

ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ЭЛЕКТРОНА В 2D КУЛОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ В ПРИСУТСТВИИ ПОТОКА ААРОНОВА—БОМА

Ханг Т.Т. Нгуен¹, П.А. Мелешенко², А.Ф. Клиньских¹

¹*Воронежский государственный университет*

²*Воронежский государственный аграрный университет им. К.Д. Глинки*

Поступила в редакцию 24.03.2011 г.

Аннотация. В работе получены волновые функции дискретного спектра электрона в двумерном кулоновском потенциале в присутствии потока Ааронова—Бома. Рассчитана величина динамической поляризуемости основного состояния электрона в данном потенциале. Показано, что поток эффекта Ааронова—Бома может служить управляющим параметром для величины поляризуемости.

Ключевые слова: двумерный кулоновский потенциал, поток Ааронова—Бома, динамическая поляризуемость.

Abstract. An exact solution of the Schrödinger equation in the discrete spectrum of a 2D Coulomb potential in the presence of the Aharonov—Bohm flux is obtained and analyzed. The results for the dynamical polarizability of an electron ground state in such a potential are presented. We demonstrate that the Aharonov—Bohm flux may be considered as a driven parameter for the polarizability values.

Key words: 2D Coulomb potential, the Aharonov—Bohm flux, dynamical polarizability.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исторически двумерный кулоновский потенциал (проблема двумерного водорода) был введен в рассмотрение Коном и Латтинджером в качестве эффективного приближения при описании динамики электронов в сильно анизотропных кристаллах [1]. В дальнейшем проблема взаимодействия электрона с двумерным кулоновским потенциалом была развита в целом ряде работ [2, 3]. В частности, в [4, 5] дана достаточно полная теория двумерного атома водорода как в нерелятивистском, так и в релятивистском случаях. В работе [6] рассматривается теория водородного молекулярного иона в двух пространственных измерениях. В настоящее время интерес к двумерным структурам связан с быстрым развитием методик получения, изучения, а также широким кругом прикладных аспектов таких чисто двумерных систем как графен [7] и графан [8]. Следует отметить также, что на эксперименте удается получать двумерные водородоподобные структуры (в частности, в работе [9] сообщается о получении квазиконденсата двумерного водорода).

Одним из интереснейших “двумерных эффектов” является эффект Ааронова—Бома [10], не перестающий волновать умы ученых на протяжении уже более пятидесяти лет, о чем свидетельствует обширный список литературы по данному вопросу (см. [11, 12] и связанные с ними ссылки). Суть данного эффекта состоит в том, что электромагнитное поле, сосредоточенное в области недоступной для заряженной частицы, тем не менее, влияет на ее квантовое состояние. В случае свободного двумерного электрона соответствующее влияние определяет рассеяние, амплитуда которого была впервые получена в [10]. Экспериментальное подтверждение эффекта было окончательно продемонстрировано лишь через два десятилетия после его открытия [12].

Проблема поведения электрона в системе, представляющей собой комбинацию двумерного кулоновского потенциала и потока Ааронова—Бома, была рассмотрена в работе [13] в рамках релятивистской квантовой механики. Авторами были получены аналитические выражения для волновой функции и уровней энергии электрона, однако, данные результаты являются труднопроизводимыми и сложными

© Ханг Т.Т. Нгуен, Мелешенко П. А., Клиньских А. Ф., 2011

ми для восприятия. Кроме того, в данной работе делается акцент на получении характеристик рассеяния, именно амплитуды и сечения рассеяния (по аналогии с оригинальной статьей [10]) и не рассматривается взаимодействие такой системы с внешним электромагнитным полем. В связи с этим, в данной работе будет рассмотрена динамическая поляризуемость (функция отклика системы на внешнее поле) электрона в двумерном кулоновском потенциале в присутствии потока Ааронова—Бома.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 представлены общие соотношения для динамической поляризуемости квантовой системы в формализме функций Грина. В разделе 3 кратко приводятся основные результаты для двумерного кулоновского потенциала, в частности, записаны волновые функции дискретного спектра, приведено выражение для уровней энергии связанных состояний. В разделе 4 рассматривается точное решение уравнения Шредингера (рассматривается нерелятивистский случай) для комбинации двумерного кулоновского потенциала и потока Ааронова—Бома в дискретном спектре. В разделе 5 представлены численные результаты для динамической поляризуемости основного состояния электрона в данном потенциале. В заключении сформулированы основные результаты представленной работы.

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ

Динамическая поляризуемость играет существенную роль при описании процессов взаимодействия между веществом и электромагнитным полем [14—17]. Данная величина характеризует отклик системы на внешнее воздействие и определяет, в частности, частотные зависимости диэлектрической проницаемости и показателя преломления заданной системы. Универсальность данной характеристики позволяет успешно применять ее как для макроскопических объектов, так и для микроскопических (квантовых структур). В связи со стремительным развитием современных методов получения и исследования различных наноразмерных объектов (сугубо квантовых структур) задача о расчете динамической поляризуемости квантовых состояний электрона в таких системах является, несомненно, актуальной и востребованной.

Динамическая поляризуемость состояния частицы $\chi(\omega)$, зависящая от частоты ω внешнего электромагнитного поля, является основной величиной, характеризующей поляризационные эффекты в атомных переходах. Существуют различные методы и модели для определения поляризуемости многочастичных квантовых систем: локальная плазменная модель Брандта—Лундквиста, кинетическая модель и др. [18].

В данной работе расчет динамической поляризуемости основного состояния электрона в двумерном кулоновском потенциале в присутствии потока Ааронова—Бома основан на формализме функции Грина, с помощью которого данная величина определяется как [19]:

$$\chi(\omega) \propto \langle n | \vec{r} G(r, r', E) \vec{r}' | n \rangle, \quad (1)$$

где $|n\rangle$ — волновая функция основного состояния частицы, $G(r, r', E)$ — функция Грина, определяемая стандартным образом:

$$G(r, r', E) = \sum_i \frac{|\psi_i(\vec{r})\rangle \langle \psi_i(\vec{r}')|}{E_i - E}, \quad (2)$$

где $|\psi_i(\vec{r})\rangle$ и E_i волновые функции и энергии i -го состояния частицы соответственно.

Далее, с помощью стандартных методов квантовой механики мы определим основные величины, характеризующие рассматриваемую систему (именно, волновые функции и энергии связанных состояний), входящие в (2).

3. ДВУМЕРНЫЙ КУЛОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ: ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И УРОВНИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим двумерный кулоновский потенциал, определяемый выражением:

$$V(x, y) = \frac{\alpha}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad (3)$$

где $\alpha = \pm e^2$. Выбор знака в данном выражении отвечает характеру потенциала (отталкивающий или притягивающий соответственно).

Двумерное уравнение Шредингера с потенциалом (3) имеет вид:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} - E \right] \psi(x, y) = 0$$

и, как известно (см. например [4]), имеет точные решения, как в дискретном, так и в непрерывном спектре. В дискретном спектре решение

будет выглядеть следующим образом (используется полярная система координат (r, θ)):

$$\psi_{nm}(r, \theta) = 2\kappa_n \sqrt{\frac{1}{2n-1} \frac{\Gamma(n-m)}{\Gamma(n+m)}} e^{-\kappa_n r} \times L_{n-m-1}^{2m}(2\kappa_n r) \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4)$$

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa_n^2}{2M} = -\frac{Me^4}{2\hbar^2(n-1/2)^2}, n = 1, 2, \dots$$

где $\Gamma(z)$ есть гамма-функция Эйлера, $L_N^M(z)$ — обобщенный полином Лагерра. Таким образом, из (4) видно, что энергетический спектр данной системы напоминает спектр трехмерного кулоновского потенциала, однако энергия основного состояния по абсолютной величине оказывается в два раза больше. Следует отметить также еще одну особенность данного потенциала, заключающуюся в том, что точное квантово механическое выражение для сечения рассеяния отличается от результатов различных приближений — классического и борновского, тогда как в трехмерном случае эти выражения совпадают [20]

4. ДВУМЕРНЫЙ КУЛОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ В ПРИСУТСТВИИ ПОТОКА ААРОНОВА—БОМА

В том случае, когда наряду с двумерным кулоновским потенциалом присутствует поток Ааронова—Бома, оказывается возможным решить уравнение Шредингера точно и получить аналитические выражения для волновых функций и уровней энергии связанных состояний. Вид уравнения Шредингера для комбинации двумерного кулоновского потенциала и потока Ааронова—Бома есть:

$$\left[\frac{1}{M} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A}_{AB} \right)^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} - E \right] \psi(x, y) = 0, \quad (5)$$

где векторный потенциал \vec{A}_{AB} (векторный потенциал потока Ааронова—Бома) определяется как [10]:

$$\vec{A}_{AB} = \frac{\Phi}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

Здесь M — масса электрона, $\alpha = \pm e^2$, e — заряд электрона, Φ — магнитный поток (поток Ааронова—Бома). Легко проверить, что выполняется равенство $\text{div} \vec{A} = 0$ и можно переписать (5) в полярной системе координат следующим образом:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i\lambda \right)^2 - \frac{2M}{\hbar^2} \left(\frac{\alpha}{r} - E \right) \right] \psi(r, \theta) = 0,$$

где использованы следующие обозначения:

$$\lambda = \left[\frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} \right] = \left[\frac{\Phi}{\Phi_0} \right]$$

и $\Phi_0 = 2\pi\hbar c / e$ есть квант магнитного потока (здесь $[z]$ означает дробную часть z , поскольку при целых значениях параметра λ эффект Ааронова—Бома отсутствует, что может быть продемонстрировано в уравнении (5) с помощью подходящего калибровочного преобразования [11]).

Далее, переменные r и θ разделяются с помощью стандартной подстановки

$$\psi(r, \theta) = R(r) \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}},$$

и для радиальной функции $R(r)$ получается уравнение:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left[\frac{|m - \lambda|^2}{r^2} + \frac{2M}{\hbar^2} \left(\frac{\alpha}{r} - E \right) \right] R = 0 \quad (6)$$

с граничным условием $R(0) = 0$.

Для случая дискретного спектра энергия электрона может быть записана в виде:

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2M}, \quad (7)$$

где $\kappa > 0$. После подстановки (7) в (6) для волновой функции может быть записано следующее выражение, удовлетворяющее граничным условиям в нуле и на бесконечности, именно $R(0) = 0$ (физически данное условие отвечает непроницаемости соленоида Ааронова—Бома для электрона), $R(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$:

$$R(r) = e^{-\kappa r} r^{|m-\lambda|} W(r). \quad (8)$$

Для функции $W(r)$ получаем следующее уравнение:

$$\xi W'' + \left[(2|m - \lambda| + 1) - \xi \right] W' - \left[|m - \lambda| + \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\kappa} \right] W = 0,$$

где

$$\xi = 2\kappa r, \quad \beta = \pm \frac{2M|\alpha|}{\hbar^2}, \quad W' = \frac{dW}{d\xi}.$$

Решение данного уравнения $W(\xi)$ регулярное при $\xi = 0$ есть

$$W(\xi) = C_{nm} {}_1F_1\left(\left|m - \lambda\right| + \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\kappa}, 2\left|m - \lambda\right| + 1; \xi\right),$$

где ${}_1F_1(a, b; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [21] и C_{nm} — нормировочный коэффициент. Решение, удовлетворяющее граничному условию на бесконечности, получается в том случае, когда $\left|m - \lambda\right| + \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\kappa}$ есть целое отрицательное число, т.е. тогда, когда функция ${}_1F_1(a, b; z)$ имеет степень не выше, чем $-\left|m - \lambda\right| - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\kappa}$. Таким образом, может быть введено обозначение

$$\left|m - \lambda\right| + \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\kappa} = -n_r, \quad n_r = 0, 1, \dots,$$

где n_r есть радиальное квантовое число. Вспоминая определение параметра κ из (7), выражение для энергетических уровней электрона в дискретном спектре будет иметь вид:

$$E_n = -\frac{Me^4}{2\hbar^2\left(n - \frac{1}{2} + \left|m - \lambda\right| - \left|m\right|\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Здесь $n = n_r + \left|m\right| + 1$ есть главное квантовое число (поскольку главное квантовое число n должно быть целым положительным, можно заключить, что $n > \left|m\right| + 1$, или $\left|m\right| \leq n - 1$). Очевидно, что в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$, который соответствует отсутствию потока Ааронова—Бома спектр энергий (9) переходит в спектр “чистого” двумерного кулоновского потенциала (4).

Радиальные волновые функции стационарных состояний, определенные в (8) должны удовлетворять условию нормировки следующего вида:

$$\int_0^\infty r R_{nm}^2(r) dr = 1.$$

В итоге, для точных волновых функций дискретного спектра рассматриваемой системы будем иметь следующее выражение:

$$\psi_{nm}(r, \theta) = C_{nm} \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} r^{\left|m - \lambda\right|} \exp(-\kappa_{nm} r) \times {}_1F_1(-n + \left|m\right| + 1, 2\left|m - \lambda\right| + 1; 2\kappa_{nm} r). \quad (10)$$

Здесь нормировочный коэффициент C_{nm} есть (вычисление нормировочного коэффициента

может быть проведено с использованием значений интегралов, рассмотренных в [19]):

$$C_{nm} = \frac{(2\kappa_{nm})^{\left|m - \lambda\right| + 1}}{\Gamma(2\left|m - \lambda\right| + 1)} \sqrt{\frac{(n - \left|m\right|)_{2\left|m - \lambda\right|}}{2\left(\left|m - \lambda\right| - \left|m\right| + n\right) - 1}}, \quad (11)$$

где κ_{nm} определено следующим выражением:

$$\kappa_{nm} = \frac{-\left|\beta\right|}{2\left[-n + \frac{1}{2} - \left(\left|m - \lambda\right| - \left|m\right|\right)\right]}.$$

Здесь выбран отрицательный знак для параметра β , поскольку, как известно, только притягивающий двумерный кулоновский потенциал обладает дискретным спектром энергий. Также в (11) введено стандартное обозначение для символа Похгаммера [21]:

$$(n - \left|m\right|)_{2\left|m - \lambda\right|} = \frac{\Gamma(n - \left|m\right| + 2\left|m - \lambda\right|)}{\Gamma(n - \left|m\right|)}.$$

Таким образом, выражения (9), (10) и (11) полностью определяют состояния дискретного спектра для электрона в рассматриваемой системе.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Теперь, с использованием выражений (1), (2) и (10), могут быть получены численные результаты для динамической поляризуемости основного состояния электрона в рассматриваемой системе. Отметим, что в ряде (2) использовалось конечное количество слагаемых (пять слагаемых) для ускорения процедуры численного счета. Использование большего количества слагаемых (10 — 100) не приводило к заметным количественным изменениям. В расчетах используется атомная система единиц (atomic units): $\hbar = 1$, $e = 1$, $M = 1$. Кроме того, в формуле (2) энергия E есть $E = E_1 + w$, где w — энергия фотона в атомных единицах, именно

$$w = \frac{\hbar^3 \omega}{Me^4}.$$

На рисунке 1 представлены численные значения динамической поляризуемости в зависимости от энергии фотона w (частотная зависимость динамической поляризуемости). Пустые кружки соответствуют случаю “чистого” 2D Кулона ($\lambda = 0$), сплошные кружки — при отличном от нуля значении потока Ааронова—

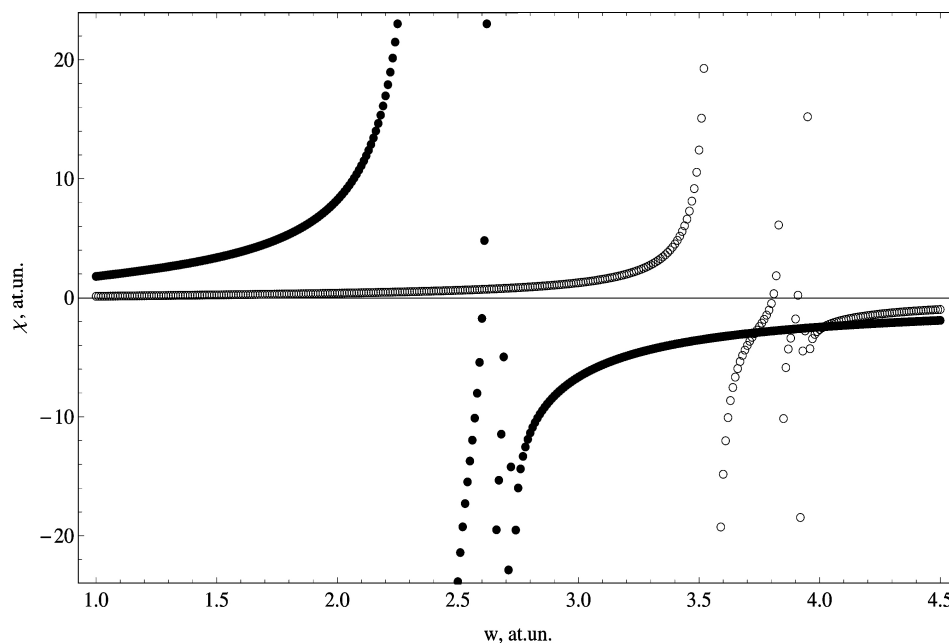


Рис. 1. Зависимость динамической поляризуемости χ (в атомных единицах) основного состояния электрона в 2D кулоновском потенциале в присутствии потока Ааронова—Бома от энергии фотона w (в атомных единицах): пустые кружки — $\lambda = 0$ (отсутствие потока Ааронова—Бома), сплошные кружки — $\lambda = 0.1$

Бома ($\lambda = 0.1$). Положения резонансов на данном графике отвечают энергиям перехода электрона из основного состояния в возбужденные. Следует отметить, что использование большего количества слагаемых в (2) приводит к появлению новых резонансов, соответствующих переходам электрона в состояния с большим значением главного квантового числа.

Помимо этого, отметим сильную зависимость значений динамической поляризуемости от величины потока Ааронова—Бома.

Поскольку волновые функции (10) явно зависят от магнитного потока, оказывается возможным построить зависимости динамической поляризуемости от его величины. На рисунке 2 приводятся зависимости значений по-

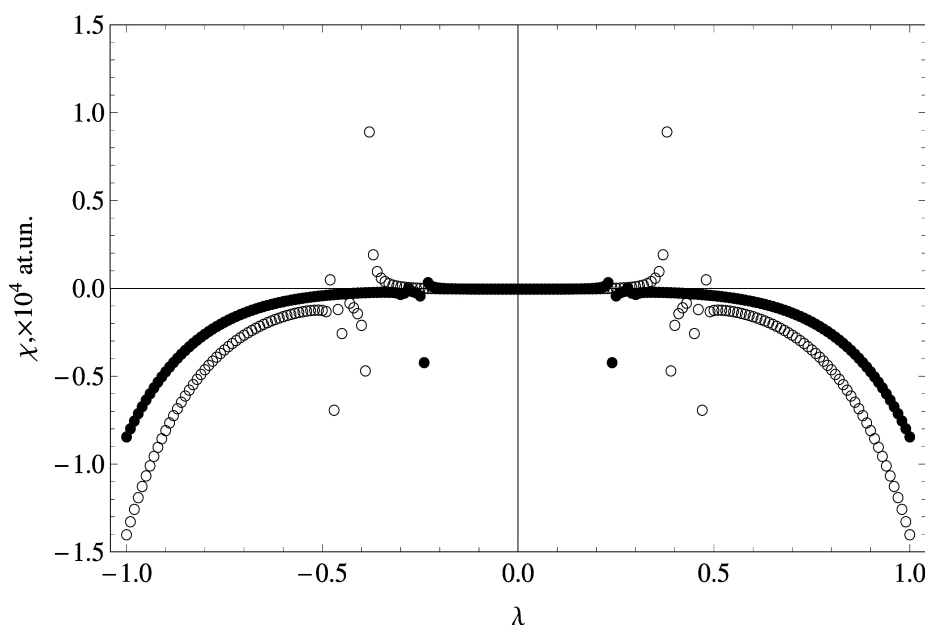


Рис. 2. Зависимость динамической поляризуемости χ (в атомных единицах) основного состояния электрона в 2D кулоновском потенциале в присутствии потока Ааронова—Бома от величины безразмерного потока Ааронова—Бома при различных значениях энергии фотона (в атомных единицах): пустые кружки — $w = 1$ at.u., сплошные кружки — $w = 1.5$ at.u.

ляризуемости основного состояния электрона в рассматриваемой системе от величины потока Ааронова—Бома λ при фиксированных значениях энергии фотона. Как и до этого, резонансы отвечают переходам электрона в возбужденные состояния, однако в данном случае частота электромагнитной волны является фиксированной, а изменяется только величина магнитного потока. Таким образом, можно сделать вывод, что в представленной системе поток Ааронова—Бома может выступать в качестве управляющего параметра для величины динамической поляризуемости даже при фиксированном значении частоты внешнего поля. Следует отметить также, что при изменении потока от 0 до 1 абсолютное значение поляризуемости меняется на четыре порядка (ср. с рис. 1). Кроме того, видна явная симметрия по отношению к знаку магнитного потока. Знак потока в данном случае отвечает направлению вектора напряженности магнитного поля внутри соленоида Ааронова—Бома (по, или против направления нормали к плоскости, в которой расположен кулоновский центр).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено влияние эффекта Ааронова—Бома на характеристики двумерного кулоновского потенциала. В частности, получено точное нерелятивистское решение уравнения Шредингера для системы “двумерный Кулон + поток Ааронова—Бома” в дискретном спектре. Представлены численные значения динамической поляризуемости основного состояния электрона в такой системе в зависимости от частоты внешнего электромагнитного поля (энергии фотона) и величины потока Ааронова—Бома. Показано, что абсолютное значение поляризуемости сильно зависит от величины потока Ааронова—Бома. Из анализа представленных результатов можно сделать вывод о том, что поток Ааронова—Бома может выступать в качестве управляющего параметра для величины поляризуемости при фиксированной частоте внешнего электромагнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kohn W.* Theory of Donor States in Silicon / W. Kohn, J.M. Luttinger // *Phys. Rev.* — 1955. — Vol. 98. — Pp. 915—922.
2. *Zaslow B.* Two-Dimensional Analog to the Hydrogen Atom / B. Zaslow, M.E. Zandler // *Am. J. Phys.* — 1967. — Vol. 35. — Pp. 1118—1119.

3. *Cisneros A.* Symmetry of the Two-Dimensional Hydrogen Atom / A. Cisneros, H. V. McIntosh // *J. Math. Phys.* — 1969. — Vol. 10. — P. 277—286.

4. *Yang X.L.* Analytic solution of a two-dimensional hydrogen atom. I. Nonrelativistic theory / X. L. Yang [et al.] // *Phys. Rev. A.* — 1991. — Vol. 43. — P. 1186—1196.

5. *Guo S.H.* Analytic solution of a two-dimensional hydrogen atom. II. Relativistic theory / S. H. Guo [et al.] // *Phys. Rev. A.* — 1991. — Vol. 43. — P. 1197—1205.

6. *Zhu Jia-Lin* Hydrogen molecular ions in two dimensions / Jia-Lin Zhu, Jia-Jiong Xiong // *Phys. Rev. B.* — 1990. — Vol. 41. — P. 12274—12277.

7. *Castro Neto A.H.* The electronic properties of graphene / A. H. Castro Neto [et al.] // *Rev. Mod. Phys.* — 2009. — Vol. 81. — P. 109—162.

8. *Sofo J.O.* Graphane: A two-dimensional hydrocarbon / J. O. Sofo, A. S. Chaudhari, G. D. Barber // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75. — P. 153401-1—153401-4.

9. *Safonov A.I.* Observation of Quasicondensate in Two-Dimensional Atomic Hydrogen / A. I. Safonov [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 81. — P. 4545—4548.

10. *Aharonov Y.* Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory / Y. Aharonov, D. Bohm // *Phys. Rev.* — 1959. — Vol. 115. — P. 485—491.

11. *Olariu S.* The quantum effects of electromagnetic fluxes / S. Olariu, I. I. Popescu // *Rev. Mod. Phys.* — 1985. — Vol. 57. — P. 339—436.

12. *Peshkin M.* The Aharonov-Bohm effect / M. Peshkin, A. Tonomura — Berlin: SpringerVerlag, 1989 — 152 p.

13. *Khalilov V.R.* Relativistic Aharonov-Bohm effect in the presence of planar Coulomb potentials / V. R. Khalilov // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Vol. 71. — P. 012105(1)—012105(6).

14. *Korol A.V.* Polarizational bremsstrahlung in non-relativistic collisions / A. V. Korol, A. V. Solov'yov // *Rad. Phys. Chem.* — 2006. — Vol. 75. — P. 1266—1286.

15. *Stetcu I.* Electric dipole polarizabilities of hydrogen and helium isotopes / I. Stetcu [et al.] // *Phys. Rev. C.* — 2009. — Vol. 79. — P. 064001—064007.

16. *Masili M.* Static and dynamic dipole polarizability of the helium atom using wave functions involving logarithmic terms / M. Masili // *Phys. Rev. A.* — 2003. — Vol. 68. — P. 012508(1)—012508(11).

17. *Tang Li-Yan* Nonrelativistic *ab initio* calculation for 2^2S , 2^2P , and 3^2D lithium isotopes: Applications to polarizabilities and dispersion interaction / Li-Yan Tang, [et al.] // *Phys. Rev. A.* — 2009. — Vol. 79. — P. 062712—062728.

18. *Астапенко В.А.* Поляризационные эффекты в атомных переходах / В. А. Астапенко, Л. А. Бу-

реева, В. С. Лисица // УФН. — 2002. — Т. 172., № 2. — С. 155—192.

19. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 4-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 768 с.

Ханг Тхи Тхюу Нгуен — аспирант кафедры теоретической физики ВГУ.

E-mail: hangthuynguyen2001@yahoo.com

Мелешенко Пётр Александрович — ВГАУ, кафедра физики.

E-mail: melechp@yandex.ru

Клинских Александр Федотович — д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической физики ВГУ.

E-mail: klinskikh@vsau.ru

20. Клинских А.Ф. Рассеяние электрона на двумерном кулоновском потенциале в условиях эффекта Ааронова—Бома / А. Ф. Клинских, Ханг Т.Т. Нгуен, П. А. Мелешенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. — 2010. — № 2. — С. 241—246.

21. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган — М.: Наука, 1979. — 1046 с.

Hang Thi Thuy Nguyen — Voronezh State University, Theoretical Physics Department, Post-graduated student.

E-mail: hangthuynguyen2001@yahoo.com

Meleshenko Peter A — Voronezh State Agrarian University, Physics Department.

E-mail: melechp@yandex.ru

Klinskikh Alexander F — Voronezh State University, Theoretical Physics Department, Doctor of Physics and Mathematics, Professor.

E-mail: klinskikh@vsau.ru