

МОДЕЛЬ ПОЛЯ, ФОРМИРУЕМОГО СЛУЧАЙНЫМ КЛАСТЕРОМ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Ю. С. Радченко, Р. Титов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.10.2010 г.

Аннотация: в работе предложена пространственно-временная модель сверхширокополосного сигнала, поступающая на антенную решетку после его отражения от протяженного объекта. Указано, что такой объект может быть рассмотрен как кластер точечных рассеивателей. Рассчитана пространственно-временная корреляционная функция такого сигнала. Указаны особенности модели — возможность вырождения принимаемого сигнала. Исследована вероятность такого вырождения.

Ключевые слова: сверхширокополосный сигнал, многолучевость, антенная решетка, пространственно-временная обработка.

Abstract: time-space model of ultrawideband signal reflected by a lengthy object and received by antenna array is discussed. Such object can be considered as cluster of point scatters. For this consideration mathematical model of received signal is introduced. Time-space correlation matrix of signal is calculated. Special feature — signal degeneracy — is shown. Probability of such degeneracy is explored.

Key words: ultrawideband signal, multipath, antenna array, space-time processing.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из тенденций развития современных телекоммуникационных сетей является постоянное увеличение их пропускной способности. Это ведет к использованию в таких системах новых типов сигналов, одним из которых являются сверхширокополосные сигналы — сигналы с шириной полосы более 500 МГц и несущей частотой в несколько ГГц и более [5]. При этом, однако, сигнал является узкополосным в классическом понимании по критерию $\Delta f / f_0 \ll 1$.

Телекоммуникационные сети на основе таких сигналов предполагается использовать в первую очередь в пределах помещений (офис, библиотека) — так называемых микросот. Распространение СИП сигналов в таких микросотах ведет к эффекту многолучевости [5]. Более того, типичный объект, который может послужить отражателем или рассеивателем сигнала в микросоте, будет иметь размеры порядка нескольких длин волн несущей, то есть будет являться протяженным.

Одним из способов борьбы с явлением многолучевости служит пространственная обработка с помощью **Smart-антенн**. Под **Smart-антеннами** подразумеваются такие антенны,

которые позволяют динамически менять свою диаграмму направленности. Для синтеза алгоритмов пространственной обработки в первую очередь необходимо ввести модель принимаемого антенной сигнала, отраженного от протяженного объекта.

Будем считать, что приемная антенна, а также рассеивающие объекты находятся в дальней зоне. При таких условиях рассеяние или отражение плоской волны от протяженного объекта можно рассматривать как ее взаимодействие с группой точечных рассеивателей [2]. Такую группу будем называть кластером и будем считать, что рассеиватели в кластере расположены случайно, но при этом компактно — в пределах, занимаемых протяженным объектом, т.е. будем рассматривать случай компактного кластера [3]. В качестве **Smart-антенн** будем рассматривать линейную эквидистантную антенную решетку (АР). Для таких предположений можно ввести следующую модель принимаемого сигнала.

МОДЕЛЬ ПРИНИМАЕМОГО СИГНАЛА

Будем считать, что при отражении от протяженного объекта на антенну приходит совокупность плоских волн. Каждая из этих волн

получается путем отражения от одного точечного объекта, которые составляют кластер. Так как в качестве антенны рассматривается линейная эквидистантная решетка, то на нее поступает векторный сигнал

$$\mathbf{x}(t) = S_0 s(t) \sum_{n=1}^L \gamma_n(t) \mathbf{U}(\theta_0 + \alpha_n(t)) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

Решетка имеет m элементов, Δ — шаг решетки, λ_0 — длина волны. L — случайное число лучей, $\gamma_n(t)$ — комплексная случайная амплитудно-фазовая модуляция n -го луча (Фединг), $\alpha_n(t)$ — флуктуации угла прихода n -го луча (угловое рассеяние), θ_0 — направление на рассеиватель, $f_k(\theta)$ — комплексный амплитудно-фазовый множитель при приеме сигнала на k -й элемент решетки, $\mathbf{n}(t)$ — вектор белых гауссовских шумов

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\theta) &= [f_1(\theta), f_2(\theta), \dots, f_m(\theta)]^T = \\ &= [G_1 a_1(\theta), G_2 a_2(\theta), \dots, G_m a_m(\theta)]^T, \\ f_k(\theta) &= G_k(\theta) \exp \left(j 2 \pi \frac{\Delta}{\lambda_0} (k-1) \sin(\theta) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$a_k(\theta) = \exp \left(j 2 \pi \frac{\Delta}{\lambda_0} (k-1) \sin(\theta) \right), \quad k = 0..m-1$$

Шумы $\mathbf{n}(t)$ имеют следующие статистические характеристики

$$\langle n_k(t) \rangle = 0, \quad \langle n_k(t_1) n_m(t_2) \rangle = \sigma_n^2 \delta_{k,m} \delta(t_1 - t_2) \quad (3)$$

Фединг $\gamma_n(t)$ — комплексный гауссовский процесс с моментами

$$\begin{aligned} \langle \gamma_n(t) \rangle &= 0, \quad \langle \gamma_n(t_1) \gamma_k(t_2) \rangle = 0, \\ \langle \gamma_n(t_1) \gamma_k^*(t_2) \rangle &= \sigma_\gamma^2 \delta_{k,n} \rho(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, сигнал (1) является гауссовским случайным процессом с нулевым средним, со случайными параметрами L и $\alpha_n(t)$ и неизвестным параметром θ_0 . Поэтому для получения статистического описания сигнала (1) достаточно ввести корреляционную матрицу

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s(t_1 - t_2) &= \langle \mathbf{S}(t_1) \mathbf{S}^H(t_2) \rangle = \\ &= S_0^2 s(t_1) s^*(t_2) \left\langle \sum_{n=1}^L \gamma_n(t_1) \gamma_n^*(t_2) \mathbf{U}(\theta_0 + \alpha) \mathbf{U}^H(\theta_0 + \alpha) \right\rangle_{L, \gamma, \alpha} \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) и далее верхний индекс H означает эрмитовское сопряжение матриц.

Будем считать, что α, γ, L — статистически независимы между собой и их статистические характеристики не зависят от номера луча n . Угловое рассеяние α имеет распределение

$P(\alpha)$. Если обозначить матрицу взаимных корреляций элементов $f_k(\theta_0 + \alpha)$ как

$$R_{k,i}^{(a)}(\theta_0, \sigma_\alpha) = \langle f_k(\theta_0 + \alpha) f_i^*(\theta_0 + \alpha) \rangle, \quad i, k = 1..m, \quad (6)$$

то

$$\mathbf{R}_s(t_1 - t_2) = P_s \rho(t_1 - t_2) s(t_1) s^*(t_2) \mathbf{R}^{(a)}(\theta_0, \sigma_\alpha) \quad (7)$$

Здесь $P_s = S_0^2 \sigma^2 < L >$ — средняя мощность поля в некоторой точке пространства, $< L >$ — среднее число лучей,

$$\begin{aligned} R_{k,i}^{(a)}(\theta_0, \sigma_\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) G_k(\theta_0 + \alpha) G_i^*(\theta_0 + \alpha) \times \\ &\times \exp(j 2 \pi \frac{\Delta}{\lambda_0} (k-i) \sin(\theta_0 + \alpha)) d\alpha \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение (9) аналитически рассчитать затруднительно. Численное вычисление интеграла в (9) имеет особенности, так как подынтегральная функция осциллирует.

Аналитические и численные расчеты упрощаются, если разложить $\sin(\theta_0 + \alpha)$ в ряд Тейлора по степеням α и ограничиться первым приближением $\sin(\theta_0 + \alpha) \approx \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0)\alpha$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} R_{k,i}^{(a)}(\theta_0, \sigma_\alpha) &= \exp \left(j 2 \pi \frac{\Delta}{\lambda_0} (k-i) \sin(\theta_0) \right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) G_k(\theta_0 + \alpha) G_i^*(\theta_0 + \alpha) \times \\ &\times \exp \left(j 2 \pi \frac{\Delta}{\lambda_0} (k-i) \cos(\theta_0) \alpha \right) d\alpha = \\ &= a_k(\theta_0) a_i^*(\theta_0) K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $u_{k,i} = 2\pi(\Delta / \lambda_0)(k-i) \cos(\theta_0)$, $\Omega = \{\theta, \sigma_\alpha\}$ и

$$\begin{aligned} K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) G_k(\theta_0 + \alpha) G_i^*(\theta_0 + \alpha) \times \\ &\times \exp \left(j 2 \pi \frac{\Delta}{\lambda_0} (k-i) \cos(\theta_0) \alpha \right) d\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, элемент матрицы $K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega)$ является преобразованием Фурье от достаточной гладкой функции

$$W_{k,i}(\alpha) = P(\alpha) G_k(\theta_0 + \alpha) G_i^*(\theta_0 + \alpha)$$

Расчеты интеграла (11) выполняются с помощью процедуры БПФ. Дальнейшие упрощения получаются, если использовать разложение в ряд Тейлора

$$G(\theta + \alpha) = G(\theta) + G'(\theta)\alpha + 0.5G''(\theta)\alpha^2 \quad (12)$$

Учитывая только первую производную $G'(\theta)$ можно записать

$$K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [G_k G_i + (G_k G'_i + G'_k G_i) \alpha + G'_k G'_i \alpha^2] \times (13) \\ \times P(\alpha) \exp(ju_{k,i} \alpha) d\alpha$$

Интеграл (13) нетрудно вычислить аналитически, используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^q \cdot P(\alpha) \exp(ju \alpha) d\alpha = (-j)^q \frac{dB(u | \Omega)}{du} \quad (14)$$

Тогда для (13) имеем

$$K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega) = G_k G_i B(u_{k,i} | \Omega) - j(G'_k G'_i + G'_k G'_i) B'(u_{k,i} | \Omega) - G'_k G'_i B''(u_{k,i} | \Omega) \quad (15)$$

Учет G, G', G'' дает выражение

$$K_{k,i}(u_{k,i}, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_k G_i + (G_k G'_i + G'_k G_i) \alpha + \right. \\ \left. + (G_k G''_i + 2G'_k G'_i + G''_k G_i) \frac{\alpha^2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (G'_k G''_i + G''_k G'_i) \alpha^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} G''_k G''_i \alpha^4 \right] \times P(\alpha) \exp(ju_{k,i} \alpha) d\alpha \quad (16)$$

Для гауссовской модели углового рассеяния (14) принимает следующий вид (табл. 1).

Используя данные из таблицы, можно получить уточненное аналитическое выражение

для $K_{k,i}(u_{k,i} | \Omega)$ (16)

В таблице 2 приведены выражения $B(u | \Omega)$ для различных типов распределений.

Вводя диагональную матрицу

$$\mathbf{A}(\theta_0) = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \begin{pmatrix} a_1(\theta_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(\theta_0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_m(\theta_0) \end{pmatrix} \quad (17)$$

можно корреляционную матрицу $\mathbf{R}_s(t_1, t_2)$ записать в виде

$$\mathbf{R}_s(t_1, t_2; \Omega) = P_s \rho(t_1 - t_2) s(t_1) s^*(t_2) \mathbf{A}(\theta_0) \mathbf{K}(\Omega) \mathbf{A}^H(\theta_0) \quad (18)$$

Если в разложении Тейлора для диаграммы направленности (12) можно пренебречь слагаемыми с производными, то есть $G(\theta + \alpha) \approx G(\theta)$, то тогда можно корреляционную матрицу $\mathbf{R}_s(t_1, t_2)$ записать в виде

$$\mathbf{R}_s(t_1, t_2; \Omega) = P_s \rho(t_1 - t_2) s(t_1) s^*(t_2) \times \mathbf{A}(\theta_0) \mathbf{G}(\theta_0) \mathbf{B}(\Omega) \mathbf{G}(\theta_0) \mathbf{A}^H(\theta_0) \quad (19)$$

Здесь

$$\mathbf{G}(\theta_0) = \text{diag}(G_1(\theta_0), G_2(\theta_0), \dots, G_m(\theta_0)) = \begin{pmatrix} G_1(\theta_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2(\theta_0) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_m(\theta_0) \end{pmatrix} \quad (20)$$

Таблица 1

$P(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_\alpha^2}\right)$	$B(u \Omega) = \exp\left(-\frac{\sigma_\alpha^2 u^2}{2}\right)$
	$B'(u \Omega) = -(u\sigma_\alpha^2) \exp\left(-\frac{\sigma_\alpha^2 u^2}{2}\right)$
	$B''(u \Omega) = \sigma_\alpha^2 (u^2 \sigma_\alpha^2 - 1) \exp\left(-\frac{\sigma_\alpha^2 u^2}{2}\right)$
	$B'''(u \Omega) = (3u\sigma_\alpha^2 - (u\sigma_\alpha^2)^3) \exp\left(-\frac{\sigma_\alpha^2 u^2}{2}\right)$
	$B^{(4)}(u \Omega) = \sigma_\alpha^2 \left[3 - 6(u\sigma_\alpha^2)^2 + (u\sigma_\alpha^2)^4 \right] \exp\left(-\frac{\sigma_\alpha^2 u^2}{2}\right)$

Таблица 2

Распределение $P(\alpha)$	$B(u \Omega)$
$P(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_\alpha^2}\right)$	$B(u \Omega) = \exp\left(-\frac{\sigma_\alpha^2 u^2}{2}\right)$
$P(\alpha) = \frac{1}{2\theta_g}, \alpha \leq \theta_g, \sigma_\alpha^2 = \theta_g^2 / 3$	$B(u \Omega) = \frac{\sin(u\theta_g)}{(u\theta_g)} = \frac{\sin(u\sigma_\alpha \sqrt{3})}{(u\sigma_\alpha \sqrt{3})}$
$P(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_\alpha} \exp\left(-\frac{ \alpha }{\sigma_\alpha} \sqrt{2}\right)$	$B(u \Omega) = \frac{1}{1 + 0.5(u\sigma_\alpha)^2}$

Здесь $\mathbf{B}(\Omega) = \|B_{k,i}(u_{k,i}|\Omega)\|$. Введем $\mathbf{F}(\theta_0) = \mathbf{A}(\theta_0)\mathbf{G}(\theta_0)$ — диагональную матрицу. В дальнейшем будем использовать более компактную форму записи

$$\mathbf{R}_s(t_1, t_2; \Omega) = P_s \rho(t_1 - t_2) s(t_1) s^*(t_2) \mathbf{F}(\theta_0) \mathbf{B}(\Omega) \mathbf{F}^H(\theta_0) \quad (21)$$

В предельном случае $\sigma_\alpha = 0$ матрица $\mathbf{B}(\Omega)$ становится вырожденной. То есть поле точечного источника является полностью когерентным на апертуре антенной решетки. В этом случае удобнее вернуться к исходной записи

$$\mathbf{A}(\theta_0) \mathbf{G}(\theta_0) \mathbf{B}(\Omega) \mathbf{G}(\theta_0) \mathbf{A}^H(\theta_0) = \mathbf{U}(\theta_0) \mathbf{U}^H(\theta_0)$$

ВЫРОЖДЕНИЕ ПРИНИМАЕМОГО СИГНАЛА

Так как флуктуации α_n угла прихода принимают случайные значения, то вполне вероятен случай, при котором они будут настолько малы, что принимаемый сигнала будет обладать свойствами плоской волны.

Ниже на графиках представлена гистограмма распределения оценки максимального правдоподобия углового рассеяния σ_α при известном угле прихода θ_0 . Гистограмма нормирована единицу. Истинное значение углового рассеяния равно 6 градусам.

То, что в некоторых случаях оценка принимает нулевое значение, можно трактовать как вырождение поля в единую плоскую волну. Как показывает моделирование, вероятность такого вырождения уменьшается с повышением углового рассеяния или с ростом числа отраженных плоских волн, что и следовало ожидать.

Полученные выше соотношения для корреляционной матрицы поля не предполагают вырождения поля, возникающего в случае,

когда кластер рассеивающих точек наблюдается ФАР как одна блестящая точка. Точнее выполняется условие

$$\Omega_s \ll \lambda_0^2 / S_{FAR} \quad (22)$$

где Ω_s — телесный угол, под которым виден кластер из области наблюдения площадью S_{FAR} .

Вероятность вырождения определяется следующими условными вероятностями

- $P_k = P[k=1]$ — число рассеивающих точек $\mathbf{k}=1$,
- $P_{0\alpha} = P[|\alpha| < \delta_\alpha]$ — реализация случайного кластера такова, что рассеивающая область удовлетворяет условию (22), т.е. флуктуации угла прихода малы и не превосходят некий порог δ_α
- $P_\gamma = P[|\gamma_1|^2, \dots, |\gamma_K|^2 > \varepsilon | \Omega_s]$ — реализация комплексных амплитуд $\gamma_k, k=1..L$ такова, что

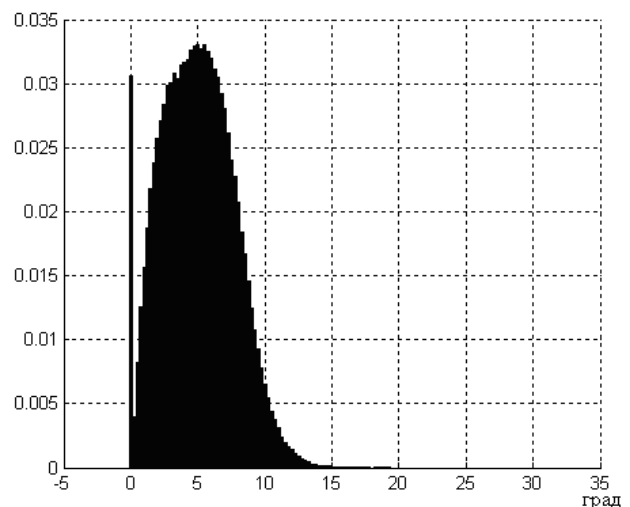


Рис. 1. Гистограмма распределения оценки максимального правдоподобия углового рассеяния σ_α при известном угле прихода θ_0

только K из L лучей обладают существенной мгновенной мощностью, причем они приходят из области, удовлетворяющей условию (22). Можно сказать, что кластер распадается на два — компактный «яркий» субкластер, и «тусклый» протяженный субкластер.

Для оценки указанных вероятностей необходимо сделать некоторые предположения. Так в рамках стандарта IEEE 802.15.3 для кластера лучей внутри помещения принята пуассоновская модель числа рассеивателей —

$$P(k) = \frac{v^k \exp(-v)}{k!} \quad [4]. \quad \text{Отсюда } P_k = v \exp(-v),$$

где v — среднее число рассеивателей. Вероятность $P_{0\alpha}$ в рамках нормальной модели углового рассеяния можно записать

$$P_{0\alpha} = 2\Phi(\delta_\alpha / \sigma_\alpha) - 1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta_\alpha}{\sigma_\alpha}. \quad \text{Здесь } \Phi(z) — \text{интеграл вероятности, а приближенная оценка вероятности } P_{0\alpha} \text{ справедлива при } (\delta_\alpha / \sigma_\alpha) \leq 0.4.$$

Оценка P_γ может быть сделана в предположении статистической однородности рассеивателей в кластере. Тогда мгновенная мощность сигнала, формируемого k рассеивателями, описывается χ_k^2 законом распределения. Следовательно $P_\gamma = (1 - F_{\chi^2}(K, \varepsilon / \sigma_\gamma^2))P_{0\alpha}$. Здесь $F_{\chi^2}(K, z)$ — функция распределения стандартного хи-квадрат распределения с K степенями свободы. Если каждая из вероятностей мала, то в первом приближении вероятность вырождения поля $P_d = P_k + P_{0\alpha} + P_\gamma$.

ВЫВОДЫ

В работе исследована математическая модель поля формируемого случайным кластером рассеивателей. Эта модель может быть исполь-

зована при дальнейшем синтезе алгоритмов пространственно-временной обработки поля. Однако такая модель имеет важную особенность — поле может вырождаться и по своим свойствам совпадать с плоской волной, полученной от точечного рассеивателя, и возможность такого вырождения подтверждено моделированием. Вероятность такого вырождения и его природа требует отдельного рассмотрения. Эта особенность модели должна также учитываться при синтезе алгоритмов обработки поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосюк В. К., Кравченко В. Ф. Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации / под ред. В. Ф. Кравченко. — М.: Физматлит, 2008. — 704 с.
2. Фалькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием / под ред. С. Е. Фальковича. — М.: Радио и связь, 1989. — 296 с.
3. Радченко Ю. С. Пространственно-временная обработка сверхширокополосных сигналов в многолучевых каналах / Ю. С. Радченко, Р. В. Титов // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2008. — № 2. — С. 48—54.
4. Foerster J. A Channel Model for Ultrawideband Indoor Communication / J. Foerster, M. Pendergrass, A. Molich // International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communication, October 2003. — <http://www.merl.com/papers/docs/TR2004-074.pdf>
5. Dabin J. A statistical ultra-wideband indoor channel model and the effects of antenna directivity on path loss and multipath propagation / J. Dabin, A. Haimovich, H. Grebel // IEEE Journal of Selected Areas in Communications. — 2006. — Т. 24, № 4. — С. 752—758.

Радченко Ю. С., доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики, Воронежский государственный университет

Тел. (4732) 20-89-16

E-mail: radchenko@gdct-group.ru

Титов Р., аспирант 2 года обучения кафедры радиофизики, Воронежский государственный университет

Тел. (4732) 20-89-16

E-mail: rvtitov@yandex.ru

Radchenko Y. S., doctor of science, professor of radio physics department, Voronezh State University

Тел. (4732) 20-89-16

E-mail: radchenko@gdct-group.ru

Titov R., post-graduate student of radio physics department, Voronezh State University

Тел. (4732) 20-89-16

E-mail: rvtitov@yandex.ru