsilon(\varepsilon+2))}\cos\varphi\sin\psi)/(1+\varepsilon) \\ \xi^* &= (\sqrt{1+\varepsilon(2+\varepsilon)\cos^2\psi}\sin(\theta+\Delta\theta)\cos\varphi + \\ &\quad +\sqrt{(\varepsilon(\varepsilon+2))}\sin\varphi\sin\psi)/(1+\varepsilon) \end{aligned} , \tag{32}$$

где $\sin\Delta\theta = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}/(\varepsilon+1)$, $\cos\Delta\theta = 1/(\varepsilon+1)$.

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\omega\cos\beta - \sin\omega\sin\beta\cos\gamma & \cos\omega\sin\beta - \sin\omega\cos\beta\cos\gamma & \sin\omega\sin\gamma \\ -\sin\omega\cos\beta - \cos\omega\sin\beta\cos\gamma & -\sin\omega\sin\beta + \cos\omega\cos\beta\cos\gamma & \cos\omega\sin\gamma \\ \sin\gamma\sin\beta & -\sin\gamma\cos\beta & \cos\gamma \end{pmatrix}, \tag{34}$$

Используя полученные значения координат точки касания M^* уравнение семейства касательных плоскостей, проходящих через точки M, M^* (где точка M^* меняет положение в зависимости от параметра ψ), приобретает вид:

$$\begin{gathered} (\sqrt{1+\varepsilon(2+\varepsilon)\cos^2\psi}\,\frac{\sin\theta+\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}\cos\theta}{\varepsilon+1}\cos\varphi + \\ +\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}\sin\phi\sin\psi)\cos\theta + \\ (\sqrt{1+\varepsilon(2+\varepsilon)\cos^2\psi}\,\frac{\sin\theta+\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}\cos\theta}{\varepsilon+1}\sin\varphi + \\ +\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}\cdot\cos\varphi\sin\psi)\cos\phi\sin\theta + \\ \frac{\cos\theta - \sin\theta\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}\cos\psi}{\varepsilon+1}\sin\varphi\sin\theta = 1. \end{gathered} \tag{33}$$

Здесь параметром множества плоскостей в сферической системе координат является угол ψ, который пробегает значения от 0 до 2π. Огибающей этого семейства является касательный конус из точки M к сфере.

Исходя из общих соображений выберем касательные плоскости из точки M к сфере образующие трехгранный угол так, что задав три различных значения ψ, получим три независимых уравнения касательных плоскостей, которые делают задачу пространственного напряженного состояния связного сыпучего материала статически определимой, поскольку количество уравнений, количество касательных плоскостей совпадает с числом неизвестных компонент тензора напряжений.

3.4. ФОРМУЛИРОВКА ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СВЯЗНЫХ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ.

Выберем в качестве параметров, определяющих пространственное напряженное состояние три главных направления σ_1, σ_2, σ_3 и три угла, определяющих главные направления тензора напряжений. На рис.3 показаны углы ω, β, γ, через которые определяются направляющие косинусы главных нормалей $n_1(c_{11}, c_{12}, c_{13})$, $n_2(c_{21}, c_{22}, c_{23})$, $n_3(c_{31}, c_{32}, c_{33})$:

где $i, j = 1, 2, 3$.

Уравнения равновесия в переменных σ_1, σ_2, σ_3, ω, β, γ примут вид:

$$\left\{\begin{array}{c}
\partial(\sigma_1(\cos\omega\cos\beta-\sin\omega\sin\beta\cos\gamma)^2+\sigma_2(\cos\omega\sin\beta-\sin\omega\cos\beta\cos\gamma)^2+\\
+\sigma_3(\sin\omega\sin\gamma)^2)\,/\,\partial x+\\
+\partial(\sigma_1(\cos\omega\cos\beta-\sin\omega\sin\beta\cos\gamma)(-\sin\omega\cos\beta-\cos\omega\sin\beta\cos\gamma)+\\
+\sigma_2(\cos\omega\sin\beta-\sin\omega\cos\beta\cos\gamma)(-\sin\omega\sin\beta+\cos\omega\cos\beta\cos\gamma)+\\
+\sigma_3(\sin\omega\sin\gamma)(\cos\omega\sin\gamma))\,/\,\partial y+\\
+\partial(\sigma_1(\cos\omega\cos\beta-\sin\omega\sin\beta\cos\gamma)(\sin\gamma\sin\beta)+\\
+\sigma_2(\cos\omega\sin\beta-\sin\omega\cos\beta\cos\gamma)(-\sin\gamma\cos\beta)+\\
+\sigma_3(\sin\omega\sin\gamma)\cos\gamma)\,/\,\partial z=0\\
\partial(\sigma_1(-\sin\omega\cos\beta-\cos\omega\sin\beta\cos\gamma)(\cos\omega\cos\beta-\sin\omega\sin\beta\cos\gamma)+\\
+\sigma_2(-\sin\omega\sin\beta+\cos\omega\cos\beta\cos\gamma)(\cos\omega\sin\beta-\sin\omega\cos\beta\cos\gamma)+\\
+\sigma_3(\cos\omega\sin\gamma)(\sin\omega\sin\gamma))\,/\,\partial x+\\
+\partial(\sigma_1(-\sin\omega\cos\beta-\cos\omega\sin\beta\cos\gamma)^2+\sigma_2(-\sin\omega\sin\beta+\cos\omega\cos\beta\cos\gamma)^2+\\
+\sigma_3(\cos\omega\sin\gamma)^2)\,/\,\partial y+\\
\partial(\sigma_1(-\sin\omega\cos\beta-\cos\omega\sin\beta\cos\gamma)(\sin\gamma\sin\beta)+\\
+\sigma_2(-\sin\omega\sin\beta+\cos\omega\cos\beta\cos\gamma)(-\sin\gamma\cos\beta)+\\
+\sigma_3(\cos\omega\sin\gamma)(\cos\gamma))\,/\,\partial z=0\\
\partial(\sigma_1(\sin\gamma\sin\beta)(\cos\omega\cos\beta-\sin\omega\sin\beta\cos\gamma)+\\
+\sigma_2(-\sin\gamma\cos\beta)(\cos\omega\sin\beta-\sin\omega\cos\beta\cos\gamma)+\\
+\sigma_3(\cos\gamma)(\sin\omega\sin\gamma))\,/\,\partial x+\\
+\partial(\sigma_1(\sin\gamma\sin\beta)(-\sin\omega\cos\beta-\cos\omega\sin\beta\cos\gamma)+\\
+\sigma_2(-\sin\gamma\cos\beta)(-\sin\omega\sin\beta+\cos\omega\cos\beta\cos\gamma)+\\
+\sigma_3(\cos\gamma)(\cos\omega\sin\gamma))\,/\,\partial y+\\
+\partial(\sigma_1(\sin\gamma\sin\beta)^2++\sigma_2(-\sin\gamma\cos\beta)^2++\sigma_3(\cos\gamma)^2)\,/\,\partial z=0
\end{array}\right. \qquad (35)$$

В уравнении (35) неизвестные σ_1, σ_2, σ_3 выражаются через две переменные φ, θ:

$$\left\{\begin{array}{l}
\sigma_1=\dfrac{\alpha Y+fY\cdot\cos\varphi\sin\theta+fY(6\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\sqrt{f^2-\alpha^2}}{3(f^2-\alpha^2)^2}\\
\sigma_2=\dfrac{\alpha Y+fY\cdot\cos\varphi\sin\theta+fY(9\cos\theta-\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\sqrt{f^2-\alpha^2}}{3(f^2-\alpha^2)^2}\\
\sigma_3=\dfrac{\alpha Y+fY\cdot\cos\varphi\sin\theta+fY(3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\sqrt{f^2-\alpha^2}}{3(f^2-\alpha^2)^2}
\end{array}\right. \qquad (28)$$

Множество уравнений касательных плоскостей имеет вид:

$$\begin{array}{c}
(\sqrt{1+\varepsilon(2+\varepsilon)\cos^2\psi}\cdot\dfrac{\sin\theta+\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}\cos\theta}{\varepsilon+1}\cos\phi+\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}\cdot\sin\varphi\sin\psi)\cos\theta+\\
+(\sqrt{1+\varepsilon(2+\varepsilon)\cos^2\psi}\cdot\dfrac{\sin\theta+\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}\cos\theta}{\varepsilon+1}\sin\phi+\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}\cdot\cos\varphi\sin\psi)\cos\phi\sin\theta+,\\
+\dfrac{\cos\theta-\sin\theta\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}\cos\psi}{\varepsilon+1}\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta=1
\end{array} \qquad (36)$$

где ψ — параметр, задающий плоскости таким образом, чтобы касательные плоскости образо-

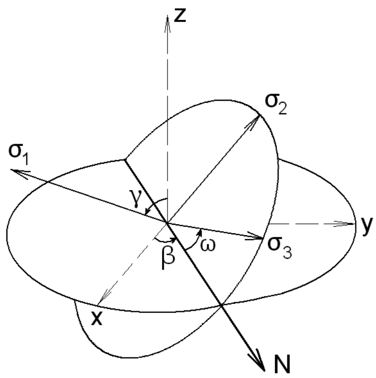


Рис. 6. Изображение углов Эйлера, используемых для нахождения направляющих косинусов главных направлений тензора напряжений

вывали невырожденный двугранный угол (скажем при $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi$).

Построенная таким образом система уравнений (28), (35), (36) представляет собой квазилинейную систему уравнений в частных производных для σ_1, σ_2, σ_3, φ, θ, ω, β, γ. Для решения конкретных задач необходимо выполнение граничных условий.

3.5. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ.

Рассмотрим одномерную сферическую задачу определения напряженного состояния пространства, ограниченного сферой радиуса a и находящегося под равномерно распределенным внутренним давлением P_a. Предполагается, что материал деформируется пластически. Уравнение равновесия в напряжениях в случае центральной симметрии имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_{\theta'}) = 0, \qquad (37)$$

где σ_r, $\sigma_{\theta'} = \sigma_{\varphi'}$ — компоненты тензора напряжений, θ', φ' — сферические углы. Из 2-го и 3-го уравнений (28) и условия центральной симметрии $(\sigma_{\theta'} = \sigma_{\phi'})$ получаем:

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n. \qquad (38)$$

С учетом (38) уравнения (28) принимают вид:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{\alpha \pm f\cdot\cos\varphi \mp f\cdot 4\sqrt{3}\sin\varphi\sqrt{f^2-\alpha^2}}{3(f^2-\alpha^2)^2}Y \\ \sigma_{\theta'} = \dfrac{\alpha \pm f\cdot\cos\varphi \mp f\cdot \sqrt{3}\sin\varphi\sqrt{f^2-\alpha^2}}{3(f^2-\alpha^2)^2}Y \end{cases} \qquad (39)$$

Уравнение равновесия (37) после исключения $\sigma_{\theta'}$ и φ из условия (39) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для σ_r:

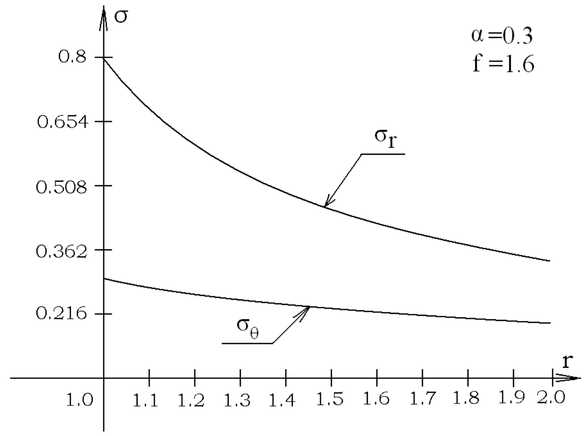
$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E\sigma_r + F \pm \sqrt{K\sigma_r^2 + L\sigma_r + M}}{N\cdot r}, \qquad (40)$$

где $E = -16\cdot 9\cdot\nu(f^2-\alpha^2-1) + 6\nu$, $F = -6\cdot\alpha + {}+16\cdot 9\alpha(f^2-\alpha^2-1)$, $K = 48\cdot 9\nu^2(-f^2+\alpha^2)$, $L = 36\cdot\nu\alpha(24f^2-24\alpha^2-1)$, $M = 9\cdot\left(\alpha^2-(48f^2-48\alpha^2-1)(\alpha^2-48f^4+48f^2\alpha^2)\right)$, $N = 32\cdot 3\nu(f^2 - {}-\alpha^2-1)$, $\nu = 3(f^2-\alpha^2)^2$.

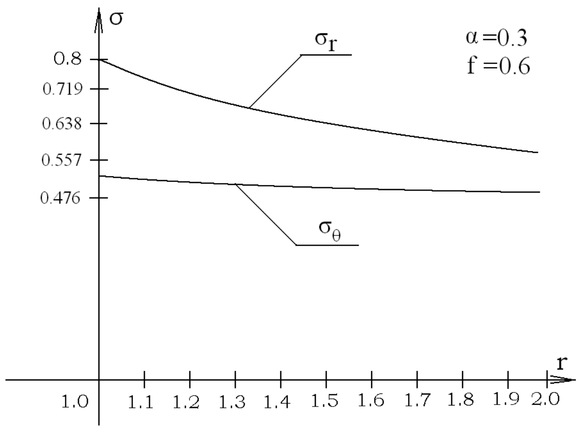
Окружное напряжение $\sigma_{\theta'}$ выражается из уравнений (37), (40) через радиальное напряжение σ_r:

$$\sigma_{\theta'} = \frac{E\sigma_r + F \pm \sqrt{K\sigma_r^2 + L\sigma_r + M}}{2N} + \sigma_r. \qquad (41)$$

Для вычисления радиального напряжения σ_r обыкновенное дифференциальное уравнение (40) решается пошаговым алгоритмом Эйлера.



а) $f = 1.6$



б) $f = 0.6$

Рис. 7. Графики поведения окружного и радиального напряжений при различных значениях коэффициента трения качения

В качестве граничного условия берется напряжение на поверхности сферы $r = a$:

$$\sigma_r \,|_{r=a} = P_a. \tag{42}$$

На рис. 7 (а, б) представлены графики окружного и радиального напряжений для $r \in [a, 2a]$ в случае изменения коэффициента трения качения, из которых следует, что уменьшение коэффициента трения качения при неизменном внутреннем давлении ведет к уменьшения радиального и окружного напряжений на внешней границе сферического сосуда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 448 с.

2. *Ивлев Д. Д.* Механика пластических сред: в 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 448 с.

3. *Радаев Ю. Н.* О t-гиперболичности пространственных задач теории пластичности / Ю. Н. Радаев В. А. Гудков// Вестник Самарского ГУ. — 2005. — № 3(37). — С. 57—70.

4. *Радаев Ю. Н.* Трехмерные уравнения связной задачи математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного равновесия. — 2007. — № 1. — С. 90—121.

5. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. — М.: Высш. школа., 1969. — 608 с.

6. *Ehlers W., Volk W.* On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar elasto-plastic solid materials // Int. I. Solids and Struct. — 1998. — 34—35, v. 35. — P. 4597—4617.

7. *Вервейко Н. Д., Купцов, А. В.* Итерационный метод решения задач теории идеальной пластичности // Вестник ВГУ. Серия Физика, Математика. — 2005. — № 1. — С. 149—153.

8. *Вервейко Н. Д., Купцов, А. В.* Метод характеристик решения пространственной задачи идеальной пластичности при условии Мизеса. — М.: Наука РАН, МТТ. — С. 181—192.

9. *Вервейко Н. Д., Купцов А. В.* Пространственная задача теории пластичности модели Мизеса. — Воронеж : ВГУ, 2008. — 116 с.

10. *Вервейко Н. Д., Фролов, А. Л.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния связных гранулированных материалов. — Воронеж : ВВВАИУ, 2006. — 142 с.

Вервейко Николай Дмитриевич — доктор технических наук, профессор. Воронежский государственный университет
E-mail: ver38@mail.ru
Тел.: 8-910-245-50-59

Ерохина Евгения Николаевна — аспирант. Воронежский государственный университет
E-mail: erokhina1985@mail.ru
Тел.: 8-960-133-27-19

Verveyko Nikolay Dmitrievich — doctor of techical science, professor. Voronezh State University
E-mail: ver38@mail.ru
Tel.: 8-910-245-50-59

Erohina Evgeniya Nicolaevna — postgraduate student. Voronezh State University
E-mail: erokhina1985@mail.ru
Tel.: 8-960-133-27-19