УДК 517.9

О СПЕКТРЕ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Бесаева

Северо-Осетинский государственный университет

Поступила в редакцию 7.02.2011 г.

Аннотация: объектом исследования является разностный оператор (оператор взвешенного сдвига), действующий в конечномерном пространстве. Описан спектр рассматриваемого оператора.
Ключевые слова: разностный оператор, спектр оператора, весовые пространства последовательностей и функций.
Abstract: the subject of research is the difference operator (operator of weight shift) on finite dimensional space. We describe the spectrum of this operator.
Key words: difference operator; spectrum of operator; weight spaces of sequences and functions.

1. Введение. Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство, $L(X)$ — нормированная алгебра линейных операторов, действующих в X. Через $l^p_\alpha = l^p_\alpha(\mathbb{Z}, X)$, где $p \in [1,\infty]$, обозначим банахово пространство (двусторонних) последовательностей $x : \mathbb{Z} \to X$ векторов из X суммируемых с весом (весовой функцией) $\alpha : \mathbb{Z} \to (0,\infty)$ с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)} \right)^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty),$$

и ограниченных относительно α

$$\|x\| = \|x\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}, \quad p = \infty.$$

Если $\alpha = 1$, то пространство $l^p_\alpha(\mathbb{Z}, X)$ обозначается через $l^p = l^p(\mathbb{Z}, X)$, а норма $x \in l^p$ обозначается как $\|x\|_p$.

Основной целью исследования данной работы является описание спектра разностного оператора (оператора взвешенного сдвига)

$$\mathcal{B} : l^p_\alpha \to l^p_\alpha, (\mathcal{B}x)(n) = Bx(n-1), n \in \mathbb{Z}, x \in l^p_\alpha,$$

где $B \in L(X)$.

В статье [1] делалось предположение, что вес α удовлетворяет условию

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)} < \infty. \tag{1}$$

В данной работе снимаются любые ограничения на α. Часть результатов (теорема 3) получена при условии, что

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha(n+1)}{\alpha(n)} < \infty, \tag{2}$$

но условие (1) не выполняется, т.е.

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n+1)} = \infty. \tag{3}$$

Примером весовой функции, одновременно удовлетворяющей предполагаемым условиям (2) и (3), является функция $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ вида

$$\alpha(n) = \exp^{-|n|\varphi(n)}, n \in \mathbb{Z},$$

где $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+ = (0;\infty)$ — любая монотонно возрастающая четная функция, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$.

В дальнейшем рассматриваются следующие два предположения.

Предположение 1. Нуль принадлежит спектру $\sigma(B)$ оператора B.

Предположение 2. Оператор B обратим, т.е. нуль принадлежит резольвентному множеству $\rho(B)$ оператора B.

Следующие три теоремы являются одними из основных результатов статьи.

В формулировке теоремы 3 используется величина

$$æ = æ(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)}}. \tag{4}$$

Существование предела в (4) устанавливается в лемме 3.

Теорема 1. *Если выполнено предположение 1 и условие (3), то спектр $\sigma(\mathcal{B})$ оператора $\mathcal{B}$ заполняет всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.*

Теорема 2. *Пусть для веса одновременно выполняется условие (3) и условие*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}=\sup_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha(n+1)}{\alpha(n)}=\infty, \qquad (5)$$

тогда спектр $\sigma(\mathcal{B})$ оператора $\mathcal{B}$ заполняет всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

Теорема 3. *Пусть спектр оператора B имеет вид $\sigma(B)=\{\lambda_1,...,\lambda_h\}$, причем $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda_h|$. Тогда, если выполнены предположение 2, условия (2), (3), то спектр $\sigma(\mathcal{B})$ оператора $\mathcal{B}$ имеет вид*

$$\sigma(\mathcal{B})=\begin{cases}\left\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\geqslant\dfrac{|\lambda_1|}{æ}\right\}, \text{ если } æ>0,\\ \varnothing, \text{ если } æ=0.\end{cases}$$

2. Доказательство теорем. При доказательстве основных результатов используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}:l^p(\mathbb{Z},X)\to l^p(\mathbb{Z},X)$ оператор вида*

$$(\mathcal{A}x)(j)=A(j)x(j+k), j\in\mathbb{Z}, x\in l^p(\mathbb{Z},X), \quad (6)$$

где $A:\mathbb{Z}\to L(X)$ — операторнозначная функция и $k\in\mathbb{Z}$. Для того чтобы оператор $\mathcal{A}$ был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы была конечна величина

$$\|A\|_\infty=\sup_{j\in\mathbb{Z}}\|A(j)\|<\infty. \qquad (7)$$

При этом $\|\mathcal{A}\|=\|A\|_\infty$.

Доказательство. Если конечна величина (7), то из формулы (6) следует, что

$$\|\mathcal{A}x\|_p^p=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|A(j)x(j+k)\|^p\leq$$
$$\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|A(j)\|^p\,\|x(j+k)\|^p\leq$$
$$\leq(\sup_{j\in\mathbb{Z}}\|A(j)\|)^p\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|x(j+k)\|^p=\|A\|_\infty^p\,\|x\|_p^p.$$

Поэтому

$$\|\mathcal{A}\|\leqslant\|A\|_\infty.$$

Для любого $\varepsilon>0$ существует число $n\in\mathbb{Z}$, такое что $\|A(n)\|\geqslant\|A\|_\infty-\varepsilon/2$. Рассмотрим вектор $x_0\in X$ со свойствами:

$$\|x_0\|=1,$$
$$\|A(n)x_0\|=\|A(n)\|,$$

(используется конечномерность X). Тогда для последовательности $x_n\in l^p(\mathbb{Z},X)$ вида

$$x_n(j)=0, j\in\mathbb{Z}, j\neq n+k, x_n(n+k)=x_0,$$

получаем $\|\mathcal{A}x_n\|=\|A(n)x_0\|=\|A(n)\|$. Поскольку $\|x_n\|_p=\|x_0\|=1$, то

$$\|\mathcal{A}\|\geqslant\|A(n)\|\geqslant\|A\|_\infty-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ввиду произвольности ε, получаем, что

$$\|\mathcal{A}\|\geqslant\|A(n)\|_\infty.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{A}\|=\|A\|_\infty.$$

Обратно, если оператор $\mathcal{A}$ ограничен, то для последовательности $x\in l^p$, вида

$$x_n(j)=0, j\neq n+k, x_n(n+k)=x_0,$$
$$x_0\in X, \|x_0\|=1,$$

получаем, что $\|x_n\|_p=1$ и

$$\|A(n)x_0\|=\|A(n)x_n(n+k)\|=$$
$$=\|\mathcal{A}x_n\|_p\leqslant\|\mathcal{A}\|\|x_n\|_p=\|\mathcal{A}\|.$$

Следовательно, $\|A(n)\|\leqslant\|\mathcal{A}\|$. Лемма доказана.

Лемма 2. *[2] Пусть $A:\mathbb{Z}\to L(X)$ — не обязательно ограниченная операторнозначная функция. Тогда оператор $\mathcal{A}$ вида*

$$(\mathcal{A}x)(n)=A(n)x(n+k), k,n\in\mathbb{Z}, x\in l^p,$$

с $D(\mathcal{A})=\{x\in l^p:$ *последовательность* $y(n)=A(n)x(n+k), n\in\mathbb{Z},$ *принадлежит* $l^p\}$ *замкнут.*

Лемма 3. *Если выполнено условие (2), то в формуле (4) существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)}}.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $T:l^p\to l^p$ вида

$$(Tx)(k)=\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)}x(k+1), k\in\mathbb{Z}.$$

Из леммы 1 и условия (2) получаем, что оператор T ограничен, а его степени представимы в виде

$$(T^nx)(k)=\frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)}x(k+n), n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}, x\in l^p.$$

Тогда из формулы Бёрлинга—Гельфанда для спектрального радиуса [3, стр. 264], получаем, что величина

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha(n+k)}{\alpha(k)}}$$

конечна. Лемма доказана.

Рассмотрим разностный оператор $\mathcal{B}$. Каждое из банаховых пространств $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X)$, $p \in [1, \infty]$, изометрически изоморфно соответствующему «невесовому» банахову пространству $l^p = l^p(\mathbb{Z}, X)$, а их изоморфизм осуществляет оператор

$$U_\alpha : l^p \to l_\alpha^p, (U_\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l^p.$$

Рассмотрим подобный оператору $\mathcal{B}$ оператор $\mathcal{B}_\omega$ вида

$$(\mathcal{B}_\omega x)(k) = (U_\alpha^{-1}\mathcal{B}U_\alpha x)(k) = \omega(k)Bx(k-1),$$
$$k \in \mathbb{Z}, x \in l^p,$$

где $\omega(k) = \dfrac{\alpha(k-1)}{\alpha(k)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1. В силу леммы 1 оператор $\mathcal{B}_\omega$, с областью определения $D(\mathcal{B}_\omega) = \{x \in l^p :$ последовательность $y(n) = \dfrac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)} Bx(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежит $l^p\}$ является неограниченным, если выполнено условие (3). Если же выполнено условие (1), то оператор $\mathcal{B}_\omega$ ограничен.

Лемма 4. *[2, лемма 1] Спектры операторов $\mathcal{B}_\omega$, $\mathcal{B}$ совпадают и инвариантны относительно вращений в $\mathbb{C}$ вокруг нуля, т.е.*

$$\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_\omega) = \mathbb{T}\sigma(\mathcal{B}_\omega), \tag{8}$$

где $\mathbb{T}$ — единичная окружность.

Далее всюду используется

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $L(\mathcal{X})$ — алгебра линейных ограниченных операторов в $\mathcal{X}$. Если $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ которого представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_1 \cup \sigma_2,$$

где σ_1, σ_2 — замкнутые взаимно непересекающиеся множества и σ_1 — компакт. Тогда банахово пространство $\mathcal{X}$ есть прямая сумма

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \tag{9}$$

двух замкнутых инвариантных относительно оператора A подпространств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, причем имеют место следующие свойства :

1) $\mathcal{X}_1 \subset D(\mathcal{A})$;

2) разложение (9) осуществляет проектор Рисса $P_1 \in L(\mathcal{X})$ (т.е. $ImP_1 = \mathcal{X}_1, Im(I - P_1) = \mathcal{X}_2$) вида

$$P_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} R(\lambda, \mathcal{A})d\lambda,$$

где γ_1 — жорданов контур, окружающий σ_1;

3) оператор $\mathcal{A}_1$ ограничен;

4) $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma_1$, $\sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma_2$,

где $\mathcal{A}_k = \mathcal{A} \mid \mathcal{X}_k, k = 1,2$ — сужение оператора A на подпространство X_k.

Доказательство теоремы 1. Так как $0 \in \sigma(B)$, то существует вектор $x_0 \neq 0$, такой что $Bx_0 = 0$. Рассмотрим последовательность $\tilde{x}_0 \in l_\alpha^p$ вида

$$\tilde{x}_0(0) = x_0, \quad \tilde{x}_0(k) = 0, \quad k \neq 0.$$

Очевидно, $\mathcal{B}\tilde{x}_0 = 0$, т.е. $0 \in \sigma(\mathcal{B})$. Допустим, что $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ — точка резольвентного множества $\rho(\mathcal{B}) = \rho(\mathcal{B}_\omega)$, тогда из леммы 4 получаем, что окружность

$$\mathbb{T}(r) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda\right| = r = \left|\lambda_0\right|\right\}$$

содержится в $\rho(\mathcal{B}_\omega)$ и поэтому $\mathbb{T}(r) \cap \sigma(\mathcal{B}_\omega) = \varnothing$. Следовательно, множество $\sigma(\mathcal{B}_\omega)$ представимо в виде объединения $\sigma(\mathcal{B}_\omega) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}$ двух взаимно непересекающихся множеств $\sigma_{int} = \left\{\lambda \in \sigma(\mathcal{B}_\omega) : \left|\lambda\right| < r\right\}$, $\sigma_{out} = \left\{\lambda \in \sigma(\mathcal{B}_\omega) : \left|\lambda\right| > r\right\}$.

Проектор Рисса $\mathcal{P}_{int}$, построенный по спектральному множеству σ_{int}, определяется формулой (здесь и далее используется лемма 5)

$$0 \neq \mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}(r)} R(\lambda, \mathcal{B}_\omega)d\lambda, \tag{10}$$

где $R(\lambda, \mathcal{B}_\omega) = (\mathcal{B}_\omega - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(\mathcal{B}_\omega) = \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{B}_\omega)$, — резольвента оператора $\mathcal{B}_\omega$. Из статьи [2, лемма 2] следует, что существует ограниченная проекторнозначная функция $P_{\text{int}} : \mathbb{Z} \to LB(X)$, для которой

$$(\mathcal{P}_{\text{int}}x)(n) = P_{\text{int}}(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in l^p. \tag{11}$$

Следовательно, функция P_{int} постоянная, т.е. $P_{\text{int}}(n) = P_{\text{int}}(n-1), n \in \mathbb{Z}$. Образ $\mathrm{Im}\mathcal{P}_{\text{int}}$ проектора $\mathcal{P}_{\text{int}}$ содержится в области определения оператора $\mathcal{B}_\omega$, оператор $\mathcal{B}_\omega\mathcal{P}_{\text{int}}$, ограничен и имеет вид

$$(\mathcal{B}_\omega\mathcal{P}_{\text{int}}x)(k) = \frac{\alpha(k-1)}{\alpha(k)} P_{\text{int}}(0)Bx(k-1).$$

Из леммы 1, следует, что $P_{\text{int}}(0) = 0$ (иначе оператор $\mathcal{B}_\omega\mathcal{P}_{\text{int}}$ неограничен). Таким образом, операторы $\mathcal{P}_{\text{int}}$ и $\mathcal{B}_\omega\mathcal{P}_{\text{int}}$ нулевые. Поскольку $0 \in \sigma_{\text{int}}$, то $\sigma_{\text{int}} \neq \varnothing$, и поэтому $\mathcal{P}_{\text{int}} \neq 0$. Получено противоречие. Следовательно, любая окружность $\mathbb{T}(r), r > 0$, лежит в спектре оператора $\mathcal{B}_\omega$. Итак, $\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_\omega) = \mathbb{C}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Если $0 \in \sigma(B)$, то выполнены условия теоремы 1. Поэтому $\sigma(B) = \mathbb{C}$. Допустим, что $0 \in \rho(B)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{B}_\omega^{-1}$, который имеет вид

$$\left(\mathcal{B}_\omega^{-1} y\right)(k) = \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} B^{-1} y(k+1), k \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

с областью определения $D(\mathcal{B}_\omega^{-1}) = \left\{ y \in l^p : \mathcal{B}_\omega^{-1} y \in l^p \right\}$. Этот оператор неограничен (см. лемму 1), в силу леммы 2 он замкнут.

Докажем, следуя схеме доказательства теоремы 1, что $\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) = \mathbb{C}$, и, следовательно, $\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_\omega) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) \right\} \cup \{0\}$. Вначале отметим, что $0 \in \sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1})$, так как обратный к нему оператор, совпадающий с $\mathcal{B}_\omega$ неограничен.

Пусть $0 \neq \lambda_0 \in \rho(\mathcal{B}_\omega^{-1})$. Тогда окружность $\mathbb{T}(r)$, где $r = \left|\lambda_0\right|$, в силу леммы 4 находится в $\rho(\mathcal{B}_\omega^{-1})$, и, следовательно,

$$\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}},$$

где $\sigma_{\text{int}} = \left\{ \lambda \in \sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) : \left|\lambda\right| < r \right\} \neq \varnothing$, $\sigma_{\text{out}} = \left\{ \lambda \in \sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) : \left|\lambda\right| > r \right\}$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1, построим проектор Рисса $\mathcal{P}_{\text{int}}$, по спектральному множеству σ_{int},

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}(r)} R\left(\lambda, \mathcal{B}_\omega^{-1}\right) d\lambda, \quad (13)$$

где $R\left(\lambda, \mathcal{B}_\omega^{-1}\right) = \left(\mathcal{B}_\omega^{-1} - \lambda I\right)^{-1}$. При этом

$$(\mathcal{P}_{\text{int}} y)(n) = P_{\text{int}}(n) y(n), \quad n \in \mathbb{Z}, y \in l^p. \quad (14)$$

Здесь $P_{\text{int}} : \mathbb{Z} \to LB(X)$ — ограниченная проекторнозначная функция такая, что $P_{\text{int}}(n) = P_{\text{int}}(n-1), n \in \mathbb{Z}$. Оператор $\mathcal{B}_\omega^{-1} \mathcal{P}_{\text{int}}$, ограничен (см. лемму 5) и имеет вид

$$\left(\mathcal{B}_\omega^{-1} \mathcal{P}_{\text{int}} y\right)(k) = \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} P_{\text{int}}(0) B^{-1} y(k+1), k \in \mathbb{Z}$$

Из ограниченности данного оператора, леммы 1 и условия (5), следует, что $P_{\text{int}}(0) = 0$. Таким образом, операторы $\mathcal{P}_{\text{int}}$ и $\mathcal{B}_\omega^{-1} \mathcal{P}_{\text{int}}$ нулевые. Поскольку $0 \in \sigma_{\text{int}}$, то $\sigma_{\text{int}} \neq \varnothing$, и поэтому $\mathcal{P}_{\text{int}} \neq 0$. Получено противоречие. Следовательно, любая окружность $\mathbb{T}(r), r > 0$, лежит в спектре оператора $\mathcal{B}_\omega^{-1}$. Итак, $\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) = \mathbb{C}$, а значит и $\sigma(\mathcal{B}) = \mathbb{C}$. Теорема доказана.

Согласно теореме об отображении спектра [4, с. 609] имеет место следующая лемма

Лемма 6. *Если $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ обратимый ограниченный оператор на комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$, то спектр $\sigma(A^{-1})$ обратного к A оператора A^{-1} представим в виде*

$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

Далее считаем, что выполнены предположение 2 и соотношения (2), (3) для веса α.

Лемма 7. *Пусть оператор $B \in L(X)$ имеет одноточечный спектр: $\sigma(B) = \{\lambda_0\}$, где $\lambda_0 \neq 0$. Тогда спектр оператора $\mathcal{B}$ имеет вид*

$$\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_\omega) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda\right| \geqslant \frac{\left|\lambda_0\right|}{\text{æ}} \right\}, \quad (15)$$

когда $\text{æ} > 0$ *и*

$$\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_\omega) = \varnothing,$$

когда $\text{æ} = 0$.

Доказательство. Из одноточечности спектра оператора B следует, что он имеет вид $B = \lambda_0 I + Q$, где Q — нильпотентный оператор [5, с. 212], и $Q^m = 0$ для некоторого $m \leqslant n$. Обратный к нему оператор будет иметь вид

$$B^{-1} = \frac{1}{\lambda_0} \left(I + \frac{Q}{\lambda_0} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda_0^{-n} Q^n =$$
$$= \frac{1}{\lambda_0} \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \lambda_0^{-n} Q^n = \frac{1}{\lambda_0} I + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{Q^n}{\lambda_0^{n+1}} = \frac{1}{\lambda_0} I + \tilde{Q}.$$

Следовательно, $\tilde{Q} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{Q^n}{\lambda_0^{n+1}}$ — нильпотентный оператор, причем $\tilde{Q}^m = 0$. Из условия (3) и леммы 1 следует, что оператор $\mathcal{B}_\omega$ неограничен. Из условия (2), обратимости оператора B и леммы 1, следует непрерывная обратимость оператора $\mathcal{B}_\omega$, обратный к нему оператор ограничен и имеет вид (12). При этом важно отметить, что $0 \in \sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1})$ (см. доказательство теоремы 2).

Поскольку степени $(\mathcal{B}_\omega^{-1})^n, n \geqslant 1$, оператора $\mathcal{B}_\omega^{-1}$ имеют вид

$$((\mathcal{B}_\omega^{-1})^n x)(k) = \frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)} \left(\frac{1}{\lambda} I + \tilde{Q} \right)^n x(k+n), k \in \mathbb{Z},$$

то из формулы Бёрлинга—Гельфанда и леммы 1 получаем, что спектральный радиус $r(\mathcal{B}_\omega^{-1})$ оператора $\mathcal{B}_\omega^{-1}$ имеет вид

$$r(\mathcal{B}_\omega^{-1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\left\|\left(\frac{1}{\lambda}I+\tilde{Q}\right)^n\right\|\right)^{\frac{1}{n}} = \tag{16}$$
$$= \frac{æ}{|\lambda_0|}.$$

При этом использовалась лемма 3. Из (16) и леммы 4 следует, что $\mathbb{T}\left(\frac{æ}{|\lambda_0|}\right) \subset \sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1})$. Докажем равенство

$$\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) = \left\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \frac{æ}{|\lambda_0|}\right\}. \tag{17}$$

В силу изложенного, достаточно доказать, что любое комплексное число λ, удовлетворяющее условию $0 < |\lambda| < \frac{æ}{|\lambda_0|}$, входит в $\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1})$. Предположим противное. Пусть существует число $\mu_0 \in \rho(\mathcal{B}_\omega^{-1})$, для которого $0 < |\mu_0| = r < \frac{æ}{|\lambda_0|}$. Следовательно, в силу леммы 4 окружность $\mathbb{T}(r)$ находится в резольвентном множестве $\rho(\mathcal{B}_\omega^{-1})$ оператора $\mathcal{B}_\omega^{-1}$. Тогда $\mathbb{T}(r)\cap\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) = \varnothing$, где $r = |\mu_0|$, и, следовательно, множество $\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1})$ представимо в виде объединения $\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}$ двух непустых множеств $\sigma_{\text{int}} = \left\{\lambda\in\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) : |\lambda| < r\right\}$, $\sigma_{\text{out}} = \left\{\lambda\in\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) : |\lambda| > r\right\}$.

Проектор Рисса $\mathcal{P}_{\text{int}}$, построенный по спектральному множеству σ_{int}, определяется формулой

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}(r)} R\left(\lambda, \mathcal{B}_\omega^{-1}\right)d\lambda, \tag{18}$$

где $R(\lambda,\mathcal{B}_\omega^{-1}) = (\mathcal{B}_\omega^{-1} - \lambda I)^{-1}$, $\lambda\in\rho(\mathcal{B}_\omega^{-1})$. Из статьи [2, лемма 2] следует, что существует ограниченная проекторнозначная функция $P_{\text{int}} : \mathbb{Z}\to LB(X)$, для которой

$$(\mathcal{P}_{\text{int}}x)(n) = P_{\text{int}}(n)x(n), \quad n\in\mathbb{Z}, x\in l^p. \tag{19}$$

Тогда спектр оператора $\mathcal{B}_\omega^{-1}\mathcal{P}_{\text{int}}$ имеет вид $\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}\mathcal{P}_{\text{int}}) = \sigma_{\text{int}} \cup \{0\}$ и поэтому

$$r(\mathcal{B}_\omega^{-1}\mathcal{P}_{\text{int}}) < r < \frac{æ}{|\lambda_0|} = r(\mathcal{B}_\omega^{-1}). \tag{20}$$

Из формулы (18) вытекает, что проектор $\mathcal{P}_{\text{int}}$ перестановочен с оператором $\mathcal{B}_\omega^{-1}$ и поэтому верны равенства

$$P_{\text{int}}(n) = P_{\text{int}}(n-1), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Следовательно, $P_{\text{int}}(n) \neq 0$ для всех $n\in\mathbb{Z}$, причем $P_{\text{int}}(n) = P_{\text{int}}(0) \neq 0, n\in\mathbb{Z}$, и оператор $P_{\text{int}}(0)$ перестановочен с оператором Q и следовательно с $\tilde{Q}$. Поскольку

$$\left((\mathcal{B}_\omega^{-1}\mathcal{P}_{\text{int}})^n x\right)(k) =$$
$$= \frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)}\left(\frac{1}{\lambda_0}I+\tilde{Q}\right)^n P_{\text{int}}(k)x(k+n),$$
$$k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|(\mathcal{B}_\omega^{-1}\mathcal{P}_{\text{int}})^n\right\|^{1/n} = \frac{æ}{|\lambda_0|}$, что противоречит оценке (20). Таким образом, $\mu_0\in\rho(\mathcal{B}_\omega^{-1})$ и справедливость равенства (17) установлена.

Итак, доказано представление (17) для спектра $\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1})$ оператора $\mathcal{B}_\omega^{-1}$, обратного к $\mathcal{B}_\omega$. Следовательно, из леммы 6 получаем, что имеет место равенство для спектра

$$\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_\omega) = \left\{\frac{1}{\lambda} : \lambda\in\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1})\right\} =$$
$$= \left\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| \geqslant \frac{|\lambda_0|}{æ}\right\}, \tag{21}$$

если $æ \neq 0$. Для $æ = 0$ получаем из (17), что $\sigma(\mathcal{B}_\omega^{-1}) = \{0\}$ и, следовательно, из леммы 6 вытекает, что $\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_\omega) = \varnothing$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Согласно лемме 5 линейное пространство X допускает разложение в прямую сумму

$$X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_h \tag{22}$$

инвариантных относительно оператора B подпространств X_k, $1 \leqslant k \leqslant h$, такое, что спектр $\sigma(B_k)$ сужения $B_k = B \mid X_k$ оператора B на X_k совпадает с одноточечным множеством $\{\lambda_k\}$. Следовательно, каждый из операторов B_k, $1 \leqslant k \leqslant h$, допускает представление $B_k = \lambda_k I_k + Q_k$, где I_k — тождественный оператор в X_k и Q_k — нильпотентный оператор. Из (20) следует разложение

$$l^p(\mathbb{Z},X) = l^p(\mathbb{Z},X_1) \oplus \ldots \oplus l^p(\mathbb{Z},X_h) \tag{23}$$

банахова пространства $l^p(\mathbb{Z},X)$, где каждое из подпространств $l^p(\mathbb{Z},X_k)$, $1 \leqslant k \leqslant h$, является инвариантным для оператора $\mathcal{B}_\omega$. Пусть $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}_\omega \mid l^p(\mathbb{Z},X_j)$ — сужение оператора на $l^p(\mathbb{Z},X_j)$. Тогда утверждение доказываемой теоремы следует из леммы 7, примененной к каждому из операторов $\mathcal{B}_j$, $1 \leqslant j \leqslant h$, и равенства $\sigma(\mathcal{B}_{\omega}) = \bigcup_{j=1}^{h} \sigma(\mathcal{B}_{j}) = \sigma(\mathcal{B}_{1})$. Таким образом, имеет место равенство

$$\sigma(\mathcal{B}_{\omega}) = \sigma(\mathcal{B}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant \frac{|\lambda_1|}{æ} \right\},$$

если $æ > 0$ и

$$\sigma(\mathcal{B}_{\omega}) = \sigma(\mathcal{B}) = \varnothing,$$

если $æ = 0$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть применены (см. [1]) при описании спектра линейных дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, действующих в весовых пространствах векторных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бичегкуев М. С., Бесаева С. В.* О спектральных свойствах разностных и дифференциальных операторов, в весовых пространствах / М. С. Бичегкуев, С. В. Бесаева // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 2. — С. 16—21.

2. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.:* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов // Сиб. матем. журн. — 2001. — Т. 42. — 6. — С. 1231—1243.

3. *Рудин У.* Функциональный анализ / У. Рудин. — М.: Изд. Мир, 1975. — С. 264.

4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Часть 1. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М: ИЛ, 1962. — С. 609.

5. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре / А. Г. Баскаков. — Воронеж: ВГУ, 2001. — С. 212.

Бесаева Светлана Владимировна — аспирант кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений математического факультета. Северо-Осетинский государственный университет

E-mail: besaevasv@mail.ru

Тел.: 8-920-446-51-73; 8-928-489-36-03

Besaeva Svetlana Vladimirovna — a postgraduate student, chair of Functional Analysis and Differential Equations, Mathematical faculty, Noth Osetian State University

E-mail: besaevasv@mail.ru.

Tel.: 8-920-446-51-73; 8-928-489-36-03