

# ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕСУЩЕЙ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИХОДА

А. В. Захаров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 04.03.2011 г.

**Аннотация.** Рассмотрены алгоритмы оценки спектральной мощности (интенсивности) гауссовской стохастической несущей случайного импульса с неизвестным временем прихода, наблюдаемого на фоне белого шума. Найдены аналитические выражения для характеристик оценок спектральной мощности импульса с непрерывно дифференцируемой модулирующей функцией. Выполнена оптимизация алгоритма максимального правдоподобия методом нормировки оценки, позволяющая компенсировать смещение и уменьшить рассеяние оценки. Проведено сравнение эффективности рассмотренных алгоритмов оценки.

**Ключевые слова:** случайный импульс, стохастическая несущая, спектральная мощность, оценка максимального правдоподобия, смещение и рассеяние оценки, надежная оценка, аномальная ошибка.

**Abstract.** Estimations of spectral power (intensity) of Gaussian stochastic carrier of random pulse with unknown time delay at white noise background is considered. Analytical expressions of estimation characteristics in case of continuously differentiated modulating function of signal are found. Optimization of maximum likelihood algorithm by means of estimation normalizing is carried out with the purpose of mean error compensation. Efficiency of considered algorithms is compared.

**Key words:** random pulse, stochastic carrier, spectral power, maximum likelihood estimation, bias, variance, normal estimation, abnormal error.

## ВВЕДЕНИЕ

В различных приложениях радиофизики и радиотехники возникает задача оценки спектральной мощности (интенсивности) стохастических сигналов, представляющих собой случайные процессы. Такая задача возникает при дистанционном радиометрическом контроле различных физических сред и объектов, в наблюдательной радиоастрономии, в лабораторной радиоспектроскопии, при управлении технологическими процессами и др. При этом наблюдаемые сигналы часто являются суммой большого числа независимых случайных колебаний и, следовательно, адекватно описываются моделью гауссовского случайного процесса. Задача оценки спектральной мощности (дисперсии) стационарного гауссовского случайного процесса в настоящее время достаточно хорошо исследована и является классической [1, 2 и др.].

Задача оценки спектральной мощности (интенсивности) стохастических сигналов су-

щественно усложняется, если сигнал является нестационарным и имеет импульсный характер. При этом момент появления (время прихода) такого сигнала обычно априори неизвестно. Одной из моделей импульсных стохастических сигналов в радиофизике является *случайный радиоимпульс*, который представляет собой произведение стационарного гауссовского случайного процесса стохастической несущей и импульсной детерминированной модулирующей функции, описывающей закон изменения средней мощности сигнала во времени.

Примерами случайного радиоимпульса являются импульсы радиоизлучения *пульсаров* — остатков вспышек сверхновых звезд, которые изучаются в радиоастрономии [3]. Как известно [3], радиоизлучение пульсаров наблюдается в широком диапазоне частот и представляет собой последовательность коротких субимпульсов с большой скважностью, имеющих стохастическую несущую, случайную амплитуду и простую по форме модулирующую функцию, близкую к гауссовской. Импульсы радио-

излучения следуют друг за другом с некоторым средним периодом, который совпадает с периодом вращения нейтронной звезды вокруг своей оси. При этом временное положение отдельных субимпульсов относительно среднего периода меняется от импульса к импульсу и определяется локализацией излучающих областей в магнитосфере вращающегося пульсара. Гауссовское распределение вероятности стохастической несущей радиоизлучения пульсаров объясняется большим количеством независимых излучателей, вносящих вклад в суммарное радиоизлучение пульсара. Несмотря на то, что пульсары были открыты ещё в 60-х гг. XX века, до сих пор не существует законченной физической теории, до конца объясняющей все наблюдаемые особенности их радиоизлучения. Изучение спектров радиоизлучения пульсаров в различных диапазонах частот является важной практической задачей радиоастрономии, позволяющей понять природу пульсаров и механизмы их радиоизлучения.

Другими примерами стохастических импульсных сигналов, которые могут быть описаны моделью случайного радиоимпульса, являются вспышка оптического шума в приборах квантовой радиофизики, импульсный радиолокационный сигнал, отраженный от геометрически сложного объекта с множеством “блестящих” точек, импульсный шум в полупроводниковых приборах, сигналы в радиоспектроскопии при импульсном возбуждении исследуемого образца и др. Наконец, случайные радиоимпульсы могут быть использованы в радиотехнических системах телекоммуникаций с шумовой несущей для повышения скрытности передачи информации.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу оценки спектральной мощности (интенсивности) случайного радиоимпульса [4,5]

$$s(t) = A(t)\xi(t) = f[(t - \lambda_0) / \tau_0]\xi(t), \quad (1)$$

где  $\xi(t)$  — стохастическая несущая импульса, представляющая собой центрированный стационарный гауссовский случайный процесс с односторонней (физической) спектральной плотностью  $G(\omega)$ , а  $A(t) = f[(t - \lambda_0) / \tau_0]$  — импульсная модулирующая функция (МФ) с временным положением  $\lambda_0$  и ограниченной сверху эквивалентной длительностью

$$\tau_0 = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(t)dt < \infty, \quad (2)$$

причем функция  $f(x)$  описывает форму МФ и нормирована так, что

$$\max f(x) = 1, \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = 1. \quad (3)$$

Параметры  $\lambda_0$  и  $\tau_0$  характеризуют время прихода и эквивалентную длительность случайного импульса (1). На практике время прихода импульса  $\lambda_0$  часто априори неизвестно, что обусловлено стохастической природой излучающего объекта, случайными изменениями характеристик путей распространения сигнала от излучателя до приемника и др. При этом обычно можно указать априорный интервал  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$  возможных значений неизвестного времени прихода  $\lambda_0$ .

Спектральная плотность (спектр мощности)  $G(\omega)$  стохастической несущей  $\xi(t)$  принимаемого сигнала несет полезную информацию о свойствах излучающего объекта, о характеристиках среды распространения сигналов и т.п. Потому измерение (оценка) спектральной плотности  $G(\omega)$  несущей принимаемых стохастических сигналов является важной практической задачей.

На практике форма спектральной плотности  $G(\omega)$  может быть достаточно сложной. Поэтому при измерении спектральной плотности всю область частот  $\omega$ , на которой  $G(\omega) \neq 0$ , разделяют на относительно узкие частотные интервалы  $[v_{0j} - \Omega_0 / 2; v_{0j} + \Omega_0 / 2]$  с шириной  $\Omega_0 \ll v_0$  и центральной частотой  $v_{0j} = v_{0(j-1)} + \Omega_0$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Ширину  $\Omega_0$  этих интервалов выбирают достаточно малой, чтобы спектральная плотность  $G(\omega)$  была приблизительно постоянной в пределах каждого интервала. При этом для каждого  $j$ -го интервала спектральная плотность приближенно равна  $G(\omega) = \gamma_{0j}$ , где  $\gamma_{0j} = G(v_{0j})$  — спектральная мощность (интенсивность) несущей на частоте  $\omega = v_{0j}$  в середине  $j$ -го частотного интервала. Оценивая интенсивность  $\gamma_{0j}$  стохастической несущей в пределах каждого частотного интервала  $[v_{0j} - \Omega_0 / 2; v_{0j} + \Omega_0 / 2]$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , затем восстанавливают спектральную плотность  $G(\omega)$  по ее отсчетам  $G(v_{0j}) = \gamma_{0j}$ .

Отметим, что ширину частотных интервалов  $\Omega_0$  следует выбирать достаточно малой, чтобы измеряемая спектральная плотность

$G(\omega)$  была приблизительно в пределах каждого интервала. Считаем далее, что это условие выполняется. В противном случае может возникнуть ненулевое смещение (систематическая ошибка) оценки интенсивности  $\gamma_{0j}$ . С другой стороны, ширину  $\Omega_0$  не следует выбирать слишком малой, так как с уменьшением  $\Omega_0$  возрастает дисперсия (среднеквадратическая ошибка) оценки интенсивности  $\gamma_{0j}$ . На практике следует стремиться к выполнению условия

$$\mu_0 = \tau_0 \Omega_0 / 2\pi \gg 1. \quad (4)$$

Условие (4) позволяет обеспечить высокую апостериорную точность (малую дисперсию) оценки спектральной интенсивности  $\gamma_{0j}$  стохастической несущей случайного импульса (1). Поэтому далее будем считать, что условие (4) выполняется [4—7]. Отметим, что при выполнении (4) справедливо и условие  $\tau_0 \nu_{0j} / 2\pi \gg 1$ .

Рассмотрим далее задачу оценки спектральной интенсивности  $\gamma_0$  стохастической несущей  $\xi(t)$  случайного импульса  $s(t)$  (1) на одном частотном интервале  $[\nu_0 - \Omega_0 / 2; \nu_0 + \Omega_0 / 2]$ , в пределах которого одностороннюю (физическую) спектральную плотность несущей  $G(\omega)$  можно представить как

$$G(\omega) = \gamma_0 I\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega_0}\right), \omega \geq 0. \quad (5)$$

Здесь  $I(x) = 1$  при  $|x| \leq 1/2$ ,  $I(x) = 0$  при  $|x| > 1/2$  — прямоугольная функция, описывающая форму спектральной плотности в пределах рассматриваемого частотного интервала. При этом считаем, что время прихода  $\lambda_0$  случайного импульса (1) неизвестно и принимает значения из заданного интервала  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ .

Пусть сигнал  $s(t)$  (1) наблюдается в пределах интервала времени  $[0; T]$  на фоне аддитивного гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , причем сигнал и шум статистически независимы. Тогда наблюдению и обработке доступна только смесь сигнала и шума

$$x(t) = s(t) + n(t), t \in [0; T]. \quad (6)$$

На основе обработки реализации наблюдаемых данных  $x(t)$  (6) и имеющейся априорной информации о свойствах сигнала (1) и шума  $n(t)$  необходимо оценить интенсивность  $\gamma_0$  стохастической несущей  $\xi(t)$  принимаемого сигнала.

## 1. ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

### 1. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ

Для синтеза алгоритма оценки интенсивности  $\gamma_0$  несущей случайного импульса (1) с неизвестным временем прихода  $\lambda_0$  воспользуемся методом максимального правдоподобия [1, 8]. Согласно этому методу, на основе принимаемой смеси сигнала и шума  $x(t)$  (6) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП)  $L(\gamma, \lambda)$  как функцию неизвестных интенсивности  $\gamma$  и времени прихода  $\lambda$  импульса (1) для всех  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$  из априорных интервалов  $\Gamma$  и  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$  возможных значений этих параметров. Тогда оценка максимального правдоподобия (ОМП)  $\gamma_M$  интенсивности  $\gamma_0$  определяется как значение  $\gamma$ , при котором логарифм ФОП  $L(\gamma, \lambda)$  достигает абсолютного (наибольшего) максимума для всех  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ :

$$\gamma_M = \arg \sup_{\gamma \in \Gamma} \left[ \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} L(\gamma, \lambda) \right] = \arg \sup_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \lambda_M). \quad (7)$$

Здесь  $\lambda_M = \arg \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} \left[ \sup_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \lambda) \right]$  — ОМП времени прихода  $\lambda_0$  случайного импульса (1), определяемая как значение  $\lambda$ , при котором логарифм ФОП  $L(\gamma, \lambda)$  достигает абсолютного (наибольшего) максимума для всех  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ .

В ряде работ [9, 10 и др] приведены аналитические выражения логарифма ФОП  $L$  для суммы произвольного гауссовского случайного процесса и гауссовского белого шума. Однако эти выражения являются достаточно сложными и не позволяют найти аналитическое выражение для координаты положения абсолютного максимума логарифма ФОП  $L$  по переменной  $\gamma$ . В результате для вычисления оценки  $\gamma_M$  (7) по принимаемой реализации наблюдаемых данных  $x(t)$  (6) нужно формировать логарифм ФОП  $L(\gamma, \lambda)$  как функцию двух переменных для всех возможных  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ , а затем искать положение абсолютного максимума функции  $L(\gamma, \lambda)$  сразу по двум переменным  $\gamma$  и  $\lambda$ . Это приводит к значительным аппаратным и вычислительным затратам при формировании оценки.

В [4, 6] найдено асимптотически точное (с ростом  $\mu_0$  (4)) выражение для логарифма ФОП  $L$  при приеме случайного импульса (1) с пря-

моугольной МФ  $f(x) = I(x)$  на фоне гауссовского белого шума  $n(t)$ . Это выражение, аналогично [7], позволяет выразить ОМП (7) в явном виде через реализацию наблюдаемых данных  $x(t)$  (6) и тем самым избежать процедуры поиска положения абсолютного максимума логарифма ФОП  $L$  по двум переменным. Однако, результаты [4, 6, 7] справедливы только при  $f(x) = I(x)$ . На практике форма МФ  $f(x)$  принимаемого импульса (1) часто существенно отличается от прямоугольной.

В [5] при выполнении (4) предложено обобщение выражения [4, 6] для логарифма ФОП  $L$  на случай произвольной МФ  $f(x)$ . Воспользовавшись результатами [5] для случая (5) получаем

$$L(\gamma, \lambda) = \frac{\gamma}{N_0(N_0 + \gamma)} \int_0^T f^2 \left( \frac{t - \lambda}{\tau_0} \right) y^2(t) dt - \mu_0 \ln \left( 1 + \frac{\gamma}{N_0} \right), \quad (8)$$

где  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du$  — отклик линейного

фильтра с импульсной характеристикой  $h(t)$  на реализацию наблюдаемых данных  $x(t)$  (6), причем передаточная функция  $H(\omega)$  этого фильтра, являющаяся преобразованием Фурье от импульсной характеристики  $h(t)$ , удовлетворяет условию:

$$|H(\omega)|^2 = I[(v_0 - \omega) / \Omega_0] + I[(v_0 + \omega) / \Omega_0]. \quad (9)$$

При  $f(x) = I(x)$  выражение (8) переходит в соответствующее выражение для логарифма ФОП из [4].

Оценка  $\gamma_M$  (7), как положение абсолютного максимума логарифма ФОП (8) по переменной  $\gamma$ , может быть найдена как решение системы правдоподобия [1]:

$$\left[ dL_M(\gamma) / d\gamma \right]_{\gamma=\gamma_M} = 0, \left[ d^2 L_M(\gamma) / d\gamma^2 \right]_{\gamma=\gamma_M} < 0 \quad (10)$$

на интервале  $\gamma \in \Gamma$  возможных значений интенсивности  $\gamma_0$ , где

$$L_M(\gamma) = \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} L(\gamma, \lambda)$$

— результат максимизации логарифма ФОП  $L(\gamma, \lambda)$  по переменной  $\lambda$  на интервале  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$  для каждого значения  $\gamma$ . Исходя из смысла спектральной интенсивности  $\gamma_0$  как мощности, которая не может быть отрицательной, ограничим область  $\Gamma$  возможных значений интенсивности условием  $\gamma_0 \geq 0$ . Подставляя в

(10) выражение (8) и решая полученную систему на интервале  $\gamma \geq 0$ , находим

$$\gamma_M = \max \left[ 0; \frac{1}{\mu_0} \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} M(\lambda) - N_0 \right], \quad (11)$$

где  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$  — априорный интервал возможных значений времени прихода  $\lambda_0$ ,

$$M(\lambda) = \int_0^T f^2 \left( \frac{t - \lambda}{\tau_0} \right) y^2(t) dt, \quad (12)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du,$$

а передаточная функция  $H(\omega)$ , соответствующая импульсной характеристике  $h(t)$  удовлетворяет условию (9). Отметим, что для вычисления ОМП  $\gamma_M$  (11) достаточно найти величину абсолютного максимума функции  $M(\lambda)$  только одной переменной  $\lambda$ , что значительно проще, чем согласно (7) искать величину абсолютного максимума функции  $L(\gamma, \lambda)$  двух переменных  $\gamma$  и  $\lambda$ .

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ

**Характеристики решающей статистики.** Отметим, что ОМП  $\gamma_M$  (11) может быть записана как  $\gamma_M = \max[0; \sup Y(\lambda)]$ , где  $\sup Y(\lambda)$  — величина абсолютного максимума случайного процесса

$$Y(\lambda) = M(\lambda) / \mu_0 - N_0, \quad (13)$$

на интервале  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ . Тогда функционал  $Y(\lambda)$  (13) можно интерпретировать как решающую статистику алгоритма оценки  $\gamma_M$  (11). Рассмотрим характеристики функционала (13).

Учтем, что функционал  $M(\lambda)$  (12) является асимптотически гауссовским случайным процессом при  $\mu_0 \rightarrow \infty$  [4, 5]. Тогда случайный процесс  $Y(\lambda)$  (13) также является асимптотически гауссовским при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ . Используя свойство приближенной гауссовости процесса  $Y(\lambda)$  при выполнении (4), можно ограничиться анализом его математического ожидания (МО)  $m(\lambda) = \langle Y(\lambda) \rangle$  и корреляционной функции (КФ)  $K(\lambda_1, \lambda_2) = \langle [Y(\lambda_1) - m(\lambda_1)][Y(\lambda_2) - m(\lambda_2)] \rangle$ , где знак  $\langle \rangle$  обозначает усреднение по реализациям наблюдаемых данных  $x(t)$  (6) при фиксированных  $\gamma_0$  и  $\lambda_0$ . Усредняя (13) по реализациям наблюдаемых данных  $x(t)$  при выполнении (4), аналогично [4, 5] находим

$$m(\lambda) = \gamma_0 C_0(l - l_0), \quad (14)$$

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{N_0^2}{\mu_0} [C_0(l_2 - l_1) + 2qR_1(l_2 - l_0, l_1 - l_0) + q^2R_2(l_2 - l_0, l_1 - l_0)], \quad (15)$$

где  $l = \lambda / \tau_0, l_0 = \lambda_0 / \tau_0, l_k = \lambda_k / \tau_0, k = 1, 2$  — нормированные значения времени прихода импульса (1),  $q = \gamma_0 / N_0$  — отношение спектральных мощностей несущей случайного импульса (1) и шума  $n(t)$  в рассматриваемой полосе частот,

$$C_0(l) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)f^2(x-l)dx, \quad (16)$$

$$R_k(l_1, l_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{2k}(x)f^2(x-l_1)f^2(x-l_2)dx, k = 1, 2.$$

Из (14), (15) следует, что МО  $m(\lambda)$  и дисперсия  $\sigma^2(\lambda) = K(\lambda, \lambda)$  случайного процесса  $Y(\lambda)$  (13) достигают максимума при  $\lambda = \lambda_0$  и в этой точке равны

$$m_0 \equiv m(\lambda_0) = \gamma_0 C_{00}, \sigma_0^2 \equiv \sigma^2(\lambda_0) = \frac{N_0^2}{\mu_0} (C_{00} + 2qC_{01} + q^2C_{02}), \quad (17)$$

где

$$C_{00} = \int_{-\infty}^{\infty} f^4(x)dx, C_{0k} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{2k+4}(x)dx, k = 1, 2. \quad (18)$$

При этом реализации процесса  $Y(\lambda)$  (13) непрерывны с вероятностью 1. Тогда отношение сигнал-шум (ОСШ)  $z$  на выходе устройства оценки равно [1, 4, 5, 7]

$$z = \frac{m_0}{\sigma_0} = \frac{\sqrt{\mu_0 q_0 C_{00}}}{\sqrt{C_{00} + 2qC_{01} + q^2C_{02}}}. \quad (19)$$

Отметим, что в общем случае  $m_0 \leq \gamma_0$ , так как  $C_{00} \leq 1$ . Если МФ  $f(x)$  является прямоугольной, т.е.  $f(x) = I(x)$ , то  $C_{00} = 1$  и  $m_0 = \gamma_0$ . Для прямоугольных МФ  $f(x)$ , удовлетворяющих условию (3),  $C_{00} < 1$  и, следовательно, всегда  $m_0 < \gamma_0$ .

#### Характеристики надежной оценки.

Пусть неопределенность времени прихода  $\lambda_0$  импульса (1) не превосходит его эквивалентную длительность  $\tau_0$  т.е.  $\Theta = (\Lambda_2 - \Lambda_1) / \tau_0 \leq 1$ . Это соответствует случаю *надежной оценки* [1], когда положение  $\lambda = \lambda_M$  абсолютного максимума функционала  $M(\lambda)$  (12) отклоняется от истинного значения  $\lambda_0$  времени прихода импульса (1) не более, чем на  $\tau_0$ .

Выражения (14)—(17) для МО и КФ случайного процесса  $Y(\lambda)$  (13) позволяют воспользоваться результатами [5] и записать функцию распределения  $F_Y(x) = P[\sup Y(\lambda) < x]$  величины  $\sup Y(\lambda)$  абсолютного максимума решающей статистики  $Y(\lambda)$  на интервале  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ . Здесь и далее  $P[A]$  обозначает вероятность события А. Следуя [4—7], будем считать, что ОСШ  $z$  (19) достаточно велико, так что выполняется условие  $z \gg 1$ . Это обеспечивает *высокую апостериорную точность* надежной оценки (11), при которой  $|\lambda_M - \lambda_0| \ll \tau_0$  [1]. Тогда, воспользовавшись результатами [5], получаем асимптотически точную (с ростом  $\mu_0$  и  $z$ ) аппроксимацию функции распределения  $F_Y(x)$  в виде

$$F_Y(x) = \Phi(u - z), u = x / \sigma_0, \quad (20)$$

где среднее квадратическое отклонение (СКО)  $\sigma_0$  и ОСШ  $z$  определяются из (17), (19), а  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2 / 2)dt / \sqrt{2\pi}$  — интеграл вероятности.

Используя функцию распределения (20) случайной величины  $\sup Y(\lambda)$  и учитывая, что  $\gamma_M = \max[0; \sup Y(\lambda)]$ , можно аналогично [11] записать функцию распределения  $F_M(x) = P[\gamma_M < x]$  надежной оценки  $\gamma_M$  (11):

$$F_M(x) = \theta(x)F_Y(x) = \theta(u)\Phi(u - z), u = x / \sigma_0, \quad (21)$$

где  $\theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$  и  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$  — функция Хевисайда (единичного скачка). Используя (21), можно рассчитать условные (при фиксированном  $\gamma_0$ ) смещение (систематическую ошибку)  $b_M = \langle \gamma_M - \gamma_0 \rangle$  и рассеяние (средний квадрат ошибки)  $V_M = \langle (\gamma_M - \gamma_0)^2 \rangle$  надежной оценки  $\gamma_M$  [11]:

$$b_M = \int_0^{\infty} [1 - F_Y(x)]dx - \gamma_0, \quad (22)$$

$$V_M = 2 \int_0^{\infty} x[1 - F_Y(x)]dx - 2b_M\gamma_0 - \gamma_0^2.$$

При этом в (22) учтено, что  $F_M(x) = 0$  при  $x < 0$ . Подставляя в (22) функцию распределения (20) и выполняя интегрирование, находим

$$b_M = \gamma_0 \left[ C_{00} \Phi(z) + \frac{C_{00}}{\sqrt{2\pi}z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) - 1 \right], \quad (23)$$

$$V_M = \gamma_0^2 \left[ C_{00}^2 \left( 1 - \frac{2}{C_{00}} + \frac{1}{z^2} \right) \Phi(z) + \frac{(C_{00} - 2)C_{00}}{\sqrt{2\pi}z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) + 1 \right]. \quad (24)$$

Отметим, что выражения (23), (24), как и (20), являются асимптотически точными с ростом  $\mu_0$  (4) и ОСШ  $z$  (19). Аналитически оценить точность этих формул при конечных значениях  $\mu_0$  и  $z$  не представляется возможным. Однако, из результатов статистического моделирования алгоритма оценки на ЭВМ, выполненного аналогично [12], следует, что формулы (23), (24) обладают удовлетворительной точностью уже при  $\mu_0 > 25..30$  и  $z > 3..4$ .

При больших ОСШ  $z \gg 1$ , что справедливо при больших  $\mu_0$  (4) и не слишком малых  $q$ , в (23), (24) можно использовать асимптотическую аппроксимацию интеграла вероятности

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}x} \quad \text{при } x \gg 1. \quad (25)$$

Тогда формулы (23), (24) упрощаются и принимают вид

$$b_m \approx \gamma_0(C_{00} - 1), \quad V_m \approx b_m^2 + \gamma_0^2 C_{00}^2 / z^2. \quad (26)$$

На рис. 1 сплошными линиями показаны зависимости нормированного рассеяния  $V_m / \gamma_0^2$  оценки  $\gamma_m$  (11) от отношения  $q$  при различных значениях  $\mu_0$ , рассчитанные по более точной формуле (24), а штриховыми линиями – по приближенной формуле (26). Там же штрихпунктирными линиями показаны соответствующие зависимости квадрата  $(b_m / \gamma_0)^2$  нормированного смещения оценки, рассчитанные по более точной формуле (23), а пунктирной ли-

нией — по приближенной формуле (26). Зависимости на рис.1 получены для функции  $f(x) = \exp(-\pi x^2 / 2)$ , причем кривые 1 соответствуют  $\mu_0 = 50$ , кривые 2 —  $\mu_0 = 200$ , а кривые 3 —  $\mu_0 = 1000$ . Из рис.1 видно, что более простые, но менее точные асимптотические формулы (26) удовлетворительно аппроксимируют более точные и более сложные выражения (23), (24) уже при  $z^2 > 1.5..2$ , причем точность такой аппроксимации возрастает с увеличением ОСШ  $z$  (с увеличением  $\mu_0$  и  $q$ ).

**Учет аномальных ошибок.** Если  $\Theta = (\Lambda_2 - \Lambda_1) / \tau_0 > 1$ , то при оценивании интенсивности  $\gamma_0$  случайного импульса (1) возможны *аномальные ошибки* [1]. Аномальная ошибка здесь состоит в том, что положение  $\lambda = \lambda_m$  абсолютного максимума функционала  $M(\lambda)$  (12) отклоняется от истинного значения  $\lambda_0$  времени прихода случайного импульса (1) более, чем на  $\tau_0$ . Тогда оценка  $\gamma_m$  (11) интенсивности сигнала (1) формируется на основе анализа наблюдаемых данных  $x(t)$  на интервале времени, где сигнал (1) отсутствует. Такая оценка  $\gamma_m$  не имеет практической ценности, так как определяется в основном только шумом. Аномальные ошибки ухудшают точность оценок параметров сигнала, поэтому таких ошибок следует избегать.

Вероятность  $P_m = P[|\lambda_m - \lambda_0| > \tau_0]$  аномальной ошибки найдена в [5] при расчете характеристик ОМП  $\lambda_m$  времени прихода  $\lambda_0$  сигнала (1). При этом в [5] следует положить  $g(x) = I(x)$ . Из [5] следует, что вероятность  $P_A$  уменьшается с увеличением  $\mu_0$  и  $q$  (с увеличением ОСШ  $z$ ) и с уменьшением  $\Theta$ .

Запишем далее характеристики ОМП  $\gamma_m$  (11) с учетом возможных аномальных ошибок. Обозначим  $\Delta = \delta \tau_0$ , где  $\delta$  — половина длительности функции  $C_0(l)$  (16), определяемая как минимальное значение  $\delta$ , при котором  $C_0(l) \approx 0$  для всех  $|l| \geq \delta$ . При этом  $\Delta$  имеет смысл половины длительности функции  $m(\lambda)$  (14), т.е. минимального значения  $\Delta$ , при котором МО  $m(\lambda) \approx 0$  для всех  $|\lambda - \lambda_0| > \Delta$ . Значение  $\Delta$  зависит от формы МФ  $f(x)$  и имеет величину порядка  $\tau_0$ , причем  $\Delta = \tau_0$  при  $f(x) = I(x)$ . Учтем, что при  $|\lambda - \lambda_0| > \Delta$  моменты (14), (15) решающей статистики  $Y(\lambda)$  (13) приближенно равны

$$m(\lambda) = 0, \quad K(\lambda_1, \lambda_2) = N_0^2 C_0(l_2 - l_1) / \mu_0, \quad (27)$$

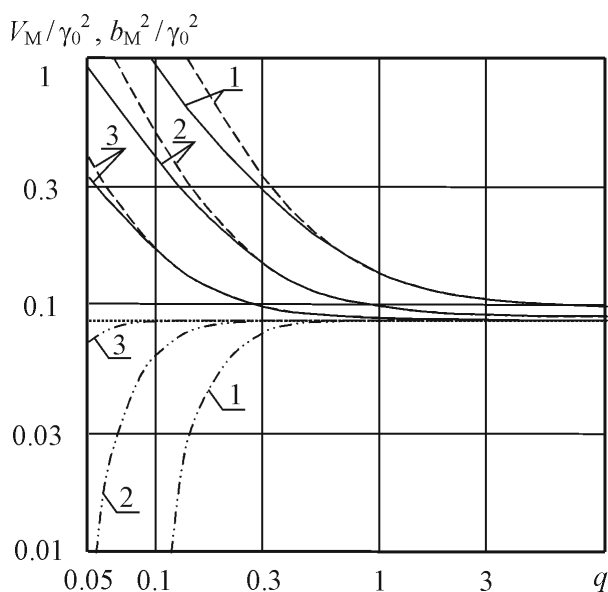


Рис. 1. Сравнение аппроксимаций смещения и рассеяния оценки

т.е. функционал  $Y(\lambda)$  является стационарным центрированным гауссовским случайным процессом с дисперсией  $\sigma_A^2 = N_0^2 C_{00} / \mu_0$  и с коэффициентом корреляции  $r(\lambda) = C_0(l) / C_{00}$ .

Выражения (14), (15), (27) для МО и КФ решающей статистики  $Y(\lambda)$  (13) позволяют воспользоваться результатами [5] и записать асимптотическое выражение для функции распределения  $F_Y(x) = P[\sup Y(l) < x]$  величины абсолютного максимума решающей статистики  $Y(\lambda)$  на интервале  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$  при  $\Theta > 1$ :

$$F_Y(x) = \exp \left[ -\frac{\zeta \Theta}{2\pi} \exp \left( -\frac{u^2 \eta}{2} \right) \right] \Phi(u - z) \quad \text{при } u \geq 0, \quad (28)$$

$$F_Y(x) = 0 \quad \text{при } u < 0.$$

где  $u = x / \sigma_0$ , величина  $\sigma_0$  определяется из (17),

$$\zeta = \sqrt{-\frac{1}{C_{00}} \frac{d^2 C_0(l)}{dl^2} \Big|_{l=0}} = \sqrt{\frac{4}{C_{00}} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]^2 dx}, \quad (29)$$

$$\eta = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_A^2} = \frac{C_{00} + 2qC_{01} + q^2C_{02}}{C_{00}}. \quad (30)$$

Точность формулы (28) возрастает с увеличением  $\mu_0$  (4),  $z$  (19) и  $\Theta$  [5]. Тогда аналогично (21) получаем, что функция распределения  $F_M(x) = P[\gamma_M < x]$  оценки  $\gamma_M$  (11) при  $\Theta > 1$  равна  $F_M(x) = \theta(x)F_Y(x) = F_Y(x)$ , где функция  $F_Y(x)$  определяется из (28).

Условные (при фиксированном  $\gamma_0$ ) смещение  $b_M$  и рассеяние  $V_M$  оценки  $\gamma_M$  (11) с учетом аномальных ошибок можно рассчитать по формулам (22), куда следует подставить функцию распределения  $F_Y(x)$  (28). Полученные в результате выражения являются асимптотически точными с ростом  $\mu_0$  (4),  $z$  (19) и  $\Theta$ . Из результатов статистического моделирования алгоритма оценки на ЭВМ, выполненного аналогично [12], следует, что эти выражения обладают удовлетворительной точностью уже при  $\mu_0 > 25..30$ ,  $z > 2..3$  и  $\Theta > 5..7$ .

Анализ выражений (22), (28) для смещения и рассеяния оценки показывает, что наличие аномальных ошибок может привести к заметному ухудшению точности оценки  $\gamma_M$  (11) при малых ОСШ  $z < 1$ . Однако с ростом ОСШ  $z$  (19) и с уменьшением  $\Theta$  влияние аномальных

ошибок на точность ОМП (11) уменьшается. Так при  $\Theta < 100$  и  $z > 3..4$  или при  $\Theta < 10$  и  $z > 2..3$  смещение  $b_M$  и рассеяние  $V_M$  оценки (11) практически совпадают с соответствующими характеристиками надежной оценки, рассчитанными по формулам (23), (24). В этих случаях влиянием аномальных ошибок на точность оценки  $\gamma_M$  (11) можно пренебречь. При  $z \rightarrow \infty$  и ограниченном сверху (конечном) значении  $\Theta$  получаем, что вероятность аномальной ошибки  $P_A \rightarrow 0$ , а ОМП  $\gamma_M$  (11) становится надежной.

Итак, для исключения аномальных ошибок при оценивании интенсивности  $\gamma_0$  следует обеспечить высокое отношение сигнал-шум  $z$  и (или) малую неопределенность  $\Theta$  времени прихода  $\lambda_0$  случайного импульса (1).

**Анализ характеристик оценки.** Из формул (23), (26) и рис.1 следует, что алгоритм оценки (11), полученный на основе выражения (8) для логарифма ФОП  $L$ , приводит к наличию относительно большого ненулевого смещения оценки  $b_M$  в случае непрямоугольной МФ  $f(x)$ . При этом с увеличением  $\mu_0$  и  $q$  (ОСШ  $z$ ) смещение  $b_M$  (23) асимптотически приближается к своему предельному значению  $b_M = \gamma_0(C_{00} - 1)$  (26), которое для непрямоугольной МФ может оставаться значительным. Например, при  $f(x) = \exp(-\pi x^2 / 2)$  предельное значение смещения равно  $(-0.293\gamma_0)$ . С уменьшением  $q$  отрицательное смещение оценки  $b_M$  уменьшается, переходит через 0, а затем быстро возрастает в сторону положительных значений (на рис. 1 это не показано). Однако, если форма модулирующей функции  $f(x)$  приближается к прямоугольной, то смещение оценки  $b_M$  уменьшается. При  $f(x) = I(x)$  смещение становится равным 0, а алгоритм оценки (14) переходит в алгоритм, аналогичный [7].

Значительное ненулевое смещение оценки при непрямоугольной МФ  $f(x)$  является недостатком алгоритма оценки  $\gamma_M$  (11). Такое смещение приводит к ограничению нормированного рассеяния оценки  $V_M / \gamma_0^2$  снизу величиной  $(b_M / \gamma_0)^2 = (C_{00} - 1)^2$ . При этом увеличение ОСШ  $z$  (параметров  $\mu_0$  и  $q$ ) не приводит к существенному снижению рассеяния  $V_M$ , которое, как видно из рис. 1, остается большим.

В отличие от рассеяния  $V_M$ , дисперсия  $D_M = \langle (\gamma_M - \langle \gamma_M \rangle)^2 \rangle = V_M - b_M^2$  оценки  $\gamma_M$  (11) быстро уменьшается с увеличением ОСШ  $z$  (с

ростом  $\mu_0$  и  $q$ ). При этом дисперсия  $D_M$  становится значительно меньше, чем квадрат смещения  $b_M^2$  и рассеяние  $V_M$  оценки. Это видно из рис. 2, где сплошными линиями показаны зависимости нормированного рассеяния  $V_M / \gamma_0^2$  оценки (11), а штриховыми — нормированной дисперсии  $D_M / \gamma_0^2$  оценки от отношения  $q$  при различных значениях  $\mu_0$ , рассчитанные по формулам (23), (24). Зависимости на рис. 2 получены для случая  $f(x) = \exp(-\pi x^2 / 2)$ , причем кривые 1 соответствуют  $\mu_0 = 50$ , кривые 2 —  $\mu_0 = 200$ , а кривые 3 —  $\mu_0 = 1000$ .

Установленное выше поведение смещения  $b_M$ , дисперсии  $D_M$  и рассеяния  $V_M$  оценки  $\gamma_M$  (11) указывает на возможность уменьшения рассеяния оценки путем компенсации её смещения, даже если это приведет к некоторому увеличению дисперсии оценки. Такая процедура приводит к асимптотически несмещенной оценке интенсивности, рассмотренной далее.

## II. АСИМПТОТИЧЕСКИ НЕСМЕЩЕННАЯ ОПТИМИЗИРОВАННАЯ ОЦЕНКА

### 1. ОПТИМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

Анализ алгоритма оценки (11) показывает, что наличие ненулевого смещения  $b_M$  оценки  $\gamma_M$  в значительной степени обусловлено отклонением математического ожидания (МО)  $m_0 = \langle Y(\lambda_0) \rangle$  решающей статистики  $Y(\lambda)$  (13) при  $\lambda = \lambda_0$  от истинного значения интенсивности  $\gamma_0$ . Согласно (17),  $m_0 = \gamma_0 C_{00} \leq \gamma_0$ , где  $C_{00} \leq 1$  определяется из (18), причем для непрямоугольных МФ  $f(x)$  получаем, что  $C_{00} < 1$  и  $m_0 < \gamma_0$ . Для компенсации смещения оценки интенсивности  $\gamma_0$  при непрямоугольной МФ  $f(x)$  будем нормировать оценку  $\gamma_M$  (11) на величину  $C_{00}$  (18). В результате ОМП  $\gamma_M$  (11) переходит в нормированную оценку

$$\gamma_H = \frac{1}{C_{00}} \max \left[ 0; \frac{1}{\mu_0} \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} M(\lambda) - N_0 \right], \quad (31)$$

где функционал  $M(\lambda)$  определяется из (12), а

$$Y_H(\lambda) = [M(\lambda) / \mu_0 - N_0] / C_{00} \quad (32)$$

можно интерпретировать как решающую статистику алгоритма оценки (31).

В случае прямоугольной МФ  $f(x) = I(x)$ , когда  $C_{00} = 1$ , оценки  $\gamma_H$  (31) и  $\gamma_M$  (11) совпадают. Однако, для непрямоугольной МФ  $f(x)$ ,

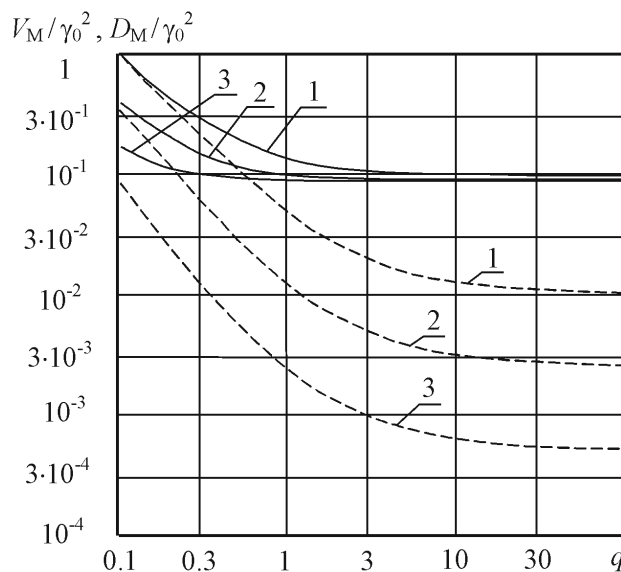


Рис. 2. Рассеяние и дисперсия оценки максимального правдоподобия

удовлетворяющей условию (3), имеем  $C_{00} < 1$ , так что оценки  $\gamma_H$  (31) и  $\gamma_M$  (11) могут заметно отличаться.

Отметим, что  $Y_H(\lambda) = Y(\lambda) / C_{00}$ , где  $Y(\lambda)$  — решающая статистика (13) алгоритма ОМП (11). Тогда из (14), (17) получаем, что МО  $m_H(\lambda) = \langle Y_H(\lambda) \rangle$  решающей статистики  $Y_H(\lambda)$  при  $\lambda = \lambda_0$  равно  $m_{H0} \equiv m_H(\lambda_0) = \gamma_0$ , что и требуется для компенсации смещения надежной оценки. Однако дисперсия  $\sigma_{H0}^2$  решающей статистики  $Y_H(\lambda)$  при  $\lambda = \lambda_0$  будет больше  $\sigma_0^2$  (17) в  $1 / C_{00}^2 \geq 1$  раз, что несколько увеличивает дисперсию оценки (31). Однако, как будет показано далее, рассеяние нормированной оценки  $\gamma_H$  (31) при непрямоугольной МФ  $f(x)$  уменьшается по сравнению с ОМП  $\gamma_M$  (11), если оцениваемая интенсивность  $\gamma_0$  не слишком мала. Поэтому оценку  $\gamma_H$  (31) будем называть *оптимизированной*.

### 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ

Используя полученные выше выражения для характеристик ОМП  $\gamma_M$  (11), нетрудно записать характеристики нормированной оценки  $\gamma_H = \gamma_M / C_{00}$  (31).

Учтем, что  $Y_H(\lambda) = Y(\lambda) / C_{00}$ , где  $Y(\lambda)$  — решающая статистика (13) алгоритма ОМП (11). Тогда функция распределения  $F_{Y_H}(x) = P[\sup Y_H(\lambda) < x]$  абсолютного максимума решающей статистики  $Y_H(\lambda)$  на интервале  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$  связана с соответствующей функцией распределения  $F_Y(x) = P[\sup Y(l) < x]$  абсолют-



ного максимума функционала  $Y(\lambda)$  простым соотношением

$$F_{YH}(x) = F_Y(C_{00}x). \quad (33)$$

Используя соотношение (33), запишем характеристики оценки  $\gamma_H$  (31).

**Надежная оценка.** Пусть неопределенность времени прихода  $\lambda_0$  импульса (1) не превосходит его длительность  $\tau_0$  т.е.  $\Theta = (\Lambda_2 - \Lambda_1) / \tau_0 \leq 1$ . Используя в (33) при  $\Theta \leq 1$  асимптотическое выражение (20) для функции распределения  $F_Y(x)$ , получаем  $F_{YH}(x) = \Phi(uC_{00} - z)$ , где  $u = x / \sigma_0$ ,  $\sigma_0$  определяется из (17), а  $z$  — отношение сигнал-шум на выходе устройства оценки, определяемое из (19). При этом, аналогично (21), функция распределения  $F_H(x) = P[\gamma_H < x]$  надежной оценки  $\gamma_H$  (31) равна  $F_H(x) = \theta(u)\Phi(uC_{00} - z)$ . Используя такое распределение  $F_H(x)$ , аналогично (23)—(24) находим асимптотически точные (с ростом  $\mu_0$  (4) и  $z$  (19)) выражения для смещения  $b_H = \langle \gamma_H - \gamma_0 \rangle$  и рассеяния  $V_H = \langle (\gamma_H - \gamma_0)^2 \rangle$  оценки  $\gamma_H$ :

$$b_H = \gamma_0 \left[ \Phi(z) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) - 1 \right], \quad (34)$$

$$V_H = \gamma_0^2 \left[ \left( \frac{1}{z^2} - 1 \right) \Phi(z) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) + 1 \right]. \quad (35)$$

Используя в (34), (35) асимптотическое разложение (25) интеграла вероятности  $\Phi(z)$ , при условии  $z \gg 1$  получаем

$$b_H \approx m_{H0} - \gamma_0 = 0, V_H \approx \sigma_{H0}^2 = \gamma_0^2 / z^2. \quad (36)$$

Сравнение выражений (34)—(36) показывает, что более простые (но менее точные) асимптотические формулы (36) удовлетворительно аппроксимируют более точные (но и более сложные) выражения (34), (35) уже при  $z^2 > 1.5 \dots 2$ , причем точность такой аппроксимации возрастает с увеличением ОСШ  $z$ .

**Учет аномальных ошибок.** Пусть теперь  $\Theta = (\Lambda_2 - \Lambda_1) / \tau_0 > 1$ . Используя в (33) при  $\Theta > 1$  асимптотическое выражение (28) функции  $F_Y(x)$ , получаем

$$F_{YH}(x) = \Phi(uC_{00} - z) \exp \left[ -\frac{\zeta\Theta}{2\pi} \exp \left( -\frac{C_{00}^2 u^2 \eta}{2} \right) \right]$$

при  $u \geq 0$ ,

$$F_{YH}(x) = 0 \text{ при } u < 0, \quad (37)$$

где  $u = x / \sigma_0$ ,  $\zeta$  определяется из (29), а  $\eta$  — из (30). Точность формулы (37) возрастает с уве-

личением  $\mu_0$  (4),  $z$  (19) и  $\Theta$  [5]. При этом функция распределения  $F_H(x)$  оценки  $\gamma_H$  (31) с учетом (37) определяется как  $F_H(x) = \theta(x)F_{YH}(x) = F_{YH}(x)$ . Используя выражение (37), можно аналогично (22) рассчитать смещение  $b_H$  и рассеяние  $V_H$  оценки  $\gamma_H$  (31) при  $\Theta > 1$  с учетом аномальных ошибок:

$$b_H = \int_0^\infty [1 - F_{YH}(x)] dx - \gamma_0, \quad (38)$$

$$V_H = 2 \int_0^\infty x [1 - F_{YH}(x)] dx - 2b_H\gamma_0 - \gamma_0^2.$$

**Анализ характеристик оценки.** Из (34)—(38) следует, что оптимизированная оценка  $\gamma_H$  (31), в отличие от оценки  $\gamma_M$  (11), является асимптотически (с ростом ОСШ  $z$ ) *несмещенной*. При конечных значениях ОСШ  $z$  (19) смещение  $b_H$  оценки  $\gamma_H$  (31) быстро уменьшается с ростом  $\mu_0$  и  $q$  и оказывается значительно меньшим, чем смещение  $b_M$  оценки  $\gamma_M$  (11), если отношение  $q$  не слишком мало. Это иллюстрируют штрих-пунктирные линии на рис. 3, показывающие зависимости квадрата  $(b_H / \gamma_0)^2$  нормированного смещения оценки  $\gamma_H$  (31), рассчитанного по формуле (34), от отношения  $q$ . Соответствующие зависимости для смещения оценки  $\gamma_M$  (11) показаны штрих-пунктирными линиями на рис. 1. Зависимости на рис. 1, 3 получены при  $f(x) = \exp(-\pi x^2 / 2)$ , причем кривые 1 соответствуют  $\mu_0 = 50$ , кривые 2 —  $\mu_0 = 200$ , а кривые 3 —  $\mu_0 = 1000$ .

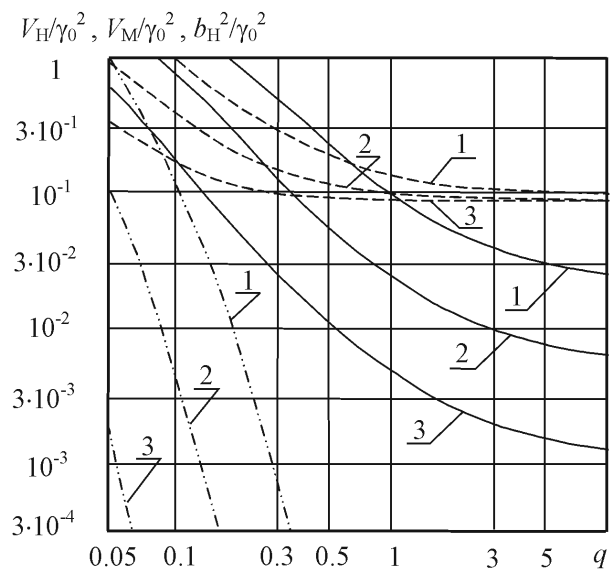


Рис. 3. Смещение и рассеяние оптимизированной оценки

Дисперсия  $D_H = \langle [\gamma_H - \langle \gamma_H \rangle]^2 \rangle = V_H - b_H^2$  оптимизированной оценки  $\gamma_H$  (31) получается большей, чем дисперсия  $D_M = \langle [\gamma_M - \langle \gamma_M \rangle]^2 \rangle = V_M - b_M^2$  оценки  $\gamma_M$  (11) приблизительно в  $1/C_{00}^2$  раз (при не слишком малых  $\mu_0$  и  $q$ ). Это является “платой” за уменьшение смещения оценки  $\gamma_H$  (31) по сравнению с оценкой  $\gamma_M$  (11).

Однако, за счет меньшего смещения  $b_H$ , рассеяние  $V_H$  оптимизированной оценки  $\gamma_H$  (31) оказывается меньше, чем рассеяние  $V_M$  оценки  $\gamma_M$  (11) при не слишком малых отношениях  $q$ . Это иллюстрирует рис. 3, где сплошными линиями показаны графики нормированного рассеяния  $V_H / \gamma_0^2$  надежной оптимизированной оценки  $\gamma_H$  (31), рассчитанные по формулам (35), а штриховыми линиями – соответствующие графики нормированного рассеяния  $V_M / \gamma_0^2$  надежной оценки  $\gamma_M$  (11), рассчитанные по формулам (24). На рис.4 показаны зависимости выигрыша  $\chi = V_M / V_H$  в точности оптимизированной оценки  $\gamma_H$  по сравнению с ОМП  $\gamma_M$  от отношения  $q$  при разных значениях  $\mu_0$ . При этом сплошные линии на рис. 4 соответствуют случаю  $\Theta \leq 1$  надежной оценки и рассчитаны по формулам (24), (35), а штриховые линии соответствуют случаю  $\Theta = 10$ , когда возможны аномальные ошибки, и рассчитаны по формулам (22), (28), (37), (38). Результаты на рис.3, 4 получены при  $f(x) = \exp(-\pi x^2 / 2)$ , причем кривые 1 соответствуют  $\mu_0 = 50$ , кривые 2 —  $\mu_0 = 200$ , а кривые 3 —  $\mu_0 = 1000$ .

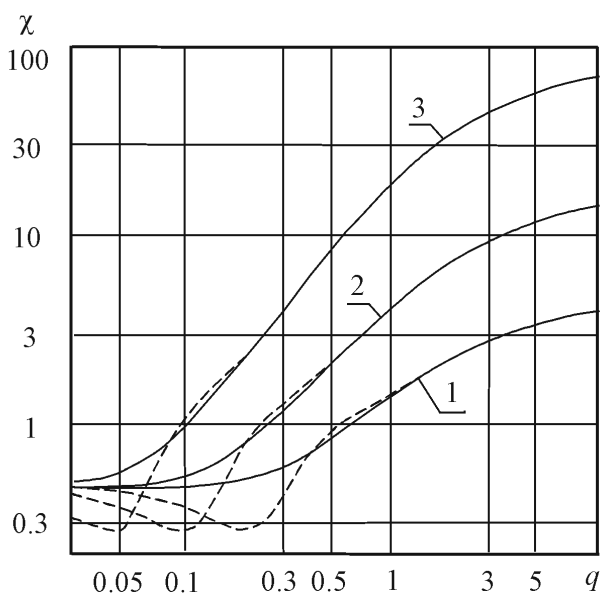


Рис. 4. Выигрыш в точности оптимизированной оценки

Из рис. 3, 4 видно, что при не слишком малых значениях  $q$  наблюдается существенный выигрыш в точности оптимизированной оценки  $\gamma_H$ , который возрастает с увеличением  $\mu_0$  и  $q$  (ОСШ  $z$ ). При этом диапазон возможных значений параметра  $q$ , при которых наблюдается выигрыш (т.е.  $\chi > 1$ ), расширяется в область меньших  $q$  с увеличением параметра  $\mu_0$ . При малых значениях  $q$  оптимизированная оценка  $\gamma_H$  несколько уступает по точности оценке  $\gamma_M$  (здесь  $\chi < 1$ ), причем при наличии аномальных ошибок (штриховые линии на рис. 4) проигрыш в точности оценки  $\gamma_H$  будет больше. Однако этот проигрыш все же является относительно небольшим. Кроме того, точность обеих оценок при малых значениях  $q$ , где имеется проигрыш, невелика. Например, для кривых на рис. 4 относительные рассеяния  $V_H / \gamma_0^2$  и  $V_M / \gamma_0^2$  оценок  $\gamma_H$  и  $\gamma_M$  составляют  $10^{-1}$  и более в области  $\chi < 1$ . В результате, оценивание интенсивности  $\gamma_0$  при таких малых значениях  $q$ , с помощью обоих алгоритмов может оказаться нецелесообразным.

**Выводы.** Для оценивания интенсивности  $\gamma_0$  несущей случайного импульса (1) с прямоугольной модулирующей функцией  $f(x)$  рекомендуется использовать оптимизированную оценку  $\gamma_H$  (31) (меньшей систематической ошибкой и средним квадратом ошибки при не слишком малых  $q$ ) является асимптотически несмещенной и обладает в целом лучшими характеристиками, чем оценка  $\gamma_M$  (11).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликов Е.И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
2. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов / Г. Я. Мирский. — М.: Энергия, 1972. — 456 с.
3. Манчестер Р. Пульсары / Р. Манчестер, Дж. Тейлор. — М.: Мир, 1980. — 296 с.
4. Трифонов А.П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, Е.П. Нечаев, В.И. Парфенов. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. — 246 с.
5. Трифонов А.П. Теоретическое и экспериментальное исследование приемника максимального правдоподобия случайного импульса с неизвестным временем прихода / А. П. Трифонов, В. И. Парфенов // Радиотехника и электроника. — 1998. — Т. 43, № 7. — С. 828—834.
6. Трифонов А.П. Прием сигнала с неизвестной задержкой при наличии модулирующей помехи / А. П. Трифонов, А. В. Захаров // Известия вузов.

Радиоэлектроника. — 1986. — Т. 29, № 4. — С. 36—41.

7. Трифонов А.П. Оценка дисперсии случайного импульса с неизвестным временем прихода / А.П. Трифонов, А.В. Захаров, О.В. Чернояров // Радио-техника и электроника. — 1996. — Т.41, № 10. — С. 1207 — 1210.

8. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.

9. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции / Г. Ван Трис. — М.: Сов радио, 1977. — Т.3. — 644 с.

*Захаров А. В. — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики физического факультета, Воронежский государственный университет.*

*E-mail: zakharov@phys.vsu.ru*

*Тел.: (473) 2-208-916*

10. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.

11. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.

12. Трифонов А.П. Теоретическое и экспериментальное исследования приемника максимального правдоподобия случайного импульса с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, В. И. Парфенов // Радиотехника и электроника. — 2000. — Т. 45, № 8. — С. 937—945.

*Zakharov A. V. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor of the Chair of Radiophysics, Physical faculty, Voronezh State University.*

*E-mail: zakharov@phys.vsu.ru*

*Tel.: (473) 2-208-916*