УДК 530.145; 539.171.016

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА НА ДВУМЕРНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ В УСЛОВИЯХ ЭФФЕКТА ААРОНОВА—БОМА

А. Ф. Клинских, Ханг Т. Т. Нгуен, П. А. Мелешенко

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный аграрный университет им. К. Д. Глинки

Поступила в редакцию 30 июня 2010 г.

Аннотация: *в работе найдено аналитическое выражение для дифференциального сечения упругого рассеяния электрона на двумерном кулоновском потенциале в условиях эффекта Ааронова—Бома. Представлены результаты борновского приближения, приближения эйконала, а также точного решения квантовомеханической задачи рассеяния. Показано, что наличие кулоновского потенциала приводит к более сложной зависимости дифференциального сечения рассеяния от магнитного потока, чем в известной формуле эффекта Ааронова-Бома.*
Ключевые слова: *квантовая теория рассеяния, двумерный кулоновский потенциал, эффект Ааронова—Бома.*

Abstract: *we found an analytical expression for the differential cross sections for elastic scattering of electrons on the two-dimensional Coulomb potential in the presence of the Aharonov—Bohm effect. The results of the Born approximation, the eikonal approximation and the exact solution of quantum scattering problem are presented. We show also that the presence of the Coulomb potential leads to a more complicated dependence of the differential cross section on the magnetic flux than in the known formula of the Aharonov—Bohm effect.*
Key words: *quantum scattering theory, two-dimensional Coulomb potential, the Aharonov-Bohm effect.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Успехи в области современной техники молекулярно-лучевой эпитаксии позволяют синтезировать квантовые структуры, которые с большой степенью точности можно считать двумерными. В связи с этим важной и практически интересной является задача о нахождении характеристик процесса рассеяния электрона на двумерном кулоновском потенциале в присутствии внешнего магнитного поля.

Интерес к двумерным системам в настоящее время возрастает в связи с широким спектром практических реализаций таких структур как графен [1] и графан [2]. Графен представляет собой структуру в виде моноатомного слоя углерода, тогда как графан является гибридом графена и отдельных атомов водорода, включенных в монослой. Очевидно, что задача о рассеянии электрона на кулоновском потенциале в двух пространственных измерениях выглядит весьма актуальной.

По-видимому, одним из самых известных "двумерных эффектов" является эффект Ааронова—Бома [3],который состоит в том, что электромагнитное поле, сосредоточенное в области недоступной для заряженной частицы, тем не менее, влияет на ее квантовое состояние. В случае свободного двумерного электрона соответствующее влияние определяет рассеяние, амплитуда которого была впервые получена Аароновым и Бомом [3]. Основной особенностью этой амплитуды является ее периодичность в зависимости от величины магнитного потока, пронизывающего бесконечно тонкий соленоид, при этом амплитуда рассеяния обращается в нуль для потока, равного целому числу квантов магнитного потока. Следует отметить также, что эффект Ааронова—Бома позволяет проследить за изменением такой величины, как фаза волновой функции. Разность фаз при обходе соленоида электроном по различным траекториям приводит в итоге к наблюдаемым интерференционным эффектам, которые зависят от величины магнитного по-

© Клинских А. Ф., Нгуен Ханг Т. Т., Мелешенко П. А., 2010

тока в соленоиде. В связи с этим можно утверждать, что магнитный поток в данном случае является управляющим параметром, изменяющим такую тонкую квантовомеханическую характеристику, как фаза квантовой частицы (точнее разность фаз).

Теоретически взаимодействие электрона с двумерным кулоновским потенциалом было рассмотрено в целом ряде работ. Например, в [5, 6] дана полная теория двумерного атома водорода как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях. В работе [7] представлена теория водородного молекулярного иона в двух пространственных измерениях. Авторы получают выражения для волновых функций и уровней энергии стационарных состояний для обеих рассматриваемых систем.

Задача рассеяния электрона на двумерном кулоновском потенциале рассмотрена в работах [8, 9]. Авторы аналитически решают двумерное уравнение Дирака и получают явные выражения для волновых функций электрона в присутствии также и магнитного поля. При этом в [9] обсуждается релятивистское обобщение эффекта Ааронова—Бома, его влияние на динамику релятивистского электрона, а также возможность наблюдения связанных состояний электрона в таких условиях, тогда как в нерелятивистском эффекте Ааронова—Бома связанных состояний нет.

Данная работа посвящена изучению процесса рассеяния электрона на двумерном кулоновском потенциале в нерелятивистском случае в условиях эффекта Ааронова—Бома в эйкональном приближении. В данном подходе оказывается возможным получение точных волновых функций непрерывного спектра, а, следовательно, и точных выражений для амплитуды и сечения рассматриваемого процесса.

2. АМПЛИТУДА И СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим потенциальное рассеяние электрона на двумерном притягивающем кулоновском потенциале:

$$V\left(x,y\right)=\frac{\alpha}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\ , \qquad (1)$$

где $\alpha=-e^2$.

Особенность этого потенциала заключается в том, что точное выражение для сечения рассеяния отличается от результатов разных приближений — классического и борновского, тогда как в трехмерном случае эти выражения совпадают.

Как известно [10], классическое сечение рассеяния

$$d\sigma=\frac{dN}{n}$$

определяется числом частиц dN, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале $d\phi$ (n — число частиц, проходящих в единицу времени через единицу длины в поперечном направлении пучка):

$$\frac{d\sigma}{d\varphi}=\left|\frac{d\rho\left(\varphi\right)}{d\varphi}\right|.$$

Здесь $\rho\left(\phi\right)$ — прицельное расстояние. Используя известное решение классической задачи движения в кулоновском поле [10]

$$\rho\left(\varphi\right)=\frac{\left|\alpha\right|}{m\mathrm{v}^2}\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ ,$$

получаем классическое выражение для сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi}=\frac{\left|\alpha\right|}{2m\mathrm{v}^2}\sin^{-2}\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

где m — масса частицы (в нашем случае электрона), v — ее скорость.

Согласно общим правилам [11], амплитуда рассеяния в борновском приближении может быть записана как:

$$f^{(Born)}=-\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{2}{\pi k}\right)^{1/2}\iint dxdye^{-i\mathbf{qr}}\frac{\alpha}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}$$

где $q=2k\sin\left(\phi/2\right)$ — переданный импульс, $k=\sqrt{2mE/\hbar^2}$ и $\mathrm{v}=\hbar k/m$ — волновое число и скорость частицы соответственно. Для сечения рассеяния в борновском приближении получаем:

$$\frac{d\sigma^{(Born)}}{d\varphi}=\left|f^{(Born)}\right|^2=\frac{\pi\alpha}{\hbar\mathrm{v}}\frac{\alpha}{2m\mathrm{v}^2}\sin^{-2}\left(\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (2)$$

Видно, что результат борновского приближения отличается от классического выражения для сечения рассеяния дополнительным множителем, который зависит от характеристики потенциала и от скорости налетающей частицы.

Наличие такого множителя есть проявление двумерности рассматриваемой системы.

Амплитуда рассеяния в приближении эйконала может быть записана следующим стандартным образом [11]:

$$f^{(eiconal)} = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{2}{\pi k}\right)^{1/2} \iint dxdy e^{-iqy} \frac{\alpha}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{i}{\hbar \mathrm{v}}\int\limits_{-\infty}^{x} dx' \frac{\alpha}{\left(x'^2+y^2\right)^{1/2}}\right),$$

и, соответственно, для сечения рассеяния получаем следующую формулу:

$$\begin{gathered}\frac{d\sigma^{(eiconal)}}{d\varphi} = \left|f^{(eiconal)}\right|^2 = \\ = \tanh\left(\frac{\pi\alpha}{\hbar \mathrm{v}}\right)\cdot\frac{\alpha}{2m\mathrm{v}^2}\sin^{-2}\left(\frac{\varphi}{2}\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Как и должно быть, в предельном случае $\alpha \to 0$ выражение (3) переходит в борновское сечение (2).

Для двумерного кулоновского потенциала известно и точное выражение для сечения рассеяния, которое совпадает с результатом эйконального приближения (3). Явное выражение для амплитуды рассеяния при последовательном решении двумерного уравнения Шредингера имеет вид:

$$f^{(exact)} = -i\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)}{\Gamma\left(-i\gamma\right)}\frac{1}{\sqrt{2k}\sin\left(\varphi/2\right)},$$

где $\gamma = m\alpha/\hbar^2 k$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Напомним, что при целых отрицательных значениях аргумента гамма-функция имеет полюсную особенность. Полюса гамма-функции, стоящей в числителе этой формулы определяют уровни энергии связанных состояний электрона, тогда как полюса гамма-функции стоящей в знаменателе определяют уровни энергии виртуальных состояний в непрерывном спектре.

Рассмотрим теперь влияние магнитного поля на процесс упругого рассеяния электрона на двумерном кулоновском потенциале. Пусть однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости движения электрона, отлично от нуля в ограниченной области пространства

$$\vec{B} = \begin{cases} B\vec{e}_z, & r < a, \\ 0, & r > a \end{cases}$$

и определяется векторным потенциалом

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\vec{B}\times\vec{r}\right], & r < a, \\ \frac{Ba^2}{2}\nabla\phi, & r > a \end{cases}$$

в соответствии с общей формулой [12]

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}\ .$$

Отметим, что при таком выборе векторного потенциала выполняются следующие равенства

$$\int\limits_{(S)}\vec{B}d\vec{s} = \int\limits_{(\Gamma)}\vec{A}d\vec{l} = \pi Ba^2 = \Phi,$$

справедливые при любом выборе контура интегрирования[12], Φ — магнитный поток через площадь, ограниченную контуром.

Для получения амплитуды рассеяния в присутствии ограниченного магнитного поля используем следующее выражение для волновой функции задачи рассеяния в приближении эйконала [11]:

$$\psi\left(x,y\right) = \chi\left(y\right)\exp\left[ikx - \frac{i}{\hbar \mathrm{v}}\int\limits_{-\infty}^{x}dx'\frac{\alpha}{\left(x'^2+y^2\right)^{1/2}}\right], \tag{5}$$

где

$$\chi\left(y\right) = \begin{cases}\exp\left(-ie\Phi/2\hbar c\right), & y > 0, \\ \exp\left(+ie\Phi/2\hbar c\right), & y < 0\end{cases} \tag{6}$$

есть добавка в фазу волновой функции, обусловленная векторным потенциалом (так называемый дираковский фазовый множитель [3])

$$\frac{ie}{\hbar c}\int\vec{A}\vec{v}dt = \frac{ie}{\hbar c}\int\vec{A}d\vec{l} = \frac{ie}{\hbar c}\frac{\Phi}{2\pi}\varphi.$$

При обходе по произвольному замкнутому контуру, содержащему в себе область с ненулевым магнитным полем, изменение фазы волновой функции в соответствии с общей теорией должно быть равно $ie\Phi/\hbar c$. Очевидно, что использование функции $\chi\left(y\right)$ в виде (6) удовлетворяет данному требованию [11].

С использованием волновой функции (5) непосредственно могут быть получены выражения для амплитуды

$$f=-\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{2}{\pi k}\right)^{1/2}\iint dxdy\chi(y)e^{-iqy}\frac{\alpha}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{x}dx'\frac{\alpha}{\left(x'^2+y^2\right)^{1/2}}\right)$$

и сечения рассеяния на двумерном кулоновском потенциале в присутствии ограниченного в пространстве магнитного поля:

$$\frac{d\sigma(\xi,\varphi)}{d\varphi}=|f|^2=\tanh(\pi\eta)\cdot\frac{\alpha}{2m\mathrm{v}^2}\times$$
$$\times\sin^{-2}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left[\cos^2\xi+\coth^2(\pi\eta)\sin^2\xi\right]. \tag{7}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\eta=\frac{\alpha}{\hbar\mathrm{v}},\ \ \xi=\frac{e\pi Ba^2}{2\hbar c}=\frac{e\Phi}{2\hbar c}=\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\ ,$$

где v — скорость частицы, $\Phi_0=2\pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока.

В отсутствие магнитного поля из (7), как и следовало ожидать, получаем сечение рассеяния (4). В предельном случае $\eta\to 0$, что соответствует использованию борновского приближения или отсутствию кулоновского потенциала, сечение рассеяния осциллирует в зависимости от величины магнитного потока Φ

$$\frac{d\sigma^{(Ah-B)}}{d\varphi}=\frac{1}{2\pi k}\sin^{-2}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\sin^2\xi\ , \tag{8}$$

что соответствует эффекту Ааронова—Бома для задачи рассеяния электрона на соленоиде радиусом a, несущем магнитный поток Φ [4].

Особенность полученного в данной работе результата состоит в том, что присутствие кулоновского потенциала изменяет зависимость сечения Ааронова—Бома от магнитного потока, а при значениях магнитного потока через соленоид кратных кванту магнитного потока сечение рассеяния не обращается в нуль.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На рис. 1 представлены сечения упругого рассеяния электрона на двумерном кулоновском потенциале в зависимости от угла рассеяния (a) и от энергии (b) (область изменения энергии $E = 1...10$ eV). Результаты борновского приближения по порядку величины достаточно сильно отличаются от результатов точного расчета, хотя качественный характер зависимостей остается одинаковым для обоих случаев.

На рис. 2 зависимости сечения рассеяния от магнитного потока имеют осциллирующий характер, что является особенностью проявления эффекта Ааронова—Бома, а присутствие кулоновского потенциала приводит к увеличению амплитуды таких осцилляций. При этом при определенных значениях энергии налетающего электрона осцилляции сечения могут происходить как в “противофазе” (a), так и в “фазе” (b) с осцилляциями, отвечающими отсутствию кулоновского потенциала.

В случае эффекта Ааронова—Бома зависимость сечения от энергии имеет монотонный характер (рис. 3 (b)), тогда как при рассеянии на кулоновском потенциале в условиях эффекта Ааронова—Бома эта зависимость приобретает ярко выраженный резонансный характер

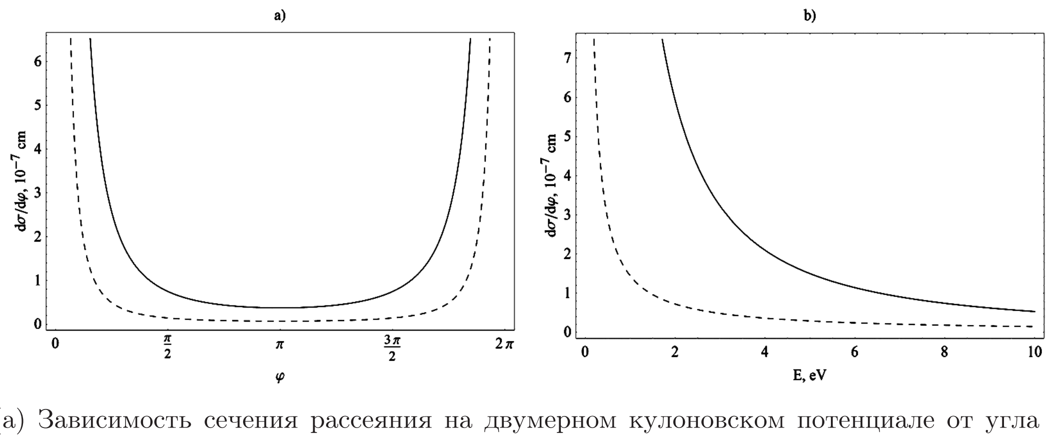

Рис. 1. (a) Зависимость сечения рассеяния на двумерном кулоновском потенциале от угла рассеяния: борновское приближение — сплошная линия, точный результат — пунктирная линия (энергия электрона $E = 5$ eV); (b) зависимость сечения рассеяния от энергии налетающего электрона (угол рассеяния $\phi=\pi/3$): борновское приближение — сплошная линия, точный результат — пунктирная линия

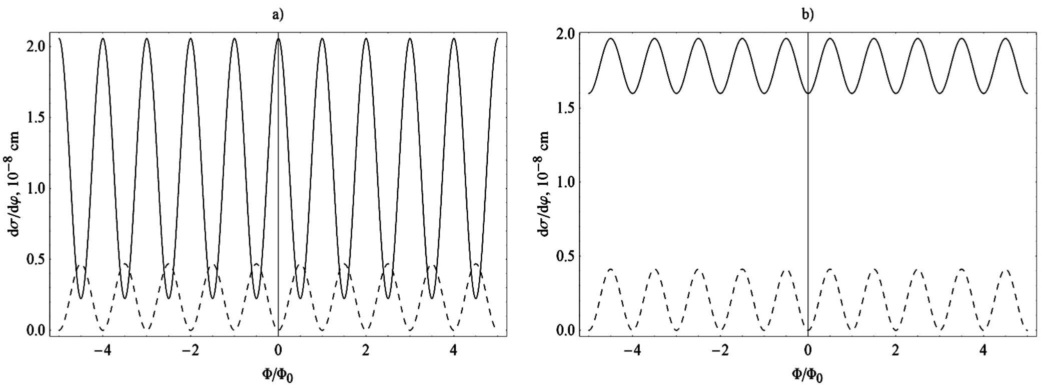

Рис. 2. Зависимость сечения рассеяния от величины магнитного потока: сплошная линия отвечает комбинации двумерного кулоновского потенциала и эффекта Ааронова—Бома; пунктирная линия соответствует "чистому" эффекту Ааронова—Бома; (a) энергия электрона $E = 7\,\mathrm{eV}$, (b) энергия электрона $E = 9\,\mathrm{eV}$ (угол рассеяния в обоих случаях $\phi = \pi/3$)

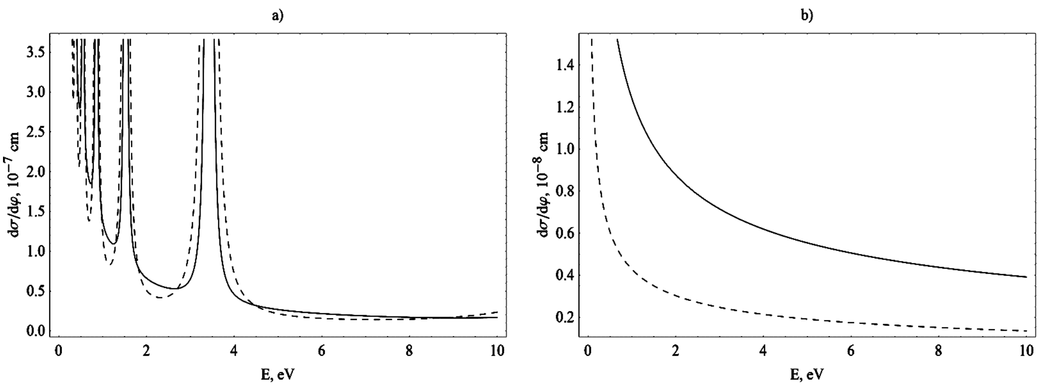

Рис. 3. Зависимость сечения рассеяния от энергии налетающего электрона (угол рассеяния в обоих случаях $\phi = \pi/3$): (a) комбинация кулоновского потенциала и эффекта Ааронова—Бома (сплошная линия соответствует случаю $\Phi/\Phi_0 = 0.1$, пунктирная — $\Phi/\Phi_0 = 0.8$); (b) "чистый" эффект Ааронова—Бома (сплошная линия соответствует случаю $\Phi/\Phi_0 = 0.5$, пунктирная – $\Phi/\Phi_0 = 0.8$)

(рис. 3 (a)). Положение резонансов в непрерывном спектре не зависит от величины угла рассеяния и значений магнитного потока, изменяются только порядок величины сечения и форма кривой. Математически источник появления таких резонансов состоит в том, что второе слагаемое в (7) включает множитель, имеющий полюсы при целых значениях параметра η. Положение резонансов даётся водородоподобной формулой $E_n = me^4/\left(2\hbar^2 n^2\right)$. Этот результат является достаточно неожиданным.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в рамках двумерной квантовой теории рассеяния получены аналитические выражения для амплитуды и сечения упругого рассеяния электрона на двумерном кулоновском потенциале в условиях эффекта Ааронова—Бома. Показано, что точное выражение для сечения рассеяния и выражение, полученное в рамках приближения эйконала, совпадают. Сечение рассеяния имеет осциллирующий характер в зависимости от величины магнитного потока, пронизывающего площадь, ограничивающую магнитное поле. Наблюдается резонансная зависимость сечения рассеяния от энергии налетающего электрона, при этом положения резонансов не зависят от величины угла рассеяния и значений магнитного потока.

ЛИТЕРАТУА

1. *Castro Neto A. H.* The electronic properties of graphene / A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim // Reviews of Modern Physics. — 2009. — Vol. 81. — № 1. — P. 109—162.

2. *Sofo Jorge O.* Graphane: A two-dimensional hydrocarbon / Jorge O. Sofo, Ajay S. Chaudhari, Greg D. Barber // Physical Review B. — 2007. — Vol. 75. — №. 15. — P. 153401(1)—153401(4).

3. *Peshkin M.* The Aharonov-Bohm effect / M. Peshkin, A. Tonomura. – Berlin—Heidelberg: Springer, 1989. — 152 p.

4. *Aharonov Y.* Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory / Y. Aharonov, D. Bohm // Physical Review. — 1959. — Vol. 115. — № 3. — P. 485—491.

5. *Yang X. L.* Analytic solution of a two-dimensional hydrogen atom. I. Nonrelativistic theory / X. L. Yang [et al.] // Physical Review A. — 1991. — Vol. 43. — № 3. — P. 1186—1196.

6. *Guo S.* H. Analytic solution of a two-dimensional hydrogen atom. II. Relativistic theory / S. H. Guo [et al.] // Physical Review A. — 1991. — Vol. 43. — № 3. — P. 1197—1205.

7. Zhu Jia-Lin Hydrogen molecular ions in two dimensions / Jia-Lin Zhu, Jia-Jiong Xiong // Physical Review B. — 1990. — Vol. 41. — № 17. — P. 12274—12277.

8. Ho Choon-Lin Planar Dirac electron in Coulomb and magnetic fields / Choon-Lin Ho, V. R. Khalilov // Physical Review A. — 2000. — Vol. 61. — № 3. — P. 032104(1)—032104(7).

9. *Khalilov V. R.* Relativistic Aharonov-Bohm effect in the presence of planar Coulomb potentials / V. R. Khalilov // Physical Review A. — 2005. — Vol. 71. — № 1. — P. 012105(1)—012105(6).

10. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 4-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 215 с.

11. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 4-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 768 с.

12. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 656 с.

Клинских А. Ф., доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Воронежский государственный университет

E-mail: klinskikh@vsau.ru

Ханг Тхи Тхюи Нгуен, аспирант кафедры теоретической физики, Воронежский государственный университет

E-mail: hangthuynguyen2001@yahoo.com

Мелешенко П. А., аспирант кафедры физики, Воронежский государственный аграрный университет им. К. Д. Глинки

E-mail: melechp@yandex.ru

Klinskikh A. F., Theoretical Physics Department, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State University

E-mail: klinskikh@vsau.ru

Hang Thi Thuy Nguyen, Post-graduated student, Theoretical Physics Department, Voronezh State University

E-mail: hangthuynguyen2001@yahoo.com

Meleshenko P. A., Post-graduated student, Physics Department, Voronezh State Agrarian University

E-mail: melechp@yandex.ru