УДК 517. 983

О ЧИСЛЕ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ, КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

В. М. Брук

Саратовский государственный технический университет

Поступила в редакцию 22.10.2010 г.

Аннотация: в конечномерном гильбертовом пространстве рассматривается уравнение $l[y]-\mathcal{C}_\lambda y=0$, где l — формально самосопряженное дифференциальное выражение, $\mathcal{C}_\lambda=\mathcal{C}_\lambda(t)$ — неванлинновская операторная функция от λ при почти всех фиксированных t. Доказывается, что в каждой полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda>0$, $\mathrm{Im}\lambda<0$ постоянно число линейно независимых квадратично интегрируемых с весом $(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\mathrm{Im}\mathcal{C}_\lambda$ решений этого уравнения. Доказательство основано на постоянстве в верхней и нижней полуплоскостях дефектных чисел голоморфного семейства минимальных линейных отношений, связанных с этим уравнением.
Ключевые слова: линейное отношение, дифференциальное уравнение, неванлинновская функция, голоморфное семейство линейных отношений, индекс дефекта.

Abstract: we consider the equation $l[y]-\mathcal{C}_\lambda y=0$ in the finite-dimensional Hilbert space, where l is a formal self adjoint expression, $\mathcal{C}_\lambda=\mathcal{C}_\lambda(t)$ is a Nevanlinna operator function of λ for almost fixed t. We prove that the number of linearly independent quadratically integrable with weight $(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\mathrm{Im}\mathcal{C}_\lambda$ solutions of this equation does not depend of λ for $\mathrm{Im}\lambda>0$ and for $\mathrm{Im}\lambda<0$. The proof rests on the constancy (for $\mathrm{Im}\lambda>0$ and for $\mathrm{Im}\lambda<0$) of deficiency numbers of the family of minimal linear relations that are associated with this equation.
Key words: linear relation, differential equation, Nevanlinna function, holomorphic family of linear relations, deficiency number.

ВВЕДЕНИЕ

В известных работах Г. Вейля изучался оператор Штурма—Лиувилля на полуоси $(0,\infty)$ методом предельного перехода от конечного интервала к полуоси. При этом возникало дробно-линейное преобразование, которое переводило верхнюю полуплоскость в круг. Когда интервал расширяется, эти круги гнездятся и возможны два случая: 1) пересечение кругов является кругом; 2) пересечение кругов является точкой. Возникает проблема: если при одном значении параметра $\lambda=\lambda_0$ $(\mathrm{Im}\lambda_0>0)$ имеет место случай предельного круга (предельной точки), то будет ли иметь место то же при всех λ с $\mathrm{Im}\lambda>0$?

Эта проблема в более общей постановке может быть сформулирована так. Пусть H — конечномерное гильбертово пространство и l — формально самосопряженное дифференциальное выражение, коэффициенты которого — операторы в H (т.е. матрицы). Обозначим через $N_+(\lambda)$ (при $\mathrm{Im}\lambda>0$) и $N_-(\lambda)$ (при $\mathrm{Im}\lambda<0$) число линейно независимых решений уравнения $l[y]-\lambda y=0$, принадлежащих $L_2(H;0,\infty)$. Верно ли, что функции $N_+(\lambda)$, $N_-(\lambda)$ постоянны? Такой задаче можно поставить в соответствии симметрический оператор, дефектные числа (n_+,n_-) которого таковы, что $n_+=N_+(\lambda)$, $n_-=N_-(\lambda)$.

С. А. Орлов [1] и Ф. С. Рофе-Бекетов [2] (см. также [3]) рассмотрели уравнение

$$l[y]-\mathcal{C}_\lambda y=0, \tag{1}$$

где $\mathcal{C}_\lambda=\mathcal{C}_\lambda(t)$ — неванлинновская операторная функция при почти всех фиксированных t, т.е. голоморфная по λ при $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ функция, значениями которой являются операторы в H такие, что $\mathcal{C}^*_{\bar\lambda}(t)=\mathcal{C}_\lambda(t)$ и $\mathrm{Im}\mathcal{C}_\lambda(t)/\mathrm{Im}\lambda\geqslant 0$. Пусть $\mathcal{N}_+(\lambda)$ (при $\mathrm{Im}\lambda>0$) и $\mathcal{N}_-(\lambda)$ (при $\mathrm{Im}\lambda<0$) — число линейно независимых решений уравнения (1), удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty((\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\mathrm{Im}\mathcal{C}_\lambda(t)y(t),y(t))dt<\infty. \tag{2}$$

В [1, 2, 3] доказано, что числа $\mathcal{N}_+(\lambda)$, $\mathcal{N}_-(\lambda)$ постоянны. Доказательство в [1] основано на развитой в этой же работе теории гнездящихся

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00276

матричных кругов. Там же отмечается [1, с. 596], что не существует оператора, дефектные числа которого совпадали бы для уравнения (1) с числами $\mathcal{N}_+(\lambda)$, $\mathcal{N}_-(\lambda)$. (В [1] рассмотрен случай уравнения первого порядка).

В [3] рассмотрен случай $\mathcal{C}_\lambda(t) = \lambda A(t)$ с операторами $A(t) \geqslant 0$. В этой работе ([3, с. 6]) отмечается, что возможность вырождения по t матричного веса существенно осложняет включение рассматриваемого уравнения в общую теорию операторов в гильбертовом пространстве, и поэтому при исследовании уравнения используются теоретико-функциональные методы. Те же методы применялись в [2].

В данной работе уравнению (1) сопоставляется голоморфное семейство $\lambda \to L_0(\lambda)$ ($\mathrm{Im}\lambda \neq 0$) минимальных отношений в пространстве $\mathfrak{H} = L_2(H, \mathrm{Im}\mathcal{C}_{\lambda_0}; 0, \infty)$ (λ_0 фиксировано, $\mathrm{Im}\lambda_0 > 0$). Доказывается, что дефектные числа $n(\lambda) = \dim(\mathfrak{H} \ominus \mathcal{R}(L_0(\lambda)))$ отношений из этого семейства постоянны в каждой полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $\mathrm{Im}\lambda < 0$ ($\mathcal{R}$ — область значений). Обозначив через n_+, n_- значения $n(\lambda)$ при $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $\mathrm{Im}\lambda < 0$ соответственно, получим, что $\mathcal{N}_\pm(\lambda) = n_\pm + \dim Q_0$, где Q_0 — нулевое многообразие, т.е. множество $y(t)$, для которых интеграл в левой части (2) равен 0.

В случае, когда $\mathcal{C}_\lambda(t) = \lambda A(t)$, где операторы $A(t) \geqslant 0$, в работах [4], [5] установлено, что $\mathcal{N}_+(\lambda)$, $\mathcal{N}_-(\lambda)$ являются дефектными числами симметрического отношения.

1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть H — конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим на конечном или бесконечном интервале (a,b) дифференциальное выражение l порядка r ($r = 2n$ или $r = 2n+1$)

$$l[y] = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\{(p_{n-k}y^{(k)})^{(k)} - i[(q_{n-k}y^{(k)})^{k-1} + \\ +(q_{n-k}y^{(k-1)})^{(k)}]\} + p_n y, \\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\{i[(q_{n-k}y^{(k)})^{(k+1)} + (q_{n-k}y^{(k+1)})^{k}] + \\ +(p_{n-k}y^{(k)})^{(k)}\}. \end{cases}$$

Коэффициенты $p_k = p_k(t)$, $q_j = q_j(t)$ этого выражения являются самосопряженными операторами в пространстве H, причем $p_0(t)$ (при $r = 2n$) и $q_0(t)$ (при $r = 2n+1$) имеют обратные при почти всех $t \in (a,b)$. Предполагается, что функция q_0 (при $r = 2n+1$) непрерывно дифференцируема, функции p_k, q_j измеримы, и на каждом замкнутом интервале $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$ интегрируемы нормы функций

$$p_0^{-1},\ p_0^{-1}q_0,\ q_0p_0^{-1}q_0,\ p_1, \dots, p_n,\ q_0, \dots, q_{n-1}$$
(в случае $r = 2n$),

$$q_0',\ q_1, \dots, q_n,\ p_0, \dots, p_n$$
(в случае $r = 2n+1$).

Выражение l рассматривается как квазидифференциальное. Квазипроизводные $y^{[k]}$ для выражения l определены в [3] следующим образом. Если $r = 2n$, то

$$y^{[j]} = y^{(j)}\ (j = 0,1,\dots,n-1);\ y^{[n]} = p_0 y^{(n)} - iq_0 y^{(n-1)};$$

$$y^{[n+k]} = -(y^{[n+k-1]})' + p_k y^{(n-k)} + \\ +i\left[q_{k-1}y^{(n-k+1)} - q_k y^{(n-k-1)}\right] \\ (k = 1,\dots,n; q_n \equiv 0).$$

Если $r = 2n+1$, то

$$y^{[j]} = y^{(j)}\ (j = 0,1,\dots,n-1);\ y^{[n]} = -\,iq_0 y^{(n)};$$

$$y^{[n+k+1]} = -(y^{[n+k]})' + p_k y^{(n-k)} + \\ +i\left[q_k y^{(n-k+1)} - q_{k+1} y^{(n-k-1)}\right] \\ (k = 0,1,\dots,n; q_{n+1} \equiv 0).$$

Пусть $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_\lambda(t)$ — функция со значениями в множестве линейных операторов в H, удовлетворяющая следующим условиям из [6]:

(a) существуют такие множества $\mathbb{C}_0 \supset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $\mathcal{I}_0 \subset (a,b)$, что мера множества $(a,b) \setminus \mathcal{I}_0$ равна нулю и для каждой точки множества $\mathbb{C}_0$ найдется независящая от $t \in \mathcal{I}_0$ окрестность, в которой функция $\lambda \to \mathcal{C}_\lambda(t)$ голоморфна по λ;

(b) при любом $\lambda \in \mathbb{C}_0$ функция $\mathcal{C}_\lambda$ локально интегрируема на (a,b);

(c) $\mathcal{C}_\lambda^*(t) = \mathcal{C}_{\bar\lambda}(t)$ и $\mathrm{Im}\mathcal{C}_\lambda(t) / \mathrm{Im}\lambda$ является неотрицательным оператором при всех $t \in \mathcal{I}_0$ и всех λ таких, что $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$.

Пусть $\mathcal{B}_\lambda(t) = \mathrm{Re}\mathcal{C}_\lambda(t)$, $\mathcal{A}_\lambda(t) = \mathrm{Im}\mathcal{C}_\lambda(t)$. Условие (c) влечет $\mathcal{B}_{\bar\lambda}(t) = \mathcal{B}_\lambda(t)$, $\mathcal{A}_{\bar\lambda}(t) = -\,\mathcal{A}_\lambda(t)$. При $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ положим $\mathfrak{a}_\lambda(t) = \mathcal{A}_\lambda(t) / \mathrm{Im}\lambda$. Из условия (c) следует также, что для всех $\mu \in \mathbb{C}_0 \cap \mathbb{R}$ и всех $t \in \mathcal{I}_0$ существует $\lim_{\lambda\to\mu\pm i0}\mathfrak{a}_\lambda(t)$, обозначаемый $\mathfrak{a}_\mu(t)$. Функция $\mathfrak{a}_\mu$ локально интегрируема на (a,b) [6]. Далее используются следующие утверждения из [6].

Утверждение 1. *Пусть для некоторого элемента $g \in H$ существуют такие числа*

$t_0 \in \mathcal{I}_0$ *и* $\lambda_0 \in \mathbb{C}_0$, *что* $\mathfrak{a}_{\lambda_0}(t_0)g = 0$. *Тогда для всех* $\lambda \in \mathbb{C}_0$ *справедливы равенства* $\mathfrak{a}_\lambda(t_0)g = 0$ *и* $(\mathcal{B}_\lambda(t_0) - \mathcal{B}_{\lambda_0}(t_0))g = 0$.

Утверждение 2. *Пусть* K *— произвольный компакт,* $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}_0$. *Тогда существуют такие постоянные* $k_1, k_2 > 0$, *что для всех* $h \in H$, $t \in \mathcal{I}_0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{K}$ *выполняется неравенство* $k_1(\mathfrak{a}_{\lambda_1}(t)h,h)^{1/2} \le (\mathfrak{a}_{\lambda_2}(t)h,h)^{1/2} \le k_2(\mathfrak{a}_{\lambda_1}(t)h,h)^{1/2}$ *(таким образом, постоянные* k_1, k_2 *не зависят от* $t \in \mathcal{I}_0$, $\lambda \in \mathrm{K}$).

Обозначим $l_\lambda[y] = l[y] - \mathcal{C}_\lambda y$. Пусть $W_{j,\lambda}(t)$ ($\lambda \in \mathbb{C}_0$) — операторное решение уравнения (1) на интервале (a,b), удовлетворяющее начальным условиям: $W_{j,\lambda}^{[k-1]}(t_0) = \delta_{j,k}E$, где $t_0 \in (a,b)$, $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, E — тождественный оператор, $j,k = 1,\dots,r$. Обозначим через $W_\lambda(t)$ операторную однострочную матрицу $W_\lambda(t) = (W_{1,\lambda}(t),\dots,W_{r,\lambda}(t))$. При фиксированных t, λ оператор $W_\lambda(t)$ отображает пространство H^r в H. Сопряженный к нему оператор $W_\lambda^*(t)$ действует из H в H^r. При фиксированном t функция $\lambda \to W_\lambda(t)$ голоморфна на $\mathbb{C}_0$.

Функции y, для которой выражение $l_\lambda[y]$ имеет смысл, поставим в соответствие функцию $\hat{y} = (y^{[0]}, y^{[1]},\dots,y^{[r-1]})^T$ (здесь T в верхнем индексе обозначает транспонирование). Если $u = (u_1,\dots,u_m)$ — какая-либо система функций, к которым применима операция l_λ, то через $\hat{u}$ обозначим матрицу с j-столбцом $\hat{u}_j$ ($j = 1,\dots,m$). Аналогичные обозначения используются для операторных функций. Отметим, что все квазипроизводные до порядка $r-1$ включительно для выражений l и l_λ совпадают.

Для выражения l при $r = 2n$ и при $r = 2n+1$ введем в рассмотрение операторные матрицы порядков $2n$ и $2n+1$ соответственно:

$$J_{2n}(t) = \begin{pmatrix} & & & & & -E \\ & & & & \cdots & \\ & & & -E & & \\ & & E & & & \\ & \cdots & & & & \\ E & & & & & \end{pmatrix},$$

$$J_{2n+1}(t) = \begin{pmatrix} & & & & & & -E \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & -E & & \\ & & & 2iq_0(t) & & & \\ & & E & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ E & & & & & & \end{pmatrix},$$

где все неотмеченные элементы равны нулю. (Элемент $2iq_0(t)$ в матрице $J_{2n+1}(t)$ стоит на пересечении $n+1$-столбца и $n+1$-строки.)

Пусть y,z — две функции, для которых выражение l имеет смысл и $l[y]$, $l[z]$ локально суммируемы на (a,b). Для этих функций формула Лагранжа имеет вид

$$\int_\alpha^\beta (l[y],z)dt - \int_\alpha^\beta (y,l[z])dt = (J_r(t)\hat{y}(t),\hat{z}(t))\,|_\alpha^\beta, \quad a < \alpha \le \beta < b. \tag{3}$$

Полагая в (3) $y(t) = W_\lambda(t)c$, $z(t) = W_{\bar\lambda}(t)d$ ($c,d \in H^r$) и учитывая, что $l[y] = (\mathcal{B}_\lambda + i\mathcal{A}_\lambda)y$, $l[z] = (\mathcal{B}_\lambda - i\mathcal{A}_\lambda)z$, получим

$$\widehat{W}^*_{\bar\lambda}(t)J_r(t)\widehat{W}_\lambda(t) = J_r(t_0).$$

Отсюда и из “метода вариации произвольных постоянных” следует, что общее решение уравнения $l_\lambda[y] = f$, где f — локально суммируемая на (a,b) функция, представимо в виде

$$y(t) = W_\lambda(t)\left(c + J_r^{-1}(t_0)\int_{t_0}^t W_{\bar\lambda}^*(s)f(s)ds\right) \quad (c \in H^r). \tag{4}$$

2. ГОЛОМОРФНЫЕ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Пусть $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ — банаховы пространства. Под линейным отношением T понимается любое линейное многообразие $\mathrm{T} \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$. Терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в [7]. Далее используются обозначения: $\{x_1, x_2\}$ — упорядоченная пара, составленная из элементов x_1, x_2; $\ker \mathrm{T}$ — множество таких элементов x, что пара $\{x,0\} \in \mathrm{T}$; $\mathcal{D}(\mathrm{T})$ — область определения, $\mathcal{R}(\mathrm{T})$ — область значений отношения T. Линейные операторы считаются линейными отношениями, поэтому записи $\mathrm{S} \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, $\{x_1, x_2\} \in \mathrm{S}$ используются и для операторов S. Все отношения (и операторы), встречающиеся в дальнейшем, считаются линейными, поэтому слово “линейное” часто будет опускаться.

Под семейством линейных многообразий в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ понимается функция $\lambda \to \mathcal{T}(\lambda)$ ($\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$), значениями которой являются линейные многообразия $\mathcal{T}(\lambda) \subset \mathbf{B}$. Семейство подпространств (замкнутых) $\mathcal{T}$ называется голоморфным в точке $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, если существуют такое банахово пространство $\mathbf{B}_0$ и такое голоморфное в окрестности λ_1 семейство $\lambda \to \mathcal{K}(\lambda)$ ограниченных линейных операторов $\mathcal{K}(\lambda): \mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}$, что при каждом фиксированном λ оператор $\mathcal{K}(\lambda)$ взаимно однозначно отображает $\mathbf{B}_0$ на $\mathcal{T}(\lambda)$. Семейство подпространств называется голоморфным в области $\mathcal{D}$, если оно голоморфно в каждой точке области $\mathcal{D}$. Поскольку замкнутое линейное отношение $\mathrm{T}(\lambda)$ является подпространством в $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, то определение голоморфности относится и к семействам линейных отношений. Это определение обобщает соответствующее определение голоморфных семейств замкнутых операторов [8, с. 460]. Далее используется следующее утверждение, доказанное в [9], [10] для семейств замкнутых отношений, однако доказательство дословно переносится на случай подпространств.

Утверждение 3. *Пусть $\mathcal{T}$ — семейство замкнутых подпространств в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ и подпространство $\mathcal{T}(\lambda_1)$ допускает прямое дополнение в $\mathbf{B}$, т.е. существует такое подпространство $\mathfrak{N} \subset \mathbf{B}$, что справедливо разложение в прямую сумму $\mathbf{B} = \mathcal{T}(\lambda_1) \dotplus \mathfrak{N}$. Семейство $\mathcal{T}$ является голоморфным в точке λ_1 тогда и только тогда, когда при λ, достаточно близких к λ_1, пространство $\mathbf{B}$ разлагается в прямую сумму своих подпространств $\mathcal{T}(\lambda)$ и $\mathfrak{N}$, и семейство $\lambda \to \mathcal{P}(\lambda)$ проекторов $\mathcal{P}(\lambda)$ пространства $\mathbf{B}$ на $\mathcal{T}(\lambda)$ параллельно $\mathfrak{N}$ является голоморфным в λ_1.*

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{T}$ — голоморфное в точке λ_1 семейство подпространств $\mathcal{T}(\lambda) \subset \mathcal{H}$. Тогда семейство $\zeta \to \mathcal{T}^{\perp}(\bar{\zeta})$ голоморфно в точке $\bar{\lambda}_1$. (Здесь и далее обозначаем $(\mathcal{T}(\bar{\zeta}))^{\perp} = \mathcal{T}^{\perp}(\bar{\zeta})$ и $M^{\perp} = \mathcal{H} \ominus M$, где $M \subset \mathcal{H}$ — замкнутое подпространство.)*

Доказательство. Согласно утверждению 3 $\mathcal{H} = \mathcal{T}(\lambda) \dotplus \mathfrak{N}$ и семейство проекторов $\mathcal{P}(\lambda)$ пространства $\mathcal{H}$ на $\mathcal{T}(\lambda)$ параллельно $\mathfrak{N}$ является голоморфным в λ_1. Тогда $\mathcal{Q}(\lambda) = E - \mathcal{P}(\lambda)$ — проектор $\mathcal{H}$ на $\mathfrak{N}$ параллельно $\mathcal{T}(\lambda)$. Поэтому $\ker \mathcal{Q}^*(\lambda) = \mathfrak{N}^{\perp}$, $\mathcal{R}(\mathcal{Q}^*(\lambda)) = \mathcal{T}^{\perp}(\lambda)$ и $(\mathcal{Q}^*(\lambda))^2 = \mathcal{Q}^*(\lambda)$. Следовательно, $\mathcal{Q}^*(\lambda)$ — проектор $\mathcal{H}$ на $\mathcal{T}^{\perp}(\lambda)$ параллельно $\mathfrak{N}^{\perp}$. Соответствующее разложение имеет вид $\mathcal{H} = \mathcal{T}^{\perp}(\lambda) \dotplus \mathfrak{N}^{\perp}$. Поскольку $\zeta \to \mathcal{Q}^*(\bar{\zeta})$ — голоморфное семейство в точке $\bar{\lambda}_1$, то семейство подпространств $\zeta \to \mathcal{T}^{\perp}(\bar{\zeta})$ голоморфно в $\bar{\lambda}_1$ согласно утверждению 3. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если семейство отношений $\lambda \to \mathcal{S}(\lambda) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ голоморфно в точке λ_1, то семейство $\zeta \to \mathcal{S}^*(\bar{\zeta})$ голоморфно в точке $\bar{\lambda}_1$.*

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\lambda \to \mathcal{S}(\lambda) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ — голоморфное в точке μ семейство линейных отношений со свойствами: $\mathcal{R}(\mathcal{S}(\mu))$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$ и отношение $\mathcal{S}^{-1}(\mu)$ является оператором. Тогда у точки μ существует такая окрестность, что для всех точек λ из этой окрестности отношение $\mathcal{S}(\lambda)$ имеет те же свойства (с заменой μ на λ) и $\dim \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}(\mathcal{S}(\lambda)) = \dim \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}(\mathcal{S}(\mu))$.*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}(\mathcal{S}(\mu))$ и положим $\mathfrak{N} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}_0$. Тогда справедливо разложение в прямую сумму $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \mathcal{S}(\mu) \dotplus \mathfrak{N}$. Действительно, любая пара $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ допускает единственное представление вида

$$\{x_1, x_2\} = \left\{\mathcal{S}^{-1}(\mu)Px_2, Px_2\right\} + \\ + \left\{x_1 - \mathcal{S}^{-1}(\mu)Px_2, P^{\perp}x_2\right\},$$

где P — ортопроектор $\mathcal{H}$ на $\mathcal{R}(\mathcal{S}(\mu))$, $P^{\perp} = E - P$. Поэтому согласно утверждению 3 при всех λ, достаточно близких к μ, справедливо разложение

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \mathcal{S}(\lambda) \dotplus \mathfrak{N}. \tag{5}$$

Это означает, что для всех пар $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ выполняется равенство

$$\{x_1, x_2\} = \{f_1, f_2\} + \{x_1 - f_1, x_2 - f_2\},$$

где $\{f_1, f_2\} \in \mathcal{S}(\lambda)$, $\{x_1 - f_1, x_2 - f_2\} \in \mathfrak{N}$. Если $f_2 = 0$, то $x_2 \in \mathcal{H}_0$. Поэтому $\{x_1, x_2\} \in \mathfrak{N}$. Единственность разложения (5) влечет $f_1 = 0$. Таким образом, $\mathcal{S}^{-1}(\lambda)$ — оператор. Докажем, что область значений $\mathcal{R}(\mathcal{S}(\lambda))$ замкнута. С этой целью рассмотрим оператор $U(\lambda): \mathcal{R}(\mathcal{S}(\mu)) \to \mathcal{H}$, действующий по формуле $U(\lambda)x = P_2\mathcal{P}(\lambda)\{\mathcal{S}^{-1}(\mu)x, x\}$, где $x \in \mathcal{R}(\mathcal{S}(\mu))$, $\mathcal{P}(\lambda)$ — проектор в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ на $\mathcal{S}(\lambda)$ параллельно $\mathfrak{N}$, соответствующий разложению (5), P_2 — естественный проектор $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ на второй множитель, т.е. $P_2\{x_1, x_2\} = x_2$. При фиксированном λ оператор $U(\lambda)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathcal{R}(\mathcal{S}(\mu))$ на $\mathcal{R}(\mathcal{S}(\lambda))$. Операторная функция $\lambda \to U(\lambda)$ голоморфна в окрестности μ и $U(\mu)x = x$. Поэтому при всех λ, достаточно близких к μ, множество $\mathcal{R}(\mathcal{S}(\lambda))$ замкнуто, так как при таких λ выполняется неравенство $\|U(\lambda)x\| \geqslant k\|x\|$ (постоянная $k > 0$ не зависит от x). Равенство размерностей получается из (5). Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть семейство отношений $\lambda \to \mathcal{S}(\lambda)$ голоморфно в связной области $\mathcal{D}$ и в любой точке $\mu \in \mathcal{D}$ выполняются все* *условия леммы 2. Тогда размерность* $\dim \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}(\mathcal{S}(\lambda))$ *постоянна в* $\mathcal{D}$.

Доказательство получается из того, что эта размерность постоянна в окрестности каждой точки $\mathcal{D}$.

3. СЕМЕЙСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ И МИНИМАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Зафиксируем какое-либо $\lambda_0 \in \mathbb{C}_0$ и в целях сокращения записи обозначим $A(t) = \mathfrak{a}_{\lambda_0}(t)$. На множестве непрерывных и финитных на интервале (a,b) функций со значениями в H введем квазискалярное произведение

$$(y,z)_A = \int_a^b \Big(A(t)\, y(t), z(t)\Big) dt. \tag{6}$$

Отождествляя с нулем те функции y, для которых $(y,y)_A = 0$, а затем производя пополнение, получим гильбертово пространство, обозначаемое $\mathfrak{H} = L_2(H, A(t); a, b)$. Элементами пространства $\mathfrak{H}$ являются классы функций, отождественных между собой по норме $\|y\|_A = \sqrt{(y,y)_A}$. Чтобы излишне не усложнять терминологию, класс функций с представителем y обозначаем тем же символом, а про функцию y будем говорить, что y принадлежит $\mathfrak{H}$. Равенства между функциями из $\mathfrak{H}$ понимаются как равенства соответствующих классов эквивалентности.

Из утверждений 1, 2 вытекает, что пространство $\mathfrak{H}$ не зависит от выбора точки $\lambda_0 \in \mathbb{C}_0$ в следующем смысле: если в (6) $A(t) = \mathfrak{a}_{\lambda_0}(t)$ заменить на $\mathfrak{a}_\lambda(t)$ $(\lambda \in \mathbb{C}_0)$ или на $\mathcal{A}_\lambda(t)$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$, то получится то же множество $\mathfrak{H}$ с эквивалентной нормой.

Согласно утверждению 1 множество $G(t) = \ker \mathfrak{a}_\lambda(t)$ $(t \in \mathcal{I}_0)$ не зависит от $\lambda \in \mathbb{C}_0$. Пусть $H(t) = H \ominus G(t)$; $A_0(t)$ — сужение оператора $A(t)$ на $H(t)$. Тогда $\mathcal{R}(\mathfrak{a}_\lambda(t)) = \mathcal{R}(A_0(t)) = H(t)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}_0$.

Положим $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t) = \mathcal{C}_\lambda(t) - \mathcal{C}_\mu(t)$, $\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(t) = \mathcal{B}_\lambda(t) - \mathcal{B}_\mu(t)$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}_0$, $t \in \mathcal{I}_0$. Утверждение 1 влечет $G(t) = \ker \mathfrak{a}_\lambda(t) \subset \ker \mathcal{B}_{\lambda,\mu}(t)$. Поэтому $\mathcal{R}(\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(t)) \subset \mathcal{R}(\mathfrak{a}_\lambda(t)) = H(t)$ и $\mathcal{R}(\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)) \subset H(t)$ для для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}_0$. Через $\mathbf{C}_{\lambda,\mu}$, $\mathbf{B}_{\lambda,\mu}$, $\mathbf{A}_\lambda$ обозначим соответственно операторы

$$y(t) \to A_0^{-1}(t)\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)y(t),\; y(t) \to A_0^{-1}(t)\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(t)y(t),$$
$$y(t) \to A_0^{-1}(t)\mathcal{A}_\lambda(t)y(t).$$

Операторы $\mathbf{C}_{\lambda,\mu}$, $\mathbf{B}_{\lambda,\mu}$, $\mathbf{A}_\lambda$ рассматриваются в пространстве $\mathfrak{H}$.

Теорема 1. *Операторы* $\mathbf{C}_{\lambda,\mu}$, $\mathbf{B}_{\lambda,\mu}$, $\mathbf{A}_\lambda$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{C}_0)$ *ограничены в* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Запишем функцию $\mathcal{C}_\lambda$ в виде (см., например [11, с. 520], [12, с. 36], [6])

$$\mathcal{C}_\lambda(t) = \operatorname{Re}\mathcal{C}_i(t) + \lambda\mathcal{U}(t) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau - \lambda} - \frac{\tau}{1+\tau^2}\right) d\sigma_t(\tau), \tag{7}$$

где $\mathcal{U}(t)$ — неотрицательные операторы в H, σ_t — неубывающая при любом фиксированном $t \in \mathcal{I}_0$ операторная функция в H такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\sigma_t(\tau)g, g)}{1+\tau^2} < \infty$ для всякого $g \in H$. Тогда

$$\mathfrak{a}_\lambda(t) = \mathcal{U}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_t(\tau)}{\left|\tau - \lambda\right|^2}. \tag{8}$$

Из (8), (9) для всех $g, h \in H$ получаем

$$\left|(\lambda - \mu)^{-1}((\mathcal{C}_\lambda(t) - \mathcal{C}_\mu(t))g, h)\right| \leqslant \\ \leqslant \left\|\mathcal{U}^{1/2}(t)g\right\|\left\|\mathcal{U}^{1/2}(t)h\right\| + \\ + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d\sigma_t(\tau)g, g)}{\left|t - \lambda\right|^2}\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d\sigma_t(\tau)h, h)}{\left|t - \mu\right|^2}\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \left(\left\|\mathcal{U}^{1/2}(t)g\right\|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d\sigma_t(\tau)g, g)}{\left|t - \lambda\right|^2}\right)^{1/2} \times \\ \times \left(\left\|\mathcal{U}^{1/2}(t)h\right\|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d\sigma_t(\tau)h, h)}{\left|t - \mu\right|^2}\right)^{1/2} = \\ = (\mathfrak{a}_\lambda(t)g, g)^{1/2}(\mathfrak{a}_\mu(t)h, h)^{1/2} = \\ = \left\|\mathfrak{a}_\lambda^{1/2}(t)g\right\|\left\|\mathfrak{a}_\mu^{1/2}(t)h\right\|.$$

Отсюда следует, что $\left|(\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)g, h)\right| \leqslant \left|\lambda - \mu\right|\left\|\mathfrak{a}_\lambda^{1/2}(t)g\right\|\left\|\mathfrak{a}_\mu^{1/2}(t)h\right\|$. Тогда согласно утверждению 2 существует такая постоянная $k_0 > 0$, не зависящая от $t \in \mathcal{I}_0$, что

$$\left|(\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)g, h)\right| \leqslant k_0 \left\|A^{1/2}(t)g\right\|\left\|A^{1/2}(t)h\right\|. \tag{9}$$

Поэтому для любого $g \in H(t)$ из (9) получаем

$$\left\|A_0^{-1/2}(t)\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)g\right\|^2 = (\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)g, A_0^{-1}(t)\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)g) \leqslant \\ \leqslant k_0 \left\|A^{1/2}(t)g\right\|\left\|A_0^{-1/2}(t)\mathcal{C}_{\lambda,\mu}^{(0)}(t)g\right\|.$$

Отсюда вытекает

$$\left\|A_0^{-1/2}(t)\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)g\right\| \leqslant k_0 \left\|A^{1/2}(t)g\right\|, \tag{10}$$

где $k_0 > 0$ не зависит от $t \in \mathcal{I}_0$. Пусть $y \in \mathfrak{H}$. Из (10), (6) имеем

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{C}_{\lambda,\mu} y\right\|_A^2 = \int_a^b \left\|A_0^{-1/2}(t)\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)y(t)\right\|^2 dt \leqslant \\ \leqslant k_0 \int_a^b \left\|A^{1/2}(t)y(t)\right\|^2 dt = k_0 \left\|y\right\|_A^2.\end{aligned} \tag{11}$$

Неравенство (11) влечет ограниченность оператора $\mathbf{C}_{\lambda,\mu}$.

Из утверждения 2 следует, что существует такая постоянная $k_1 > 0$, не зависящая от $t \in \mathcal{I}_0$, что для всех $g, h \in H$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_\lambda(t)g, h) = \left(\mathfrak{a}_\lambda^{1/2}(t)g, \mathfrak{a}_\lambda^{1/2}(t)h\right) \leqslant \\ \leqslant \left\|\mathfrak{a}_\lambda^{1/2}(t)g\right\|\left\|\mathfrak{a}_\lambda^{1/2}(t)h\right\| \leqslant k_1 \left\|A^{1/2}(t)g\right\|\left\|A^{1/2}(t)h\right\|.\end{aligned}$$

Таким образом, для оператора $\mathfrak{a}_\lambda$ выполняется неравенство (10), в котором $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)$ заменено на $\mathfrak{a}_\lambda(t)$. Повторяя соответствующие рассуждения для оператора $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)$ (с заменой $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}(t)$ на $\mathfrak{a}_\lambda(t)$), получим, что оператор $y(t) \to A_0^{-1}(t)\mathfrak{a}_\lambda(t)y(t)$ ограничен в $\mathfrak{H}$. Это влечет ограниченность оператора $\mathbf{A}_\lambda$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Ограниченность в $\mathfrak{H}$ оператора $\mathbf{B}_{\lambda,\mu}$ следует из равенства $\mathbf{B}_{\lambda,\mu} = \mathbf{C}_{\lambda,\mu} - i\mathbf{A}_\lambda + i\mathbf{A}_\mu$. Теорема доказана.

Следствие 3. *Операторная функция $\{\lambda, \mu\} \to \mathbf{C}_{\lambda,\mu}$ при фиксированном λ или μ голоморфна по другой переменной на $\mathbb{C}_0$ в пространстве $\mathfrak{H}$.*

Через Q_0 обозначим множество элементов $c \in H^r$, для которых функция $W_\mu(\cdot)c$ $(\mu \in \mathbb{C}_0)$ отождествлена с нулем в пространстве $\mathfrak{H}$, т.е. почти всюду $\left\|A(t)W_\mu(t)c\right\| = 0$. Из утверждения 1 следует, что равенства $\left\|A(t)W_\mu(t)c\right\| = 0$ и $\left\|\mathfrak{a}_\lambda(t)W_\mu(t)c\right\| = 0$ $(\lambda \in \mathbb{C}_0)$ выполняются одновременно. Следующая лемма установлена в [2], [6]. Доказательство может быть получено заменой в (4) $y(t)$ на $W_\mu(t)c$ и $f(s)$ на $\mathcal{C}_{\mu\lambda}(s)W_\mu(s)c$ $(c \in H^r)$.

Лемма 3. *Множество Q_0 не зависит от μ.*

Минимальное и максимальное отношения определим следующим образом. Через $L_0'(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{C}_0)$ обозначим отношение, состоящее из тех и только тех пар $\{y, f\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, которые удовлетворяют условиям: (а) y — финитная функция такая, что квазипроизводные $y^{[k]}$ существуют, абсолютно непрерывны до порядка $r-1$ включительно; (б) $l_\lambda[y](t) = A(t)f(t)$ почти при всех t. Замыкание отношения $L_0'(\lambda)$ обозначим $L_0(\lambda)$ и назовем минимальным отношением. Отношение $(L_0(\bar{\lambda}))^*$ назовем максимальным.

Теорема 2. *Семейства $\lambda \to L_0(\lambda)$, $\lambda \to (L_0(\bar{\lambda}))^*$ голоморфны на $\mathbb{C}_0$.*

Доказательство. Из равенства $L_0'(\mu) = L_0'(\lambda) + \mathbf{C}_{\lambda,\mu}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{C}_0)$ и из теоремы 1 следует $L_0(\mu) = L_0(\lambda) + \mathbf{C}_{\lambda,\mu}$. Отсюда и из следствия 3 получаем, что семейство $\lambda \to L_0(\lambda)$ голоморфно на $\mathbb{C}_0$. Голоморфность семейства $\lambda \to (L_0(\bar{\lambda}))^*$ вытекает из следствия 1. Теорема доказана.

Пусть $L'(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{C}_0)$ — отношение, состоящее из пар $\{y, f\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, удовлетворяющих тем же условиям (а), (б), что и пары из $L_0'(\lambda)$, за исключением условия финитности функции y. Замыкание отношения $L'(\lambda)$ обозначим $L(\lambda)$.

Лемма 4. *Справедливо равенство $L(\lambda) = (L_0(\bar{\lambda}))^*$ $(\lambda \in \mathbb{C}_0)$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{L}_0$, $(\tilde{L}_0)^*$, $\tilde{L}$ — отношения, построенные по дифференциальному выражению $l - \mathcal{B}_\lambda$ так же, как $L_0(\lambda)$, $(L_0(\bar{\lambda}))^*$, $L(\lambda)$ построены по выражению l_λ. Выражение $l - \mathcal{B}_\lambda$ является формально самосопряженным. Для такого выражения в [4], [5] доказано, что $(\tilde{L}_0)^* = \tilde{L}$. Теорема 1 и равенства $L_0(\lambda) = \tilde{L}_0 - i\mathbf{A}_\lambda$, $L(\lambda) = \tilde{L} - i\mathbf{A}_\lambda$, $\mathbf{A}_\lambda^* = -\mathbf{A}_{\bar{\lambda}}$ влекут требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 5. *При фиксированном λ $(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$ для любых пар $\{y_0, g\} \in L_0(\lambda)$ выполняется неравенство*

$$\left|\mathrm{Im}\lambda\right|^{-1} \mathrm{Im}(g, y_0)_A \leqslant -k\left\|y_0\right\|_A^2 \quad (k > 0).$$

Доказательство. При $\mathrm{Im}\lambda > 0$ для всех пар $\{y_0, g\} \in L_0'(\lambda)$ из формулы Лагранжа (3) следует равенство

$$\mathrm{Im}(g, y_0)_A = -\int_a^b (\mathcal{A}_\lambda(t)y_0(t), y_0(t))dt.$$

Предельным переходом устанавливаем справедливость последнего равенства для всех пар $\{y_0, g\} \in L_0(\lambda)$. Теперь применение утверждения 2 завершает доказательство леммы для $\mathrm{Im}\lambda > 0$. Случай $\mathrm{Im}\lambda < 0$ рассматривается аналогично.

Следствие 4. *При $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ область значений $\mathcal{R}(L_0(\lambda))$ замкнута и отношение $L_0^{-1}(\lambda)$ является ограниченным оператором на своей области определения.*

Лемма 6. *Размерность $\dim\ker L(\lambda)$ постоянна в каждой из полуплоскостей $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $\mathrm{Im}\lambda < 0$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda$ ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ к $\mathcal{R}(L_0(\lambda))$. Из теоремы 1 и из следствия 4 получаем, что семейство отношений $\lambda \to L_0(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям следствия 2, если в этом следствии в качестве $\mathcal{D}$ взять верхнюю или нижнюю полуплоскость. Поэтому размерность $\dim \mathfrak{N}_\lambda$ постоянна в каждой полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $\mathrm{Im}\lambda < 0$. Лемма 4 влечет $\ker L(\bar{\lambda}) = \ker(L_0(\lambda))^* = \mathfrak{N}_\lambda$. Эти равенства завершают доказательство леммы.

Теорема 3. *Число* $\mathcal{N}(\lambda)$ *линейно независимых решений уравнения* (1), *квадратично интегрируемых с весом* $(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\mathrm{Im}\mathcal{C}_\lambda = (\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\mathcal{A}_\lambda$, *т.е. решений* y, *удовлетворяющих неравенству*

$$(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\int_a^b (\mathcal{A}_\lambda(t)y(t), y(t))dt < \infty, \qquad (12)$$

постоянно в каждой полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $\mathrm{Im}\lambda < 0$.

Доказательство. Из утверждения 2 следует, что в неравенстве (12) можно заменить $\mathcal{A}_\lambda(t)$ на $A(t)$. Из леммы 6 вытекает, что в каждой полуплоскости $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $\mathrm{Im}\lambda < 0$ постоянно число $\mathcal{N}_1(\lambda)$ линейно независимых решений уравнения (1), удовлетворяющих (12) и отличных от нуля в пространстве $\mathfrak{H}$. Из леммы 3 получаем, что число решений уравнения (1), отождествленных с нулем в $\mathfrak{H}$, не зависит от λ. Теорема доказана.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных кругов / С. А. Орлов // Известия АН СССР, Серия матем. — 1976. — Т. 40, № 3. — С. 593—644.

2. *Rofe-Beketov F. S.* Square-integrable Solutions, Self-adjoint Extensions and Spectrum of Differential Systems / F. S. Rofe-Beketov // Differential Equations. Proc. from the Uppsala 1977 Intern. Conf., Uppsala, 1977. — P. 169—178.

3. *Kogan V. I.* On Square-Integrable Solutions of Symmetric Systems of Differential Equations of Arbitrary Order / V. I. Kogan, F. S. Rofe-Beketov // Proc. Roy. S oc. Edinburgh. — 1975. — V. 74. — P. 5—40.

4. *Брук В. М.* О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений / В. М. Брук // Функциональный анализ. — Ульяновск, 1975. — № 5. — С. 25—33.

5. *Брук В. М.* О линейных отношениях в пространстве вектор-функций / В. М. Брук // Матем. заметки. — 1978. — Т. 24. — 4. — С. 499—511.

6. *Khrabustovsky V. I.* On the Characteristic Operators and Projections and on the Solutions of Weil Type of Dissipative and Accumulative Operator Systems. 1. General case; 2. Abstract Theory; 3. Separated Boundary Conditions / V. I. Khrabustovsky // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry. — 2006. — V. 2, № 2, № 3, № 4. P. 149—175, 299—317, 449—473.

7. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений / А. Г. Баскаков // Известия РАН, Серия матем. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 3—68.

8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като // М.: Мир, 1972. — 740 с.

9. *Брук В.М.* О голоморфных семействах линейных отношений / В. М. Брук // Функциональный анализ. — Ульяновск, 1992. — 33. — С. 24—28.

10. *Брук В. М.* О теореме единственности для голоморфных семейств операторов / В. М. Брук // Матем. заметки. — 1993. — Т. 53. — № 3. — С. 155—156.

11. *Крейн М. Г.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М. Г. Крейн, А. А. Нудельман // М.: Наука, 1973. — 552 с.

12. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов / М. С. Бродский // М.: Наука, 1969. — 288 с.

Брук Владислав Моисеевич — доцент кафедры математики, Саратовский государственный технический университет

E-mail: vladislavbruk@mail.ru

Тел.: 63-38-42

Vladislav Bruk, Associate professor, Chair of Mathematics, Saratov State Technical University

E-mail: vladislavbruk@mail.ru

Tel.: 63-38-42