УДК 511

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ВЕСОВОГО РЕШЕТА К ОЦЕНКЕ ПОЧТИ ПРОСТОГО ЧИСЛА В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Е. В. Вахитова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.10.2010 г.

Аннотация: в работе получена оценка почти простого числа в арифметической прогрессии.

Ключевые слова: метод, решето, веса, число, прогрессия, оценка.

Abstract: in this paper we obtain an estimate for almost prime numbers in an arithmetic progression.

Key word: method, sieve, weights, number, progression, estimation.

ВВЕДЕНИЕ

В теории метода весового решета, активно разрабатываемого в современной теории чисел, исследованы методы весового решета с весами Бухштаба [1], весами Рихерта [2], весами Бухштаба—Лабордэ [3] и весами Бухштаба нового типа [4], [5].

В настоящей работе дано приложение метода весового решета с весами Бухштаба [1] в непрерывной форме, полученной Лабордэ [3] (т.е. с весами Бухштаба—Лабордэ) к оценке почти простого числа в арифметической прогрессии.

Исследованию наименьшего почти простого числа p_r в арифметической прогрессии посвящены работы ряда математиков.

В 1965 году Левин Б. В. ([6], теорема 1 и теорема 3) получил для $kn+l: p_2 \le k^{2,3691}$, для $kp+l: p_4 \le k^{2,61}$, а, если справедлива расширенная гипотеза Римана, то $p_3 \le k^{3,02}$.

В дальнейшем были получены результаты для p_2 из арифметической прогрессии $kn+l, p_2 \le k^B, B-$ некоторая постоянная, не зависящая от k.

В 1969 году Рихерт Х.-Э. [2] получил $B = 2,20$.

В 1978 году Лабордэ М. [7] получил $B = 2,13$.

В 1978 году Хис-Браун Д. Р. ([8], теорема 1) $-B = 1,965$.

В 1982 году Гривс Г. [9], [10] $-B = 1,937$.

В 1982 году Иванец Х. ([11], теорема 13) $-B = 1,845$.

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим последовательность

$$A = \Big\{kn + l \mid k,n,l \in N, (k,l) = \\ = 1, 0 < l < k, n \le x\Big\}, \quad (1)$$

где x достаточно большое положительное число.

Обозначим через p_r r-почти простое число, т.е. число, имеющее в разложении r положительных простых множителей с учетом их кратности, $r \in N, r \ge 2$. Пусть $p_r \le k^B$, где B — некоторая постоянная, не зависящая от k.

Поставим задачу: получить оценку почти простого числа p_r в конечной последовательности A. При этом вначале потребуется получить оценку снизу числа r-почти простых чисел в последовательности А.

Введем условие: существует некоторая постоянная $M > 0$, такая, что

$$\left|a_n\right| \le X^M \quad (2)$$

для всех элементов a_n из последовательности А, где $X \in R$, X — достаточно большое положительное число.

Теорема 1. Пусть последовательность А определена равенством (1), выполнено условие (2), $a,b,c \in R$, причем $1 \le b < c < a, 2c - b - 1 > 0$, $Ma = 1 + b + c$. Тогда имеет место следующая оценка:

$$\sum_{p_r \in A} 1 \ge \frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)} \frac{a}{4(2c-b-1)} K_0(a,b,c) \frac{x}{\ln x}$$

для достаточно большого x, где $\varepsilon > 0, \varphi(k)$ — функция Эйлера, $K_0(a,b,c)$ определено равенством:

$$K_0(a,b,c)=(c-1)\ln 3-(c-b)\ln\frac{b}{4-b}-$$
$$-\ln a\ln\frac{3a}{4-b}-a\ln a\ln\frac{2b}{b+1}+$$
$$+a\ln\frac{2a}{b+1}\ln\frac{3(b+1)}{2(4-b)}-\frac{4(b-1)}{3}+ \qquad (3)$$
$$+\frac{8}{3}\ln\frac{b+1}{2}-c\ln\frac{c}{b}+(4-c)\ln\frac{4-b}{4-c}.$$

Усли в теореме 1 величина $K_0(a,\,b,\,c)>0$, то $\exists\, p_r\in A$. Остается осуществить выбор параметров a, b, c весового решета.

Теорема 2. Существует p_2 из арифметической прогрессии (1), такое, что при $k\ge k_0$ (k_0 — достаточно большое фиксированное число), будет $p_2\le k^B, B=1,8164$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для доказательства теоремы 1 потребуются следующие оценки.

Лемма 1. Пусть u и v — постоянные числа или переменные величины, зависящие от x, но изменяющиеся в конечном интервале $2\le u<v<B$. Тогда

$$\sum_{x^{\frac{1}{v}}\le p<x^{\frac{1}{u}}}\frac{1}{p\ln\frac{x}{p}}=\frac{1}{\ln x}\ln\frac{v-1}{u-1}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right),$$

где p — простое число, B — постоянная, $x\ge 2$.

Лемма 1 доказана в работе [12]. Автором она доказана другим способом, с применением леммы Абеля, согласно которой

$$\sum_{a\le n<b}c_n f(n)=-\int_a^b(\sum_{n<z}c_n)f'(z)dz+(\sum_{n<b}c_n)f(b).$$

Обозначим через $S(A;z)$ — число элементов в последовательности A, у которых наименьший положительный простой делитель $p_n\ge z$, а через $S(A_p;z)$ — число элементов в последовательности A_p, у которых $p_n\ge z$, где $A_p=\left\{a_n\in A\mid a_n\equiv 0(mod p)\right\}$.

Будем использовать следующие оценки из работы [11]:

$$S(A;\,z)\ge\frac{x}{\varphi(k)\ln z^4}(2\ln 3+O(\varepsilon)), \qquad (4)$$

$$S(A_p;\,z)\le\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{p\ln\frac{z^4}{p}}+R, \qquad (5)$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\varepsilon>0$,

$$R=\sum_{n<A'}\sum_{m\le x^{\alpha}k^{-1}}\sum_{m'\le x^{\alpha'}k^{-3/4},(mm',k)=1}a_m(n)b_{m'}(n)r(A_p;mm'),$$

$$A'=exp(8e^{-3}),\ \alpha=1-3\varepsilon,\ \alpha'=\frac{1}{2}-4\varepsilon,\ m,m'\in N,$$

$$\left|a_m(n)\right|\le 1,\left|b_{m'}(n)\right|\le 1,\ (pmm',k)=1,\ \ r(A_p;\,mm')=$$

$$=\left|\{n\in A_p,\ n\equiv 0(mod\ mm')\}\right|-\frac{x}{kmm'}.$$

Будем применять метод весового решета с весами Бухштаба—Лабордэ [3]. Приведем веса, обозначив весовую функцию через $T_{Buch-Lab}(X)$.

$$T_{Buch-Lab}(X)=$$
$$=\frac{1}{2c-b-1}\left\{(c-b)\sum_{X^{\frac{1}{a}}\le p\le X^{\frac{b}{a}}}S\left(A_p;X^{\frac{1}{a}}\right)+\right.$$
$$+a\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}}(\sum_{X^s\le p\le X^{\frac{b+1}{a}-s}}S(A_p;X^s))ds+ \qquad (6)$$
$$+\sum_{X^{\frac{1}{a}}\le p\le X^{\frac{b+1}{2a}}}\left((b+1)-2a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S(A_p;p)+$$
$$\left.+\sum_{X^{\frac{b}{a}}\le p\le X^{\frac{c}{a}}}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S\left(A_p;X^{\frac{1}{a}}\right)\right\},$$

где $a,b,c\in R,\ 1\le b\le c\le a,\ Ma=b+(r-1)c+1,\ r\in N,\ r\ge 2.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Получим оценку сверху слагаемых суммы, определенной равенством (6), применяя оценку (5), а затем лемму 1.

Тогда будем иметь:

1) $$S_1=(c-b)\sum_{X^{\frac{1}{a}}\le p\le X^{\frac{b}{a}}}S\left(A_p;X^{\frac{1}{a}}\right)\le$$
$$\le\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{a(c-b)}{4}\ln\frac{3b}{4-b}+R_1(x),$$

где

$$R_1(x)=(c-b)\sum_{X^{\frac{1}{a}}\le p\le X^{\frac{b}{a}}}R+O\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln^2 x}\right).$$

2) $$S_2(x)=a\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}}\left(\sum_{X^s\le p\le X^{\frac{b+1}{a}-s}}S\left(A_p;X^s\right)\right)ds\le$$

$$\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{a}{4}\left(-\ln\frac{5}{3}\ln\frac{b+1}{2}+\ln\frac{5}{3}\ln\frac{b+1}{2a}+\right.$$
$$+\ln a\ln\frac{5b}{4-b}-a\ln a\ln\frac{b+1}{2b}$$
$$\left.+a\ln\frac{b+1}{2a}\ln\frac{3(b+1)}{2(4-b)}\right)+R_2(x),$$

где

$$R_2(x)=a\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}}\left(\sum_{X^s\le p\le X^{\frac{b+1}{a}-s}}R\right)ds+O\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln^2 x}\right).$$

3) $$S_3(x)=\sum_{X^{\frac{1}{a}}\le p\le X^{\frac{b+1}{2a}}}\left((b+1)-2a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S\left(A_p;p\right)\le$$
$$\le\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{a}{3}\left(b-1-2\ln\frac{b+1}{2}\right)+R_3(x),$$

где

$$R_3(x)=\sum_{X^{\frac{1}{a}}\le p\le X^{\frac{b+1}{2a}}}\left((b+1)-2a\frac{\ln p}{\ln X}\right)R+$$
$$+O\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln^2 x}\right).$$

4) $$S_4(x)=\sum_{X^{\frac{b}{a}}\le p\le X^{\frac{c}{a}}}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S\left(A_p;X^{\frac{1}{a}}\right)\le$$
$$\le\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{a}{4}\left(c\ln\frac{c}{b}-(4-c)\ln\frac{4-b}{4-c}\right)+$$
$$+R_4(x),$$

где

$$R_4(x)=\sum_{X^{\frac{b}{a}}\le p\le X^{\frac{c}{a}}}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)R+O\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln^2 x}\right).$$

Для остаточного члена $\sum_{i=1}^{4}R_i(x)$, получим оценку:

$$\sum_{i=1}^{4}R_i(x)=O\left(\frac{x^{1-e}}{\varphi(k)\ln x}\right).$$

Применяя оценку снизу (4) для $S\left(A;X^{\frac{1}{a}}\right)$, получим:

$$S\left(A;X^{\frac{1}{a}}\right)\ge\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{a}{4}\ln 3.$$

После проведения необходимых преобразований для разности $S\left(A;X^{\frac{1}{a}}\right)-\frac{S(x)}{2c-b-1}$, где $S(x)=\sum_{i=1}^{4}S_i(x)$, получим оценку теоремы 1. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

По теореме 1 имеем:

$$\sum_{p_r\in A}1\ge\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}K_0(a,b,c)\frac{a}{4(2c-b-1)}\frac{x}{\ln x}$$

для достаточно больших x, где $K_0(a,b,c)$ определено равенством (3) и кроме того, при этом выполнено условие $Ma=1+b+c$. Выберем параметры весового решета следующим образом: $a=4, b=3,91, c=3,99$. Тогда получим, что

$$\sum_{p_r\in A}1\ge 0,4406\frac{1}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}$$

для достаточно больших x.

Учитывая, что $B=\frac{1+b+c}{1+b+c-a}$, при выбранных a,b,c находим тогда следующее значение величины B: $B=\frac{8,9}{4,9}\le 1,81632653\le$ $\le 1,8164$.

Таким образом, существует $p_2, p_2\equiv l(\mathrm{mod}\, k)$, $0<l<k, k\ge k_0$ (k_0 — достаточно большое фиксированное число), такое, что $p_2\le k^B, B=1,8164$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухштаб А. А.* Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета // УМН. — 1967. — Т. 22. — № 3 (135). — С. 199—226.

2. *Richert H.-E.* Selberg sieve with weights // Mathematika. — 1969. — V. 16. — № 31. — P. 1—22.

3. *Laborde M.* Buchstabs sifting weights // Mathematika. — 1979. — V. 26. — P. 250—257.

4. *Бухштаб А. А.* Новый тип весового решета // Всесоюз. конф. “Теория чисел и её приложения”. Тез. докл. — Тбилиси, 1985. — С. 22—24.

5. *Вахитова Е. В.* Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66. — № 1. — С. 38—49.

6. *Левин Б. В.* О наименьшем почти простом числе арифметической прогрессии и последовательности k^2x^2+l // УМН. — 1965. — Т. 20. — № 4 (124). — С. 158—162.

7. *Laborde M.* Les sommes trigonometriques de Chen et les poids de Buchstabs en theory du crible. These presentee a luniversite de Paris-sud, 1978. — 48 p.

8. *Heath-Brown D. R.* Almost-primes in arithmetic progressions and short intervals // Math. proceed.

Camb. philos. soc. — 1978. — V. 83. — P. 357—375.

9. *Greaves G.* A weighted sieve of Brun type // Acta arith. — 1982. — V. 40. — P. 297—332.

10. *Greaves G.* The weighted linear sieve and Selbergs 2-method // Acta arith. — 1986. — V. 47. — P. 71—96.

11. *Iwaniec H.* On the Brun-Titchmarsh theorem // J. Math. Soc. Japan — 1982. — V. 34. — № 1. — P. 95—123.

12. *Бухштаб А. А.* Асимптотическая оценка одной общей теоретикочисловой функции // Матем. сб. — 1937. — Т. 2 (44). — № 6. — С. 1239—1246.

Вахитова Екатерина Васильевна — кандидат физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет

E-mail: algebraist@yandex.ru

Тел.: 8-960-106-30-94

Vakhitova Ekaterina Vasilevna — candidate of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Departament digital technologies, Voronezh State University

E-mail: algebraist@yandex.ru

Tel.: 8-960-106-30-94