УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ФОЙГТА С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ КОМПОНЕНТ СКОРОСТИ ОТ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ*

Е. С. Барановский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.09.2010 г.

Аннотация: в работе рассмотрен ряд математических моделей, описывающих течения жидкости Фойгта с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных. Для соответствующих начально-краевых задач доказаны теоремы о существовании и единственности обобщенных решений. Получены формулы для вычисления решений. Получена визуализация аттракторов некоторых типов течений в канале.
Ключевые слова: неньютоновская жидкость, модель Фойгта, течения в канале, вращательно-симметричные течения, начально-краевые задачи, точные решения, обобщенные решения, аттрактор, визуализация аттракторов.

Abstract: in this paper we consider mathematical models describing flows of Voigt liquid with velocity field depending linearly on two spatial variables. We prove existence and uniqueness of generalized solutions for corresponding initial-boundary value problems. We obtain formulas for computation of solutions. Visualization of attractors of some channel flows is represented.
Keywords: non-Newtonian fluid, Voigt model, channel flows, rotationally symmetric flows, initial-boundary value problems, exact solutions, generalized solutons, attractor, visualization of attractors.

Введение. Хорошо известно, что многие жидкости не подчиняются ньютоновскому определяющему соотношению (закону трения Ньютона). К таким жидкостям относятся эмульсии и суспензии одной ньютоновской жидкости в другой, сильно разбавленные суспензии твердых частиц в ньютоновской жидкости, многие полимерные растворы. Одной из наиболее известных моделей движения неньютоновской жидкости является модель движения жидкости Фойгта. Эта модель описывает течение вязкой жидкости, которой требуется некоторое время для того, чтобы прийти в движение под действием внезапно приложенной силы.

Исследованию уравнений движения жидкости Фойгта посвящены многочисленные работы А. П. Осколкова, В. Г. Звягина и его учеников (см., например, [1]—[6]). В этих работах обстоятельно изучаются вопросы о существовании и единственности решения соответствующих начально-краевых задач, исследуются условия существования аттракторов для соответствующих эволюционных уравнений.

В настоящей работе рассматриваются математические модели, описывающие течения жидкости Фойгта с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных. К таким течениям относятся хорошо известные течения Пуазейля, Куэтта, Экмана, Стокса, Кармана, течения вблизи застойной точки, осциллирующие течения и многие другие.

Основное внимание в работе уделяется выводу общей определяющей системы уравнений для данного класса течений и поиску решений начально-краевых задач, возникающих при изучении этой системы в рамках конкретных физических моделей. С помощью полученных результатов изучаются предельные режимы

* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (госконтракт № П941).

© Барановский Е. С., 2011

течений — аттракторы, характеризующие поведение течений при больших значениях времени.

Как известно, построение точных и приближенных решений гидродинамических уравнений является трудной математической задачей. Для преодоления трудностей, связанных с этой задачей, были разработаны некоторые приемы. Опишем те подходы, которые использовались для получения результатов данной статьи.

1) Переход от классической постановки задачи к обобщенной. Физические задачи далеко не всегда приводят к достаточно гладким начальным условиям. При этом может не существовать и дифференцируемое решение соответствующей начально-краевой задачи. В данном случае оказывается полезным понятие «обобщенного решения». Теория обобщенных решений уравнений с частными производными была разработана С. Л. Соболевым в 30-х годах прошлого столетия. Такие решения определяются, как правило, либо при помощи интегральных тождеств, либо как предел последовательности обычных решений и представляют собой естественное обобщение понятия классического решения.

2) Сведение системы уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для некоторых типов течений соответствующие гидродинамические уравнения сводятся к одному или нескольким обыкновенным дифференциальным уравнениям. Часто для изучения этих уравнений могут успешно применяться классические методы теории дифференциальных уравнений, методы нелинейного функционального анализа (например, теория степени Лере—Шаудера), различные численные методы или другие методы.

Опишем теперь структуру предлагаемой работы.

В первом параграфе выводится определяющая система уравнений для течений жидкости Фойгта с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных.

Далее на основе этой системы изучаются математические модели, описывающие конкретные физические ситуации. Так, в параграфах 2—4 рассматриваются модели движения фойгтовской жидкости в канале при наличии постоянного или меняющегося со временем по гармоническому закону перепада давления (течение Пуазейля и осциллирующее течение); а также модель течения, возникающего в результате движения стенки канала (течение Куэтта—Пуазейля). Для соответствующих начально-краевых задач вводится понятие обобщенного решения, доказываются теоремы о существовании и единственности обобщенного решения, выводятся формулы для вычисления решений и аттракторов.

В работе показано, что предельный режим нестационарного течения Пуазейля представляет собой стационарное распределение скоростей с параболическим профилем, причем полученный аттрактор не зависит от рассматриваемого типа жидкости (ньютоновская, фойгтовская). Аналогичная картина характерна и для течения Куэтта—Пуазейля (см. параграф 3). Однако в случае более сложного осциллирующего течения (см. параграф 4) ситуация меняется. В этой модели аттрактор определяется не стационарной, а периодической во времени функцией. При этом аттрактор существенно зависит от релаксационных свойств жидкости.

В пятом параграфе выводится система уравнений, описывающая вращательно-симметричные течения жидкости Фойгта. Приводится один класс решений этой системы. Рассмотренный класс решений характеризуется тем, что определяющая его система уравнений представляет собой систему *обыкновенных* дифференциальных уравнений. На основе этой системы удалось построить решение одной начально-краевой задачи, описывающей затухающее движение приведенной в начальный момент времени во вращение жидкости.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ФОЙГТА С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ КОМПОНЕНТ СКОРОСТИ ОТ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как известно, движение сплошной несжимаемой среды с постоянной плотностью определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см., например, [7]):

$$\rho(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial y} + \upsilon_3 \frac{\partial v_i}{\partial z}) = \\ = -\nabla_i p + (\operatorname{Div} \sigma)_i + \rho F_i, \quad i = 1,2,3, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_3}{\partial \boldsymbol{z}} = 0. \qquad (1.2)$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты, t — время, ρ — плотность среды, v_i — компоненты вектора скорости, p — давление, величины $\nabla_i p$ определяются формулами:

$$\nabla_1 p = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \nabla_2 p = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \nabla_3 p = \frac{\partial p}{\partial z};$$

σ — девиатор тензора напряжений, $\mathrm{Div}\sigma$ — вектор, координатами которого являются дивергенции вектор-столбцов матрицы σ, т.е.

$$(\mathrm{Div}\sigma)_i = \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial z};$$

F_i — компоненты вектора плотности внешних сил.

В зависимости от физической ситуации уравнения (1.1), (1.2) дополняются некоторыми граничными и начальными условиями.

Система (1.1), (1.2) описывает движение всех видов несжимаемых сред с постоянной плотностью. Однако эта система содержит девиатор тензора напряжений σ, который явно не выражен через неизвестные величины v, p. Чтобы выразить σ через неизвестные системы (1.1), (1.1.2) обычно используют соотношения между σ и тензором скоростей деформации $\mathcal{E}$, компоненты которого определяются равенствами

$$\mathcal{E}_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \mathcal{E}_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \mathcal{E}_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial z},$$
$$\mathcal{E}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right), \mathcal{E}_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right), \ldots$$

и так далее.

Связь между тензорами σ и $\mathcal{E}$ называется реологическим соотношением. Такие соотношения представляют собой гипотезы, которые должны подтверждаться для конкретных сред в результате экспериментальных исследований.

Один из вариантов модели движения жидкости Фойгта предполагает следующее реологическое соотношение

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \qquad (1.3)$$

Здесь $\nu, \varkappa > 0$, ν — кинематический коэффициент вязкости, $\varkappa$ — время запаздывания (ретардации).

Заметим, что в случае $\varkappa = 0$ равенство (1.3) переходит в классическое ньютоновское определяющее соотношение

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E}.$$

В дальнейшем для простоты будем считать плотность среды равной единице. Кроме того, предположим, что поле внешних сил потенциально.

Подставляя значение тензора σ из (1.3) в уравнение (1.1), получим систему уравнений:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_i}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_i}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_i}{\partial z} - \nu\Delta v_i - \\ -\varkappa\frac{\partial}{\partial t}\Delta v_i + \nabla_i p = 0, \;\; i = 1,2,3. \qquad (1.4)$$

В записи уравнений (1.4) предполагается, что потенциальное поле внешних сил включено в градиент давления.

Система уравнений (1.4), (1.2), дополненная граничными и начальными условиями, представляет собой математическую модель движения несжимаемой жидкости Фойгта.

В предельном случае $\varkappa = 0$ уравнения (1.4) переходят в хорошо известные уравнения Навье-Стокса, описывающие движение ньютоновской жидкости.

Исследуем класс решений системы (1.4), (1.2) с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных следующего вида:*

$$v_1 = h_1(z,t) + f_1(z,t)x + g_1(z,t)y, \qquad (1.5)$$

$$v_2 = h_2(z,t) + f_2(z,t)x + g_2(z,t)y, \qquad (1.6)$$

$$v_3 = f(z,t). \qquad (1.7)$$

Сначала отметим два обстоятельства, которые упростят дальнейшие выкладки.

1) Функции f, f_1, g_2 должны удовлетворять соотношению

$$f_1 + g_2 + \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \qquad (1.8)$$

Справедливость равенства (1.8) легко установить, подставив выражения для компонент скорости v_i в уравнение (1.2).

Представим функцию f_1 в виде

* Исходная идея искать точные решения гидродинамических уравнений в форме (1.5)—(1.7) принадлежит, по-видимому, Ц. Линю. Подробный обзор результатов, полученных при исследовании такого типа решений уравнений Навье—Стокса, приводится в работе [8] С. Н. Аристова и др. (см. также [9, 10, 11]).

$$f_1 = \mathrm{w} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z},$$

где w — неизвестная функция переменных z, t. Тогда из уравнения (1.8) имеем

$$g_2 = -\mathrm{w} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Поэтому при изучении решений вида (1.5) — (1.7) целесообразно сразу предположить, что компоненты скорости имеют следующий вид:

$$v_1 = a + \left(\mathrm{w} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\right)x + \mathrm{v}y, \qquad (1.9)$$

$$v_2 = b + \mathrm{u}x - \left(\mathrm{w} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\right)y, \qquad (1.10)$$

$$v_3 = f, \qquad (1.11)$$

где $a, b, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, f$ — неизвестные функции, зависящие от координаты z и времени t. Для заданных таким образом функций $v_i, i = 1, 2, 3,$ уравнение (1.2) выполняется автоматически.

2) Из представления (1.9)—(1.11) можно сразу вывести общий вид неизвестной величины давления p. Для этого подставим значения v_i в (1.4) и выразим из этой системы p. В результате получим

$$\begin{aligned} p = \eta - \xi x - \zeta y - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}y^2 - \gamma xy - \\ -\frac{1}{2}f^2 - \int \frac{\partial f}{\partial t}dz + \nu\frac{\partial f}{\partial z} + \varkappa\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z}, \end{aligned} \qquad (1.12)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \zeta, \eta$ — неизвестные функции времени t.

Для изучения решений системы (1.4), (1.2) вида (1.9) — (1.12) выведем систему уравнений, которой должны удовлетворять неизвестные функции $a, b, f, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \alpha, \beta, \gamma, \xi, \zeta, \eta$.

Подставим выражения (1.9) — (1.12) в уравнения системы (1.4). В результате возникают уравнения вида

$$A_i(z,t)x + B_i(z,t)y + C_i(z,t) = 0.$$

Приравнивая A_i, B_i, C_i к нулю и применяя некоторые элементарные преобразования, приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} + f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \\ = \nu\frac{\partial^3 f}{\partial z^3} + \varkappa\frac{\partial^4 f}{\partial t \partial z^3} + 2(\mathrm{uv} + \mathrm{w}^2) - (\alpha + \beta), \end{aligned} \qquad (1.13)$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} + f\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{u} = \nu\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 \mathrm{u}}{\partial t \partial z^2} + \gamma, \qquad (1.14)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + f\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{v} = \nu\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 \mathrm{v}}{\partial t \partial z^2} + \gamma, \qquad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + f\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{w} = \\ = \nu\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial t \partial z^2} + \frac{\alpha - \beta}{2}, \end{aligned} \qquad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + f\frac{\partial a}{\partial z} + a\left(\mathrm{w} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\right) + b\mathrm{v} = \\ = \nu\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 a}{\partial t \partial z^2} + \xi, \end{aligned} \qquad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + f\frac{\partial b}{\partial z} - b\left(\mathrm{w} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\right) + a\mathrm{v} = \\ = \nu\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 b}{\partial t \partial z^2} + \zeta. \end{aligned} \qquad (1.18)$$

Таким образом, мы получили определяющую систему уравнений для решений задачи (1.4), (1.2) вида (1.9) — (1.12). Отметим, что при $\varkappa = 0$ система (1.13) — (1.18) переходит в систему, описывающую рассматриваемый класс течений ньютоновских жидкостей.

В следующих параграфах на основе системы (1.13)—(1.18) будет изучен ряд математических моделей, описывающих конкретные течения жидкости Фойгта.

2. ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ

В этом пункте будет рассмотрена начально-краевая задача, описывающая движение фойгтовской жидкости в канале при наличии постоянного перепада давления*.

Пусть жидкость, заключенная между плоскостями $z = 0$, $z = h$, движется вдоль оси x под действием постоянного градиента давления, равного $-\xi_0$. Для вывода уравнений движения воспользуемся результатами, полученными в предыдущем параграфе. Очевидно, что рассматриваемому течению соответствует представление (1.9)—(1.12), в котором все неизвестные функции, за исключением функций $a, \xi = \xi_0$, равны нулю. При этом система (1.13) — (1.18) сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 a}{\partial t \partial z^2} + \xi_0, \quad 0 < z < h, \, t > 0, \qquad (2.1)$$

для неизвестной функции $a = a(z,t)$, определяющей скорость вдоль оси x.

* Течения такого типа принято называть пуазейлевыми. О движении ньютоновской жидкости в условиях пуазейлевого течения см., например, [12].

Предположим, что на стенках канала $z=0$, $z=h$ выполнено условие прилипания, т.е.

$$a(0,t)=a(h,t)=0, \qquad t\ge 0. \qquad (2.2)$$

Предположим также, что в начальный момент времени $t=0$ распределение скорости задается известной функцией $u_0=u_0(z)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$u_0(0)=u_0(h)=0.$$

Таким образом, система (2.1),(2.2) дополняется начальным условием

$$a(z,0)=u_0(z), \qquad 0\le z\le h. \qquad (2.3)$$

Для нахождения решения задачи (2.1) — (2.3) воспользуемся методом Фурье. С помощью подстановки

$$a(z,t)=\tilde a(z,t)-\frac{\xi_0}{2\nu}(z^2-hz) \qquad (2.4)$$

перейдем к системе

$$\frac{\partial \tilde a}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\tilde a}{\partial z^2}+\varkappa\frac{\partial^3\tilde a}{\partial t\partial z^2},\ 0<z<h,\ t>0,\ (2.5)$$

$$\tilde a(0,t)=\tilde a(h,t)=0,\ \ t\ge 0, \qquad (2.6)$$

$$\tilde a(z,0)=\tilde u_0(z),\ \ 0\le z\le h. \qquad (2.7)$$

где

$$\tilde u_0(z)=\frac{\xi_0}{2\nu}(z^2-hz)+u_0(z). \qquad (2.8)$$

Сначала найдем нетривиальные решения задачи (2.5), (2.6) вида

$$\tilde a(z,t)=\varphi(t)q(z).$$

Из уравнения (2.5) имеем*

$$\varphi'(t)\Big(q(z)-\varkappa q''(z)\Big)=\nu\varphi(t)q''(z). \qquad (2.9)$$

При построении нетривиальных решений системы (2.5), (2.6) нас интересует случай, когда $q-\varkappa q''\ne 0$. Действительно, в противном случае из уравнения (2.9) следует равенство $q''=0$, которое при $q\ne 0$ несовместимо с краевыми условиями (2.6).

Пусть $z_0, 0\le z_0\le h$ — некоторая точка, в которой

$$q(z_0)-\varkappa q''(z_0)\ne 0.$$

Обозначим

$$\lambda=\frac{q''(z_0)}{q(z_0)-\varkappa q''(z_0)}.$$

Из уравнения (2.9) получаем

$$\varphi'(t)=\lambda\nu\varphi(t). \qquad (2.10)$$

* Здесь и всюду далее символ $'$ обозначает производную функции *одной переменной.*

С учетом этого соотношения и (2.9) приходим к уравнению

$$\lambda\Big(q(z)-\varkappa q''(z)\Big)=q''(z),$$

из которого следует, что

$$q''(z)-\frac{\lambda}{1+\lambda\varkappa}q(z)=0. \qquad (2.11)$$

Кроме того, для выполнения граничных условий (2.6) необходимо, чтобы

$$q(0)=q(h)=0. \qquad (2.12)$$

Поиск нетривиальных решений системы (2.11), (2.12) представляет собой хорошо известную задачу о собственных значениях. В данном случае собственными значениями являются числа $\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2$ $(n=1,2,...)$, им соответствуют собственные функции $\sin\left(\frac{\pi n}{h}z\right)$. Поэтому

$$\lambda=-\frac{\pi^2n^2}{h^2+\varkappa\pi^2n^2},\ \ q(z)=\sin\left(\frac{\pi n}{h}z\right). \qquad (2.13)$$

Подставляя найденные значения λ в уравнение (2.10), получим соответствующие решения этого уравнения

$$\varphi(t)=C_0\exp\left(-\frac{\nu\pi^2n^2}{h^2+\varkappa\pi^2n^2}t\right), C_0\in\mathbb{R}, n=1,2,...$$

Таким образом, мы имеем серию решений задачи (2.5), (2.6)

$$\tilde a_n(z,t)=\exp\left(-\frac{\nu\pi^2n^2}{h^2+\varkappa\pi^2n^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{h}z\right), \quad n=1,2,... \qquad (2.14)$$

Попытаемся построить решение задачи (2.5)—(2.7), используя набор функций $\tilde a_n, n=1,2,...$ Решение будем искать в виде ряда

$$\tilde a(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\tilde a_n(z,t), \qquad (2.15)$$

Для того чтобы функция $\tilde a$ удовлетворяла начальному условию (2.7), необходимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{\pi n}{h}z\right)=\tilde u_0(z). \qquad (2.16)$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что такое разложение возможно, если функция $\tilde u_0$ непрерывно дифференцируема и обращается в нуль в точках $z=0, z=h$. Предположим, что эти условия выполнены. В этом случае коэффициенты A_n вычисляются по формуле

$$A_n = \frac{2}{h}\int_0^h \tilde{u}_0(z)\sin\left(\frac{\pi n}{h}z\right)dz, \qquad (2.17)$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ абсолютно сходится.

В силу равномерной ограниченности системы функций $\tilde{a}_n(z,t)$, $0 \le z \le h$, $t \ge 0, n = 1,2,...$, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|A_n\right|$ влечет равномерную и абсолютную сходимость функционального ряда (2.15). Таким образом, функция $\tilde{a}$, определяемая рядом (2.15), непрерывна и удовлетворяет условиям (2.6), (2.7).

Однако утверждать, что функция $\tilde{a}$ удовлетворяет уравнению (2.5) пока нельзя. Такое заключение было бы справедливо, если бы ряд (2.15) можно было почленно дифференцировать $\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2}\right)$. Как известно, почленное дифференцирование рядов законно в том случае, если полученные после дифференцирования ряды сходятся равномерно. Последнее условие заведомо выполнено, если функция $\tilde{u}_0$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно и обращается в нуль вместе со своими производными первого и второго порядков. В этом случае порядок малости коэффициентов $A_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ обеспечивает равномерную сходимость полученных после дифференцирования рядов.

Ясно, что описанные выше условия на начальные данные не вытекают из физического смысла задачи и являются слишком ограничительными. Поэтому целесообразно перейти от классической постановки задачи к обобщенной, следуя подходу предложенному С. Л. Соболевым.

Пусть функция $\tilde{u}_0$ непрерывно дифференцируема и

$$\tilde{u}_0(0) = \tilde{u}_0(h) = 0.$$

Определение 2.1. *Функция $\tilde{a}(z,t)$ называется обобщенным решением задачи* (2.5)—(2.7), *если она является пределом при $k \to \infty$ равномерно сходящейся последовательности $a^{(k)}(z,t)$ классических решений задачи* (2.5), (2.6) *с начальными условиями*

$$a^{(k)}(z,0) = u_0^{(k)}(z)$$

такими, что последовательность функций $u_0^{(k)}(z)$ равномерно сходится к функции $\tilde{u}_0(z)$ при $k \to \infty$.

При изучении обобщенных решений нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть функция $a(z,t)$ — классическое решение задачи* (2.5)—(2.7). *Тогда*

i) справедлива оценка

$$\int_0^h a^2\left(z,t\right)dz \le \int_0^h\left(\tilde{u}_0(z)\right)^2 dz + \varkappa\int_0^h (\tilde{u}'_0(z))^2\, dz \quad (2.18)$$

ii) функция $a(z,t)$ является суммой равномерно сходящегося ряда

$$\tilde{a}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tilde{a}_n(z,t), \qquad (2.19)$$

в котором коэффициенты A_n и функции $\tilde{a}_n$ определяются формулами (2.17) *и* (2.14) *соответственно.*

Доказательство. Сначала докажем оценку (2.18). Поскольку функция a является классическим решением задачи (2.5)—(2.7), справедливо равенство

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 a}{\partial t \partial z^2}.$$

Умножим обе части этого равенства на $a(z,t)$ и проинтегрируем по z от 0 до h:

$$\int_0^h \frac{\partial a}{\partial t} a dz = \nu\int_0^h \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} a dz + \varkappa\int_0^h \frac{\partial^3 a}{\partial t \partial z^2} a dz. \quad (2.20)$$

С помощью формулы $(x^2)' = 2xx'$ и правила интегрирования по частям преобразуем равенство (2.20) к виду

$$\frac{1}{2}\int_0^h \frac{\partial}{\partial t}(a^2)dz = -\nu\int_0^h\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2 dz - \frac{\varkappa}{2}\int_0^h \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2\right)dz.$$

Интегрируя полученное равенство по t от 0 до τ $(\tau \ge 0)$ и отбрасывая отрицательные слагаемые в правой части, получим оценку

$$\int_0^h a^2(z,\tau)dz \le \int_0^h a^2(z,0)dz + \varkappa\int_0^h\left(\frac{\partial a}{\partial z}(z,0)\right)^2 dz,$$

которая и влечет (2.18).

Докажем теперь свойство ii).

Как уже отмечалось выше, ряд (2.19) равномерно сходится. Обозначим через $S(z,t)$ его сумму, а через $S_n(z,t)$ — n-ю частичную сумму. Нам требуется установить, что $a = S$.

Рассмотрим функции $a - S_n$, $n = 1,2,...$ Из свойства i) вытекает, что

$$\begin{gathered}\int_0^h\left(a(z,t) - S_n(z,t)\right)^2 dz \le \int_0^h\left(\tilde{u}_0(z) - S_n(z,0)\right)^2 dz + \\ +\varkappa\int_0^h\left(\tilde{u}'_0(z) - \frac{\partial S_n}{\partial z}(z,0)\right)^2 dz.\end{gathered} \qquad (2.21)$$

Из формул (2.16) и (2.17) и свойств тригонометрических рядов следует, что последовательность $S_n(z,0)$ равномерно сходится к функции $\tilde{u}_0(z)$ при $n \to \infty$. Поэтому первое слагаемое в правой части (2.21) сходится к нулю при $n \to \infty$. Покажем, что и второе слагаемое тоже сходится к нулю.

Поскольку функция $\tilde{u}_0(z)$ непрерывно дифференцируема, ряд Фурье ее производной $\tilde{u}_0'(z)$ можно получить формальным дифференцированием ряда (2.16). Гарантировать сходимость такого ряда нельзя, однако из теории рядов Фурье следует, что имеет место сходимость в среднем, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^h \left(\tilde{u}_0'(z) - \frac{\partial S_n}{\partial z}(z,0)\right)^2 dz = 0,$$

что и требовалось установить.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (2.21), получим

$$\int_0^h \Big(a(z,t) - S(z,t)\Big)^2 dz = 0,$$

откуда, в силу непрерывности функции $a - S$, следует равенство $a = S$.

Лемма полностью доказана.

Лемма 2.2. *Задача* (2.5)—(2.7) *имеет единственное обобщенное решение. Для нахождения обобщенного решения может быть использована формула* (2.15) *с коэффициентами* A_n *и функциями* $\tilde{a}_n$, *заданными равенствами* (2.17) *и* (2.14) *соответственно.*

Доказательство. Сначала покажем, что функция $\tilde{a}(z,t)$, заданная с помощью формул (2.15), (2.14), (2.17), является обобщенным решением задачи (2.5)—(2.7). Для этого заметим следующее. Функция $\tilde{a}(z,t)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности S_k частичных сумм ряда (2.15). При этом функции S_k являются классическими решениями задачи (2.5), (2.6) с начальными условиями

$$S_k(z,0) = \sum_{n=1}^{k} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{h} z\right),$$

и последовательность $S_k(\cdot,0)$ равномерно сходится к функции $\tilde{u}_0$. Таким образом, для функции $\tilde{a}$ выполнены все условия определения 2.1.

Установим теперь единственность обобщенного решения.

Пусть a_1, a_2 — обобщенные решения (2.5)—(2.7). Пусть $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}$, $k = 1,2...$ — соответствующие им последовательности классических решений (см. определение 2.1).

Зафиксируем произвольное число $T > 0$. Оценим величину $a_1(z,t) - a_2(z,t)$, $0 \le z \le h$, $0 \le t \le T$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\!\!\int_0^h \Big(a_1(z,t) - a_2(z,t)\Big)^2 dzdt \le \\
&\le 3\int_0^T\!\!\int_0^h \Big(a_1(z,t) - a_1^{(k)}(z,t)\Big)^2 dzdt + \\
&+3\int_0^T\!\!\int_0^h \Big(a_2(z,t) - a_2^{(k)}(z,t)\Big)^2 dzdt + \\
&+3\int_0^T\!\!\int_0^h \Big(a_1^{(k)}(z,t) - a_2^{(k)}(z,t)\Big)^2 dzdt.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Согласно определению обобщенного решения, последовательности $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}$ равномерно сходятся к функциям a_1 и a_2 соответственно. Поэтому первые два интеграла в правой части неравенства (2.22) сходятся при $k \to \infty$ к нулю. Покажем, что и третий интеграл тоже сходится к нулю.

Обозначим

$$\begin{aligned}
a_0^{(k)}(z,t) &= a_1^{(k)}(z,t) - a_2^{(k)}(z,t), \\
u_0^{(k)}(z) &= a_0^{(k)}(z,0).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Из леммы 2.1 следует, что функция $a_0^{(k)}(z,t)$ является суммой равномерно сходящегося ряда

$$a_0^{(k)}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(k)} \tilde{a}_n(z,t) \tag{2.24}$$

с коэффициентами

$$A_n^{(k)} = \frac{2}{h}\int_0^h u_0^{(k)}(z) \sin\left(\frac{\pi n}{h} z\right) dz. \tag{2.25}$$

Пользуясь ограниченностью функций $\tilde{a}_n(z,t)$, ортогональностью системы собственных функций $\sin\left(\frac{\pi n}{h} z\right)$ и равенством Парсеваля, получим оценку

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\!\!\int_0^h \Big(a_1^{(k)}(z,t) - a_2^{(k)}(z,t)\Big)^2 dzdt = \\
&= \int_0^T\!\!\int_0^h \Big(a_0^{(k)}(z,t)\Big)^2 dzdt \le \\
&\le C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n^{(k)}\Big)^2 \le C_2 \int_0^h \Big(u_0^{(k)}(z)\Big)^2 dz,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

где C_1, C_2 — положительные постоянные.

Из определения функций $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}$ и равенств (2.23) следует, что последовательность $u_0^{(k)}, k = 1, 2, \ldots$ равномерно сходится к нулю при $k \to \infty$. С учетом оценки (2.26) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \int_0^h \left(a_1^{(k)}(z,t) - a_2^{(k)}(z,t)\right)^2 dzdt = 0,$$

что и требовалось установить.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в (2.22), получим

$$\int_0^T \int_0^h \left(a_1(z,t) - a_2(z,t)\right)^2 dzdt = 0.$$

Поскольку функция $a_1 - a_2$ непрерывна, должно выполняться соотношение

$$a_1(z,t) = a_2(z,t), \quad 0 \le z \le h, 0 \le t \le T.$$

В силу произвольности T приходим к равенству $a_1 = a_2$.

Лемма полностью доказана.

Вернемся теперь к изучению исходной задачи (2.1)—(2.3). Аналогично тому, как это делалось в случае задачи (2.5)—(2.7), можно ввести понятие обобщенного решения задачи (2.1)—(2.3). Прежде чем сформулировать основной результат этого параграфа, условимся о некоторых обозначениях.

Введем пространство $C_0^1[0,h] = \{u \in C^1[0,h] : u(0) = u(h) = 0\}$ с нормой индуцированной из пространства $C^1[0,h]$.

Пусть $u \in C_0^1[0,h]$. Символом a_u обозначим обобщенное решение задачи (2.1), (2.2) с начальным условием $a(z,0) = u(z)$.

Введем пространство обобщенных решений

$$H = \bigcup_{u \in C_0^1[0,h]} \{a_u\}.$$

Из леммы 2.2 и равенства (2.4) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $u_0 \in C_0^1[0,h]$. *Тогда задача* (2.1)—(2.3) *имеет единственное обобщенное решение. Для нахождения обобщенного решения может быть использована формула*

$$a(z,t) = -\frac{\xi_0}{2\nu}(z^2 - hz) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\nu\pi^2 n^2}{h^2 + \varkappa\pi^2 n^2} t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{h} z\right) \quad (2.27)$$

с коэффициентами

$$A_n = \frac{2}{h} \int_0^h \left(\frac{\xi_0}{2\nu}(z^2 - hz) + u_0(z)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{h} z\right) dz.$$

Функция $a_*(z) = -\frac{\xi_0}{2\nu}(z^2 - hz)$, $a_* \in H$, *является аттрактором в пространстве обобщенных решений* H *в следующем смысле:*[*]

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\sup_{u \in B, z \in [0,h]} \left| a_u(z,t) - a_*(z) \right| \right) = 0$$

для любого ограниченного множества $B \subset C_0^1[0,h]$..

Теорема 2.1 позволяет сделать вывод о характере движения жидкости Фойгта в условиях пуазейлевого течения. Распределение скоростей фойгтовской жидкости, также как и распределение скоростей ньютоновской жидкости, с течением времени приближается к стационарному режиму $a_*(z) = -\frac{\xi_0}{2\nu}(z^2 - hz)$. Из (2.27), следует, что для жидкости Фойгта этот процесс происходит медленнее (см. рис. 1), причем чем больше параметр $\varkappa$, тем медленнее приближается скорость течения к предельному режиму a_*.

3. ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА—ПУАЗЕЙЛЯ

В предыдущем параграфе была рассмотрена модель напорного течения в канале. При этом предполагалось, что обе стенки $z = 0$, $z = h$, ограничивающие канал, неподвижны. В этом пункте будет изучена более общая ситуация, когда одна стенка ($z = 0$) покоится, а другая ($z = h$) движется в своей плоскости вдоль оси x с постоянной скоростью U. Течение, возникающее в этих условиях, называется течением Куэтта—Пуазейля.

В данном случае приходим к начально-краевой задаче:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \varkappa \frac{\partial^3 a}{\partial t \partial z^2} + \xi_0, \quad 0 < z < h, t > 0, \quad (3.1)$$

$$a(0,t) = 0, \quad a(h,t) = U, \quad t \ge 0, \quad (3.2)$$

$$a(z,0) = u_0(z), \quad 0 \le z \le h. \quad (3.3)$$

Эта задача легко сводится к аналогичной задаче с нулевыми граничными условиями. В самом деле, полагая

$$a(z,t) = -\frac{\xi_0}{2\nu} z^2 + \left(\frac{U}{h} + \frac{\xi_0}{2\nu} h\right) z + \tilde{a}(z,t),$$

[*] Введенное понятие аттрактора близко к понятию *траекторного аттрактора*. В более общей ситуации при определении траекторного аттрактора требуется проверка еще ряда свойств (подробнее см. [6]), которые в рассматриваемом случае выполняются автоматически.

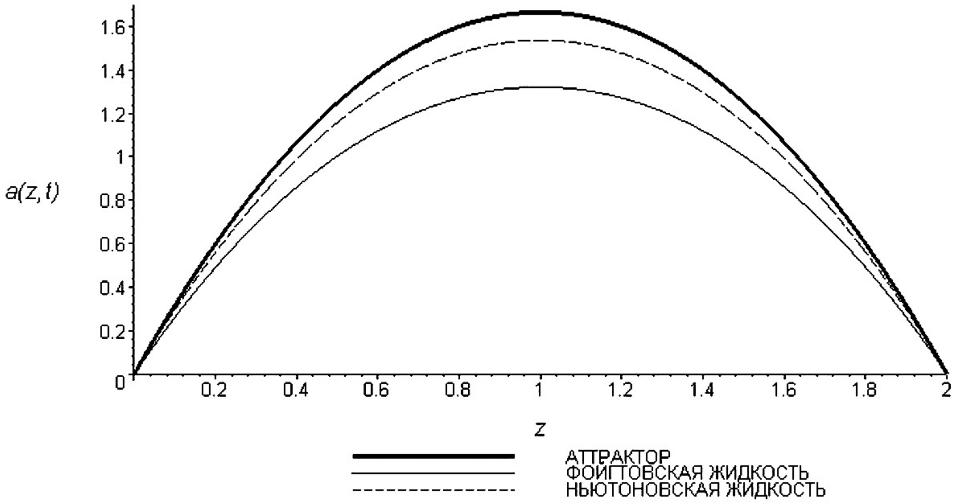

Рис. 1. Распределение скоростей при пуазейлевом течении; $h = 2$, $u_0 = 0$, $\xi_0 = 0.5$, $\nu = 0.15$, $\varkappa = 0.25$ (для фойгтовской жидкости), $t = 7$

получим следующую систему уравнений для новой неизвестной функции $\tilde{a}(z,t)$:

$$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial z^2} + \varkappa \frac{\partial^3 \tilde{a}}{\partial t \partial z^2}, \qquad 0 < z < h, t > 0,$$

$$\tilde{a}(0,t) = 0, \ \ \tilde{a}(h,t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

$$\tilde{a}(z,0) = u_0(z) + \frac{\xi_0}{2\nu} z^2 - \left(\frac{U}{h} + \frac{\xi_0}{2\nu} h\right) z, \ 0 \leq z \leq h.$$

Используя полученные в предыдущем параграфе результаты, можно вывести аналог теоремы 2.1 для задачи (3.1)—(3.3).

Пусть $C_U^1[0,h] = \{u \in C^1[0,h] : u(0) = 0, u(h) = U\}$ — метрическое пространство с метрикой индуцированной из $C^1[0,h]$.

Пусть $u \in C_U^1[0,h]$. Символом a_u обозначим обобщенное решение задачи (3.1), (3.2) с начальным условием $a(z,0) = u(z)$.

Введем пространство обобщенных решений

$$G = \bigcup_{u \in C_U^1[0,h]} \{a_u\}.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $u_0 \in C_U^1[0,h]$. *Тогда задача* (3.1)—(3.3) *имеет единственное обобщенное решение. Для нахождения обобщенного решения может быть использована формула*

$$a(z,t) = -\frac{\xi_0}{2\nu} z^2 + \left(\frac{U}{h} + \frac{\xi_0}{2\nu} h\right) z +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\nu \pi^2 n^2}{h^2 + \varkappa \pi^2 n^2} t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{h} z\right)$$

с коэффициентами

$$A_n = \frac{2}{h} \int_0^h \left(u_0(z) + \frac{\xi_0}{2\nu} z^2 - \left(\frac{U}{h} + \frac{\xi_0}{2\nu} h\right) z\right) \sin\left(\frac{\pi n}{h} z\right) dz.$$

Функция $a_*(z) = -\frac{\xi_0}{2\nu} z^2 + \left(\frac{U}{h} + \frac{\xi_0}{2\nu} h\right) z, \ a_* \in G,$ *является аттрактором в пространстве обобщенных решений* G *в следующем смысле:*

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\sup_{u \in B, z \in [0,h]} \left| a_u(z,t) - a_*(z) \right| \right) = 0$$

для любого ограниченного множества $B \subset C_U^1[0,h]$..

Отметим, что профиль аттрактора a_* определяется параметром $P = \frac{\xi_0 h^2}{2\nu U}$ (см. рис. 2) и не зависит от релаксационных свойств жидкости.

4. ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ

Во втором параграфе мы изучили модель движения жидкости в канале при наличии постоянного перепада давления. В этом пункте будет рассмотрена ситуация, когда перепад давления меняется с течением времени по гармоническому закону

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -Q \cos(\omega t).$$

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, предположим, что жидкость заключена между плоскостями $z = -h$ и $z = h$. В этом случае приходим к системе уравнений:

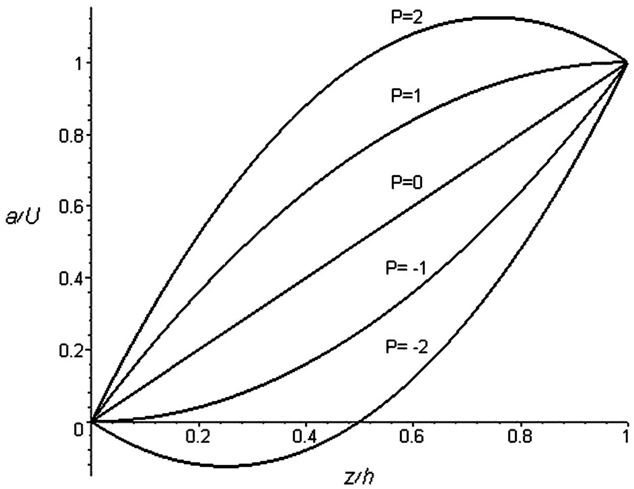

Рис. 2. Аттракторы течения Куэтта-Пуазейля при различных значениях параметра P

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 a}{\partial t \partial z^2} + Q\cos(\omega t), \quad -h < z < h, t > 0, \tag{4.1}$$

$$a(-h,t) = a(h,t) = 0, \;\; t \ge 0, \tag{4.2}$$

$$a(z,0) = u_0(z), \;\; -h \le z \le h. \tag{4.3}$$

Из результатов второго параграфа следует, что данная задача не может иметь более одного обобщенного решения. В самом деле, если a_1, a_2 — обобщенные решения задачи (4.1)—(4.3), то функция $a = a_1 - a_2$ является обобщенным решением соответствующей однородной задачи. Согласно лемме 2.2, такая задача может иметь лишь тривиальное решение, т.е. $a = 0$ и, следовательно, $a_1 = a_2$.

Для облегчения поиска решения перейдем от задачи (4.1)—(4.3) к системе:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 a}{\partial t \partial z^2} + Qe^{-i\omega t}, \quad -h < z < h, t > 0, \tag{4.4}$$

$$a(-h,t) = a(h,t) = 0, \;\; t \ge 0, \tag{4.5}$$

$$a(z,0) = u_0(z), \;\; -h \le z \le h. \tag{4.6}$$

Связь между новой и исходной задачей такова. Если комплекснозначная функция $a(z,t)$ является обобщенным решением задачи (4.4)—(4.6), то ее вещественная часть $\mathrm{Re}\,a(z,t)$ является обобщенным решением задачи (4.1)—(4.3).

Решение задачи (4.4)—(4.6) будем искать в виде

$$a(z,t) = \tilde{a}(z,t) + q(z)e^{-i\omega t} \tag{4.7}$$

В этом случае приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 \tilde{a}}{\partial t \partial z^2} + e^{-i\omega t}\Big((\nu - i\omega\varkappa)q''(z) + i\omega q(z) + Q\Big),$$

$$\tilde{a}(-h,t) = -q(-h)e^{-i\omega t}, \;\; \tilde{a}(h,t) = -q(h)e^{-i\omega t},$$

$$\tilde{a}(z,0) = u_0(z) - q(z).$$

Данная система существенно упростится, если в качестве функции q мы возьмем решение следующей краевой задачи:

$$(\nu - i\omega\varkappa)q''(z) + i\omega q(z) + Q = 0, \tag{4.8}$$

$$q(-h) = q(h) = 0. \tag{4.9}$$

В этом случае мы можем определить функцию $\tilde{a}$ как обобщенное решение задачи

$$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial z^2} + \varkappa\frac{\partial^3 \tilde{a}}{\partial t \partial z^2}, \tag{4.10}$$

$$\tilde{a}(-h,t) = \tilde{a}(h,t) = 0, \tag{4.11}$$

$$\tilde{a}(z,0) = u_0(z) - q(z). \tag{4.12}$$

Разумеется, сначала нам необходимо найти решение задачи (4.8), (4.9).

С помощью замены

$$g(z) = q(z) - i\frac{Q}{\omega} \tag{4.13}$$

преобразуем систему (4.8), (4.9) к виду

$$(\nu - i\omega\varkappa)g''(z) + i\omega g(z) = 0,$$

$$g(-h) = g(h) = -i\frac{Q}{\omega}.$$

Обозначим $\theta = \dfrac{\nu}{\omega}$. После ряда элементарных преобразований получим

$$g''(z) - \left(\frac{\varkappa - i\theta}{\varkappa^2 + \theta^2}\right)g(z) = 0, \tag{4.14}$$

$$g(-h) = g(h) = -i\frac{Q}{\omega}. \tag{4.15}$$

Общее решение уравнения (4.14) имеет вид

$$\begin{aligned} g(z) = (C_1 + iC_2)e^{Az}\Big(\cos(Bz) - i\sin(Bz)\Big) + \\ +(C_3 + iC_4)e^{-Az}\Big(\cos(Bz) + i\sin(Bz)\Big), \end{aligned} \tag{4.16}$$

где C_i, $i = 1,\ldots,4$ — произвольные постоянные, а величины $A = A(\varkappa,\theta)$, $B = B(\varkappa,\theta)$ определяются формулами:

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{\varkappa^2 + \theta^2} + \varkappa}{2(\varkappa^2 + \theta^2)}}, \;\; B = \sqrt{\frac{\sqrt{\varkappa^2 + \theta^2} - \varkappa}{2(\varkappa^2 + \theta^2)}}. \tag{4.17}$$

С помощью краевых условий (4.15) нетрудно определить коэффициенты $C_i,\ i=1,\ldots,4$:

$$C_1=C_3=\frac{Q\sin(Bh)(e^{Ah}-e^{-Ah})}{\omega(e^{2Ah}+e^{-2Ah}+4\cos^2(Bh)-2)}, \quad (4.18)$$

$$C_2=C_4=-\frac{Q\cos(Bh)(e^{Ah}+e^{-Ah})}{\omega(e^{2Ah}+e^{-2Ah}+4\cos^2(Bh)-2)}. \quad (4.19)$$

С учетом формул (4.13), (4.16) имеем:

$$\begin{aligned} q(z)&=C_1\cos(Bz)(e^{Az}+e^{-Az})+\\ &+C_2\sin(Bz)(e^{Az}-e^{-Az})+\\ &+i\Big(-C_1\sin(Bz)(e^{Az}-e^{-Az})+\\ &+C_2\cos(Bz)(e^{Az}+e^{-Az})+\frac{Q}{\omega}\Big), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где постоянные A,B,C_i определяются равенствами (4.17) — (4.19).

Теперь мы можем найти обобщенное решение основной задачи (4.1)—(4.3). Как уже отмечалось ранее, для этого нужно вычислить $\mathrm{Re}a(z,t)$ — вещественную часть обобщенного решения системы (4.4)—(4.6). Согласно формуле (4.7),

$$\mathrm{Re}a(z,t)=\mathrm{Re}\tilde a(z,t)+\mathrm{Re}\Big(q(z)e^{-i\omega t}\Big).$$

С помощью равенства (4.20) получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\Big(q(z)e^{-i\omega t}\Big)&=C_1(e^{Az}\cos(Bz+\omega t)+\\ &+e^{-Az}\cos(Bz-\omega t))+C_2(e^{Az}\sin(Bz+\omega t)-\\ &-e^{-Az}\sin(Bz-\omega t))+\frac{Q}{\omega}\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Вычислим теперь $\mathrm{Re}\tilde a(z,t)$. Функция $\tilde a(z,t)$ по определению есть обобщенное решение задачи (4.10)—(4.12). Поэтому ее вещественная часть $\mathrm{Re}\tilde a(z,t)$ является обобщенным решением задачи (4.10), (4.11) с начальным условием

$$\mathrm{Re}\tilde a(z,0)=u_0(z)-\mathrm{Re}q(z).$$

Таким образом, для нахождения $\mathrm{Re}\tilde a(z,t)$ можно воспользоваться результатами, полученными во втором параграфе.

Рассмотрим функцию

$$\tilde a_1(z,t)=\mathrm{Re}\tilde a(z-h,t),\ 0\le z\le 2h,\ t\ge 0. \quad (4.21)$$

Нетрудно проверить, что функция $\tilde a_1$ является обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial\tilde a_1}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\tilde a_1}{\partial z^2}+\varkappa\frac{\partial^3\tilde a_1}{\partial t\partial z^2}\qquad 0<z<2h,\ t>0,$$

$$\tilde a_1(0,t)=\tilde a_1(2h,t)=0,\qquad t\ge 0,$$

$$\tilde a_1(z,0)=u_0(z-h)-\mathrm{Re}q(z-h),\qquad 0\le z\le 2h$$

В этом случае, согласно теореме 2.1, имеем

$$\tilde a_1(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n b_n(z,t), \quad (4.22)$$

где

$$K_n=\frac{1}{h}\int_0^{2h}(u_0(z-h)-\mathrm{Re}q(z-h))\sin\left(\frac{\pi n}{2h}z\right)dz, \quad (4.23)$$

$$b_n(z,t)=\exp\left(-\frac{\nu\pi^2n^2}{4h^2+\varkappa\pi^2n^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2h}z\right).$$

Искомая величина $\mathrm{Re}\,\tilde a(z,t)$ выражается через найденную функцию $\tilde a_1$ по формуле

$$\mathrm{Re}\tilde a(z,t)=\tilde a_1(z+h,t),\ -h\le z\le h,\ t\ge 0.$$

Суммируя вышеизложенное, сформулируем основной результат этого параграфа.

Обозначим

$$C_0^1[-h,h]=\{u\in C^1[-h,h]:\ u(-h)=u(h)=0\}.$$

Пусть $u\in C_0^1[-h,h]$. Символом a_u обозначим обобщенное решение задачи (4.1), (4.2) с начальным условием $a(z,0)=u(z)$.

Введем пространство обобщенных решений

$$E=\bigcup_{u\in C_0^1[-h,h]}\{a_u\}.$$

Теорема 4.1. *Пусть $u_0\in C_0^1[-h,h]$. Тогда задача (4.1)—(4.3) имеет единственное обобщенное решение*

$$a(z,t)=a_*(z,t)+\hat a(z,t),$$

где функция $a_*(z,t)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} a_*(z,t)&=C_1\Big(e^{Az}\cos(Bz+\omega t)+\\ &+e^{-Az}\cos(Bz-\omega t)\Big)+\\ &+C_2\Big(e^{Az}\sin(Bz+\omega t)-\\ &-e^{-Az}\sin(Bz-\omega t)\Big)+\frac{Q}{\omega}\sin(\omega t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

с постоянными A,B,C_1,C_2, заданными в (4.17)—(4.19); функция $\hat a(z,t)$ является суммой равномерно сходящегося ряда

$$\hat a(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n\exp\left(-\frac{\nu\pi^2n^2}{4h^2+\varkappa\pi^2n^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi n(z+h)}{2h}\right)$$

с коэффициентами K_n, заданными формулой (4.23).

Функция $a_*\in E$ является аттрактором в пространстве обобщенных решений E в следующем смысле:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sup_{u\in B, z\in[-h,h]}\left|a_u(z,t)-a_*(z,t)\right|\right)=0$$

для любого ограниченного множества $B\subset C_0^1[-h,h]$.

Из формул (4.24), (4.17)—(4.19) видно, что функция a_* зависит от параметра $\varkappa$. Поэтому в модели осциллирующего течения аттрактор существенно зависит от релаксационных свойств жидкости. Это хорошо иллюстрирует рис. 3. Максимум скорости ньютоновской жидкости достигается вблизи стенок канала, что соответствует «аннулярному эффекту Ричардсона» (см., например, [12]). В случае жидкости Фойгта этот эффект может отсутствовать.

5. ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В этом параграфе мы рассмотрим еще один пример течений вида (1.9)—(1.12). В представлении (1.9)—(1.12) положим

$$a=b=\mathrm{w}=\xi=\zeta=\gamma=0,\ \mathrm{v}=-\mathrm{u},\ \alpha=\beta. \quad (5.1)$$

В этом случае

$$v_1=-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}x-uy, \quad (5.2)$$

$$v_2=ux-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}y, \quad (5.3)$$

$$v_3=f, \quad (5.4)$$

$$p=\eta-\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{2}f^2-\int\frac{\partial f}{\partial t}dz+\nu\frac{\partial f}{\partial z}+\varkappa\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial z}. \quad (5.5)$$

Ясно, что течение с компонентами скорости v_1, v_2, v_3 из (5.2)—(5.4) представляет собой композицию соосных осесимметричных и вращательных (с угловой скоростью u) движений жидкости. Такие течения принято называть течениями класса Кармана.

Неизвестные функции u, f, α должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial z}+f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=\nu\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}+\varkappa\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial z^3}-2u^2-2\alpha, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}u=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\varkappa\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial z^2}, \quad (5.7)$$

которая получается из общей определяющей системы (1.13)—(1.18) в результате подстановки соотношений (5.1).

В силу нелинейности системы (5.6), (5.7) поиск ее решений является достаточно трудной задачей. Однако при изучении отдельных типов движений эта задача может упростится. В некоторых случаях система (5.6), (5.7) сводится к одному или нескольким нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям, для

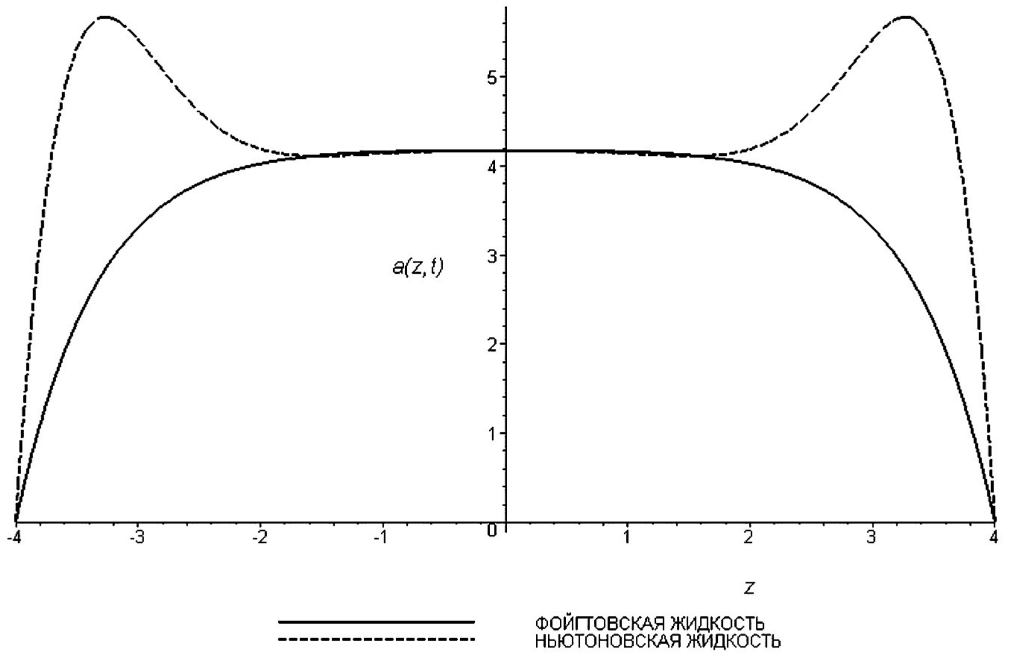

Рис. 3. Распределение скоростей при осциллирующем течении в канале; $h=4$, $u_0=0$, $Q=8$, $\omega=1$, $\nu=0.15$, $\varkappa=0.6$ (для фойгтовской жидкости), $t=94.8$

исследования которых могут быть успешно использованы классические методы теории дифференциальных уравнений, методы нелинейного анализа, а также численные методы.

В качестве примера рассмотрим один класс решений системы (5.6), (5.7).

Пусть

$$u(z,t) = A(t) + B(t)\sin\left(\omega(t)z + \theta(t)\right), \quad (5.8)$$

$$f(z,t) = U(t) + V(t)z + W(t)\sin\left(\omega(t)z + \theta(t)\right), \quad (5.9)$$

где $A, B, U, V, W, \omega, \theta$ — неизвестные функции времени t.

Уравнения (5.6), (5.7) с учетом (5.8), (5.9) сводятся к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$V' - \frac{1}{2}V^2 + 2(A^2 - B^2 + \alpha) = 0, \quad (5.10)$$

$$W'(1 + \varkappa\omega^2) + W(\nu\omega^2 - 2V + 2\varkappa\omega\omega') = 0, \quad (5.11)$$

$$A' - VA = 0, \quad (5.12)$$

$$\omega'(1 + \varkappa\omega^2) + V\omega = 0, \quad (5.13)$$

$$A = \pm\frac{1}{2}(\theta'(1 + \varkappa\,\omega^2) + U\omega), \quad (5.14)$$

$$B = \pm\frac{1}{2}W\omega, \quad (5.15)$$

причем знак «плюс» или «минус» в равенствах (5.14), (5.15) следует выбирать одновременно.

Покажем, как может быть использован класс решений (5.8), (5.9) при изучении одной модели затухающего движения вращающейся жидкости.

Пусть жидкость, занимающая полупространство $z > 0$, в начальный момент времени $t = 0$ приведена во вращение вокруг оси z с угловой скоростью $u_0(z) = \Omega z$, где Ω — некоторое число. Требуется определить движение жидкости при $t > 0$.

Для нахождения компонент скорости и давления мы имеем общую систему уравнений (1.4), которая в рассматриваемом случае дополняется начальными условиями:

$$v_1(x,y,z,0) = -u_0(z)y, \quad (5.16)$$

$$v_2(x,y,z,0) = u_0(z)x, \quad (5.17)$$

$$v_3(x,y,z,0) = 0 \quad (5.18)$$

и условием прилипания на границе $z = 0$

$$v_i(x,y,0,t) = 0, \quad i = 1,2,3. \quad (5.19)$$

* Аналогичная система для случая уравнений Навье—Стокса была выведена в работе [8].

Обозначим $\mathcal{R} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,+\infty)$.

Определение 5.1. *Решением задачи* (1.4), (5.16)—(5.19) *назовем четверку функций* (v_1, v_2, v_3, p) *такую, что*

i) функции v_i, p *удовлетворяют системе уравнений* (1.4) в $\mathcal{R}\times(0,+\infty)$,

ii) функции v_i *непрерывны в* $\mathcal{R}\times[0,+\infty)$ *и удовлетворяют начальным условиям* (5.16)—(5.18) *и граничным условиям* (5.19),

iii) для любого ограниченного множества $\mathcal{M}\subset\mathcal{R}$ *функции* $v_i(x,y,z,t)$ *стремятся к нулю равномерно относительно* $(x,y,z)\in\mathcal{M}$, когда $t\to+\infty$.

Будем искать решение задачи (1.4), (5.16)—(5.19) вида (5.2)—(5.5). Предположим, что для функций u, f имеет место представление (5.8), (5.9). Как было установлено ранее, в этом случае система уравнений (1.4) сводится к системе (5.10)—(5.15).

Для выполнения условия прилипания необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{u}(0,t) = f(0,t) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,t) = 0.$$

Поэтому неизвестные параметры представления (5.8), (5.9) выберем так, что

$$A = U = \theta = 0, \quad (5.20)$$

$$V + W\omega = 0. \quad (5.21)$$

С учетом (5.20) упрощаются формулы, определяющие функции u и f:

$$\mathrm{u}(z,t) = B(t)\sin(\omega(t)z), \quad (5.22)$$

$$f(z,t) = V(t)z + W(t)\sin(\omega(t)z). \quad (5.23)$$

Упрощается также и система (5.10)—(5.15), в которой равенства (5.12), (5.14) выполняются автоматически.

Таким образом, приходим к следующей системе уравнений:

$$V' - \frac{1}{2}V^2 + 2(\alpha - B^2) = 0, \quad (5.24)$$

$$W'(1 + \varkappa\omega^2) + W(\nu\omega^2 - 2V + 2\varkappa\omega\omega') = 0, \quad (5.25)$$

$$\omega'(1 + \varkappa\,\omega^2) + V\omega = 0, \quad (5.26)$$

$$B = \pm\frac{1}{2}W\omega, \quad (5.27)$$

$$V + W\omega = 0. \quad (5.28)$$

Откладывая до некоторого времени вопрос о выполнении начальных условий (5.16)—(5.18), приступим к изучению системы уравнений (5.24)—(5.28).

Заметим, что система (5.24)—(5.28) содержит замкнутую подсистему из трех уравнений (5.25), (5.26), (5.28) для трех неизвестных функций V, W, ω. После нахождения этих функций другие неизвестные величины — α, B легко определяются из уравнений (5.24), (5.27). Поэтому вначале мы рассмотрим задачу (5.25), (5.26), (5.28).

Выразим из равенств (5.26), (5.28) функции V, W :

$$V = -\frac{\omega'}{\omega}(1+\varkappa\omega^2), \tag{5.29}$$

$$W = \frac{\omega'}{\omega^2}(1+\varkappa\omega^2). \tag{5.30}$$

Подставляя значения V, W в (5.25), получим уравнение для функции ω

$$\omega''(1+\varkappa\omega^2)+4\varkappa\omega\left(\omega'\right)^2+\nu\omega'\omega^2=0 \tag{5.31}$$

Это уравнение допускает понижение порядка. В самом деле, в силу очевидного соотношения

$$\frac{(\omega'(1+\varkappa\omega^2)^2)'}{1+\varkappa\omega^2}=\omega''(1+\varkappa\omega^2)+4\varkappa\omega(\omega')^2,$$

уравнение (5.31) можно записать в виде

$$(\omega'(1+\varkappa\omega^2)^2)'+\nu\omega'\omega^2+\nu\varkappa\omega'\omega^4=0,$$

откуда следует, что

$$\left(\omega'(1+\varkappa\omega^2)^2+\frac{\nu}{3}\omega^3+\frac{\nu\varkappa}{5}\omega^5\right)'=0.$$

В результате приходим к уравнению первого порядка

$$\omega'=-\frac{3\nu\varkappa\omega^5+5\nu\omega^3-15C}{15(1+\varkappa\omega^2)^2} \tag{5.32}$$

с произвольной постоянной C.

Отметим необходимые свойства уравнения (5.32).

$i)$ *Задача Коши, соответствующая уравнению* (5.32) *с фиксированным значением параметра* C , *имеет единственное решение на произвольном отрезке* $[0,T]$.

Асимптотическое поведение решений уравнения (5.32) при $t\to+\infty$ характеризует следующее свойство.

$ii)$ *Если функция* $\omega_c=\omega_c(t), C\in\mathbb{R}$, *является решением уравнения* (5.32) *на полуоси* $[0,+\infty)$, *то*

$$\lim_{t\to+\infty}\omega_c(t)=\tau_c, \tag{5.33}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\omega_c'(t)=0, \tag{5.34}$$

где τ_c *— вещественный корень алгебраического уравнения (относительно переменной* z *)*

$$3\nu\varkappa z^5+5\nu z^3-15C=0.$$

Обозначим через ω_{c,ω_0} решение уравнения (5.32), удовлетворяющее начальному условию $\omega(0)=\omega_0$. Справедливо соотношение

$iii)$ $\omega_{-c,-\omega_0}(t)=-\omega_{c,\omega_0}(t)$.

Свойство $iii)$ очевидно. Нетрудно также установить и свойство $ii)$. Для этого достаточно проанализировать асимптотические свойства слагаемых, составляющих общий интеграл уравнения (5.32).

Докажем свойство $i)$. Зафиксируем произвольное значение величины $C\in\mathbb{R}$. Для доказательства разрешимости задачи Коши

$$\omega'=-\frac{3\nu\varkappa\omega^5+5\nu\omega^3-15C}{15(1+\varkappa\omega^2)^2},\ 0\le t\le T, \tag{5.35}$$

$$\omega(0)=\omega_0, \tag{5.36}$$

воспользуемся теорией степени Лере—Шаудера (см., например, [13]).

Рассмотрим однопараметрическое семейство задач

$$\omega'=-\frac{\lambda\left(3\nu\varkappa\omega^5+5\nu\omega^3-15C\right)}{15(1+\varkappa\omega^2)^2}, \quad 0\le t\le T,\ 0\le\lambda\le 1, \tag{5.37}$$

$$\omega(0)=\lambda\omega_0. \tag{5.38}$$

Нетрудно проверить, что при фиксированном $\lambda, 0\le\lambda\le 1$ задача (5.37), (5.38) эквивалентна операторному уравнению

$$\omega=\lambda k(\omega) \tag{5.39}$$

с вполне непрерывным оператором $k: C[0,T]\to C[0,T]$,

$$k(\omega)(t)=\omega_0-\int_0^t\frac{3\nu\varkappa\omega^5(s)+5\nu\omega^3(s)-15C}{15(1+\varkappa\omega^2(s))^2}ds.$$

Кроме того, множество решений семейства задач (5.37), (5.38) априори ограничено в пространстве $C[0,T]$. В самом деле, пусть функция $\omega(t)$ является решением задачи (5.37), (5.38) при некотором значении параметра $\lambda\in[0,1]$. Умножая обе части равенства (5.37) на ω и отбрасывая отрицательные слагаемые в правой части, получим оценку

$$\omega'\omega\le\left|C\omega\right|.$$

Умножим обе части полученного неравенства на 2 и проинтегрируем от 0 до t. В результате получим

$$\omega^2(t) - \lambda^2\omega_0^2 \le 2\left|C\right|\int_0^t\left|\omega(s)\right|ds,$$

откуда следует, что

$$\omega^2(t) \le \omega_0^2 + \left|C\right|T + \left|C\right|\int_0^t \omega^2(s)ds.$$

Применяя лемму Гроноулла—Беллмана, получим оценку

$$\omega^2(t) \le \left(\omega_0^2 + \left|C\right|T\right)\exp\left(\left|C\right|t\right).$$

Поэтому

$$\left\|\omega\right\|_{C[0,T]} = \max_{0\le t\le T}\left|\omega(t)\right| \le M, \qquad (5.40)$$

где $M = \left(\left(\omega_0^2 + \left|C\right|T\right)\exp\left(\left|C\right|T\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ — константа, независящая от ω.

Обозначим символом $B_{M+1}(0)$ шар в пространстве $C[0,T]$ радиуса $M+1$ с центром в нуле.

Из априорной оценки (5.40) следует, что определена степень Лере-Шаудера

$$\deg_{LS}\left(id - \lambda k, \bar{B}_{M+1}(0), 0\right) \qquad (5.41)$$

вполне непрерывного векторного поля $id - \lambda k : \bar{B}_{M+1}(0) \to C[0,T]$, причем, в силу свойства гомотопической инвариантности степени, величина (5.41) не зависит от $\lambda, 0 \le \lambda \le 1$. Поэтому

$$\deg_{LS}\left(id - k, \bar{B}_{M+1}(0), 0\right) = \deg_{LS}\left(id, \bar{B}_{M+1}(0), 0\right) = 1.$$

Согласно теории степени Лере—Шаудера, в этом случае в шаре $B_{M+1}(0)$ имеется ω_* — решение операторного уравнения

$$\omega = k(\omega).$$

Ясно, что функция ω_* является также решением задачи Коши (5.35), (5.36). При этом, в силу гладкости правой части (5.35), данное решение единственно. Таким образом, свойство $i)$ полностью доказано.

Вернемся теперь к изучению исходной задачи (1.4), (5.16)—(5.19).

Для нахождения функций v_i, $i = 1,2,3$, нам требуется определить величины u, f. Используя равенства (5.22), (5.23), (5.27), (5.29), (5.30), выразим значения u, f через функцию ω и ее производную:

$$u(z,t) = \pm\frac{\omega'(t)}{2\omega(t)}\left(1 + \varkappa\omega^2(t)\right)\sin(\omega(t)z), \qquad (5.42)$$

$$f(z,t) = -\frac{\omega'(t)}{\omega^2(t)}\left(1 + \varkappa\omega^2(t)\right)\left(\omega(t)z - \sin(\omega(t)z)\right). \qquad (5.43)$$

Попытаемся выбрать константу C и начальное условие

$$\omega(0) = \omega_0 \qquad (5.44)$$

для уравнения (5.32) так, чтобы выполнялись начальные условия (5.16)—(5.18).

Из представления (5.2)—(5.4) следует, что для выполнения равенств (5.16)—(5.18) необходимо и достаточно, чтобы

$$f(z,0) = 0,\ z \ge 0, \qquad (5.45)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,0) = 0,\ z \ge 0, \qquad (5.46)$$

$$\mathrm{u}(z,0) = u_0(z),\ z \ge 0. \qquad (5.47)$$

Из формул (5.42), (5.43) видно, что, если в (5.44) положить $\omega_0 \ne 0,$, то условия (5.45)—(5.47) не выполняются. Поэтому рассмотрим ситуацию, когда

$$\omega(0) = 0.$$

Формально в этом случае функции $u, f, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ неопределены при $t = 0$. Однако эти функции можно доопределить по непрерывности, полагая

$$f(z,0) = \lim_{t\to 0+} f(z,t),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,0) = \lim_{t\to 0+}\frac{\partial f}{\partial z}(z,t),$$

$$u(z,0) = \lim_{t\to 0+} u(z,t).$$

Покажем, что рассмотренные пределы существуют, конечны и вычислим значения этих пределов. В силу эквивалентности величин

$$\sin(\omega z) \sim \omega z - \frac{\omega^3 z^3}{6},$$

$$\cos(\omega z) \sim 1 - \frac{\omega^2 z^2}{2}$$

при $t \to 0$, из равенств (5.42), (5.43) получим

$$\lim_{t\to 0+} f(z,t) = \lim_{t\to 0+} -\frac{\omega'(t)\left(1 + \varkappa\omega^2(t)\right)\omega(t)z^3}{6} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) = \lim_{t\to 0+} -\frac{\omega'(t)\left(1 + \varkappa\omega^2(t)\right)\omega(t)z^2}{2} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0+}\mathrm{u}(z,t) = \lim_{t\to 0+} \pm\frac{\omega'(t)\left(1 + \varkappa\omega^2(t)\right)z}{2} = $$

$$= \pm\frac{\omega'(0)}{2}z = \pm\frac{C}{2}z.$$

Таким образом, для выполнения условий (5.45)—(5.47) достаточно положить

$$C = 2\Omega,$$

если в формуле (5.42) выбран знак «плюс», или

$$C = -2\Omega,$$

если в (5.42) выбран знак «минус». В силу свойства *iii*) решений уравнения (5.32) и формул (5.42), (5.43) в обоих случаях мы приходим к одним и тем же выражениям для функций u, f.

Суммируя вышеизложенное, получим следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Задача* (1.4), (5.16)—(5.19) *имеет по крайней мере одно решение вида* (5.2)—(5.5). *Для нахождения этого решения могут быть использованы формулы:*

$$\mathrm{u}(z,t) = \frac{\omega'(t)}{2\omega(t)}\left(1 + \varkappa\omega^2(t)\right)\sin(\omega(t)z),\ z \ge 0, t > 0,$$

$$f(z,t) = -\frac{\omega'(t)}{\omega^2(t)}\left(1 + \varkappa\omega^2(t)\right)\left(\omega(t)z - \sin(\omega(t)z)\right),$$

$$z \ge 0, t > 0,$$

где функция $\omega = \omega(t)$ *есть решение задачи Коши*

$$\omega' = -\frac{3\nu\varkappa\omega^5 + 5\nu\omega^3 - 30\Omega}{15(1+\varkappa\omega^2)^2}, \tag{5.48}$$

$$\omega(0) = 0. \tag{5.49}$$

На основе численного решения задачи Коши (5.48), (5.49) получены графики функций f и u, определяющих в рассматриваемой модели вертикальную компоненту скорости v_3 и угловую скорость соответственно.

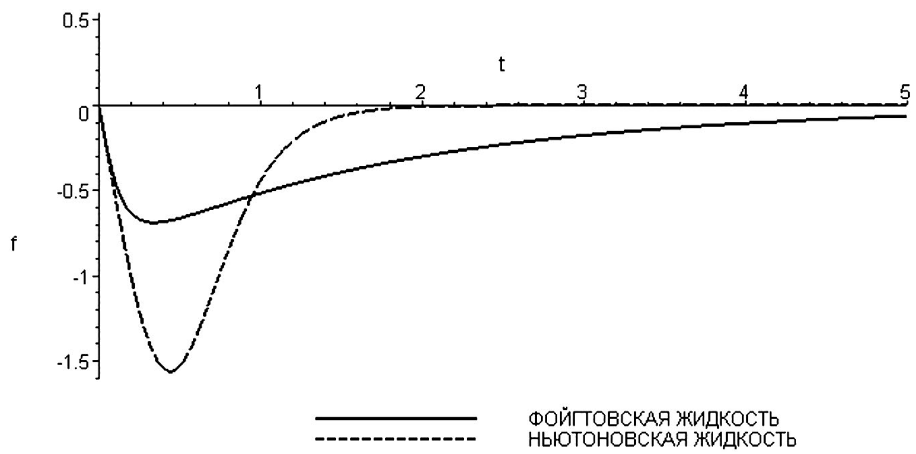

Рис. 4. Зависимость величины $f(z,\cdot)$ от времени t при $z = 2$ $\Omega = 1$; $\nu = 2$, время запаздывания для фойгтовской жидкости $\varkappa = 3$

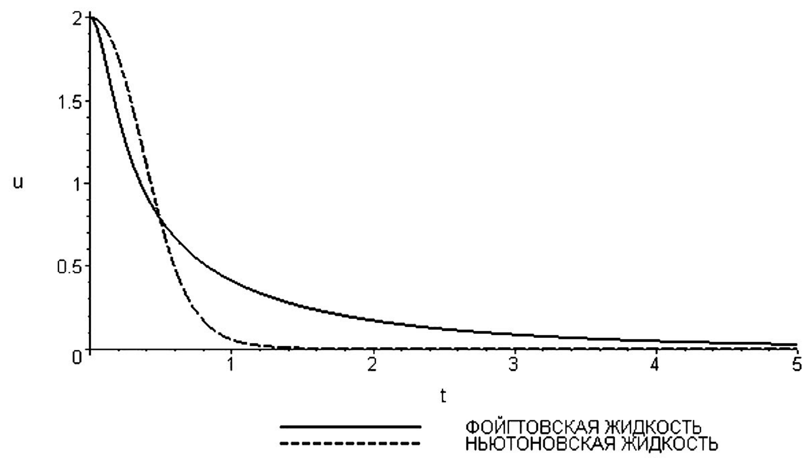

Рис. 5. Зависимость величины $u(z,\cdot)$ от времени t при тех же параметрах, что и на рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осколков А. П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров / А. П. Осколков // Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1973. — Т. 38. — С. 98—136.

2. *Осколков А. П.* О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А. П. Осколков // Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1975. — Т. 52. — С. 128—157.

3. *Осколков А. П.* К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина-Фойгта / А. П. Осколков // Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1982. — Т. 115. — С. 191—202.

4. *Звягин В. Г.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта / В. Г. Звягин, М. В. Турбин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т. 31. — С. 3—144.

5. *Кондратьев С. К.* Об аттракторах модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров / С. К. Кондратьев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. —— 2010. — № 1. — — С. 117—138.

6. *Звягин В. Г.* Аттракторы для уравнений моделей движения вязкоупругих сред : учебное пособие / В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев. — Воронеж : Издат.-полиграф. центр Воронежского гос. университета, 2010. — 266 с.

7. *Гольдштейн Р. В.* Механика сплошных сред. Часть I / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов // М.: Наука. Физматлит, 2000. — 256 с.

8. *Аристов С. Н.* Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных / С. Н. Аристов, Д. В. Князев, А. Д. Полянин // Теоретические основы химической технологии. — 2009. — Т. 43. — № 5. — С. 547—566.

9. *Пухначев В. В.* Симметрии в уравнениях Навье-Стокса / В. В. Пухначев // Успехи механики. — 2006. — № 6. — С. 3—76.

10. *Drazin P. G.* The Navier-Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions / P. G. Drazin, N. Riley // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. — 196 p.

11. *Полянин А. Д.* О нелинейной неустойчивости решений систем гидродинамического типа / А. Д. Полянин // Письма в ЖЭТФ. — 2009. — Т. 90. — Вып 3. — С. 238—242.

12. *Шлихтинг Г.* Теория погран ичного слоя / Г. Шлихтинг // М.: Наука, 1974. — 711 с.

13. *Lloyd N. G.* Degree theory / N. G. Lloyd // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978. — 172 p.

Барановский Евгений Сергеевич — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник НИИ математики. Воронежский государственный университет

E-mail: bes220@rambler.ru

Тел.: 8-960-139-46-63

Baranovski Evgeni Sergeevich — research assistant of Research Institute of Mathematics. Voronezh State University

E-mail: bes220@rambler.ru

Tel.: 8-960-139-46-63