

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОЦЕНКИ ФАЗЫ РАДИОСИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ БЫСТРЫХ ЗАМИРАНИЙ

А. В. Захаров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 17.09.2010 г.

Аннотация: рассмотрена задача оценки фазы узкополосного радиосигнала, искаженного замираниями и наблюдаемого на фоне белого шума. Амплитуда и фаза замирающей компоненты сигнала имеют соответственно релеевское и равномерное распределения вероятностей, что соответствует случаю райсовских замираний. При этом замирания считаются быстрыми, т.е. время корреляции замираний значительно меньше длительности сигнала. Найдены аналитические выражения для плотности вероятности оценки, а также для смещения (систематической ошибки) и рассеяния (среднего квадрата ошибки) оценки при наличии замираний. Исследовано влияние глубины замираний на эффективность оценки фазы радиосигнала.

Ключевые слова: узкополосный радиосигнал, фаза, оценка максимального правдоподобия, быстрые райсовские замирания, плотность вероятности оценки, смещение, рассеяние оценки.

Abstract: the estimation of phase of faded narrowband radiosignal at a white noise background is considered. The amplitude and phase of faded component of signal have Reley and uniform distributions accordingly, that corresponds to Rice fading. The time of correlation of the fading is much more than signal duration, that is the fadings of signal are rapid. The analytical expressions for density of probability, bias (mean error) and variance (root-mean-square error) of phase estimation are obtained at presence of the fadings. The influence of the fading's depth on estimation efficiency is investigated.

Key words: narrowband signal, phase, maximum likelihood estimation, rapid Rice fading, density of probability, bias, variance of estimation.

ВВЕДЕНИЕ

Задача измерения (оценки) фазы радиосигналов, принимаемых на фоне помех, находит широкое применение в радиосвязи, радионавигации, и в других приложениях радиофизики. В частности, оценка фазы радиосигнала необходима при приеме сигналов с фазовой модуляцией или манипуляцией, при реализации методов когерентного приема радиосигналов и др. Задача оценки фазы узкополосного радиосигнала, наблюдаемого на фоне белого шума, является хорошо изученной при отсутствии замираний сигнала. Ее решение освещается во многих монографиях и учебных пособиях по методам помехоустойчивого приема сигналов [1, 2, и др.].

В реальных каналах телекоммуникаций часто наблюдаются замирания сигналов, которые существенно ухудшают помехоустойчивость радиоприема. Замирания представляют собой случайные изменения амплитуды принимаемых сигналов и обусловлены случайными изменениями напряженности электромагнитного поля в точке приема. Замирания сопро-

вождаются случайными изменениями фазы принимаемых сигналов. Поэтому сигнал, искаженный замираниями, можно рассматривать как результат стохастической амплитудной и фазовой модуляции неискаженного сигнала, при котором амплитуда и фаза модулированного сигнала являются случайными процессами.

Наиболее частой причиной замираний является многолучевость в канале связи, когда сигнал распространяется между передатчиком и приемником параллельно по нескольким путям распространения (лучам). При этом физические длины пути вдоль каждого луча различны и независимо меняются с течением времени по случайному закону. Поэтому различны и независимо меняются времена задержки (фазы) элементарных сигналов, пришедших на вход приемника вдоль разных путей распространения. В результате сложения (интерференции) таких элементарных сигналов на входе приемника, амплитуда и фаза результирующего сигнала будет изменяться с течением времени по случайному закону. Другой причиной замираний являются случайные изменения

(флуктуации) коэффициента передачи канала связи вследствие турбулентности или из-за изменения физических характеристик среды распространения сигналов.

На практике замирания сигналов встречаются в радиоканалах с ионосферной волной — в каналах с отражением от слоев ионосферы, с ионосферным рассеянием или с отражением от следов метеоров. Наблюдаются замирания в радиоканалах с тропосферным рассеянием, в локационных и связных каналах с отражением от геометрически сложных объектов с множеством «блестящих точек», в некоторых каналах с прямой волной, например, в каналах подвижной радиосвязи при наличии переотражений от объектов в окрестности приемника. Возможны замирания в открытых оптических и в гидроакустических каналах локации и связи.

Замирания являются вредным явлением, так как приводят к случайным искажениям формы сигналов, что в конечном счете ухудшает помехоустойчивость приема сигналов. Поэтому учет влияния замираний является важным при анализе эффективности любой телекоммуникационной системы.

В настоящее время хорошо исследован случай медленных замираний [1, 3 и др.], когда время корреляции случайных процессов, описывающих амплитудные и фазовые флуктуации замирающего сигнала, значительно больше длительности сигнала (длительности интервала обработки сигнала). В этом случае сигнал приобретает лишь случайные амплитуду и фазу, не меняющиеся в пределах длительности сигнала. В данной работе рассмотрен случай быстрых замираний, исследованный еще недостаточно. Здесь время корреляции амплитудных и фазовых флуктуаций сигнала значительно меньше длительности сигнала, так что амплитуда и фаза сигнала быстро меняются с течением времени.

Далее исследовано влияние быстрых замираний на характеристики оценки фазы радиосигнала.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ФАЗЫ

Модель сигнала. На практике радиосигнал, искаженный замираниями, можно рассматривать как двухкомпонентный сигнал, представляющий собой сумму двух составляющих:

$$s(t) = s_0(t) + \xi(t), \quad t \in [0; T], \quad (1)$$

где $s_0(t)$ — неискаженная замираниями компонента сигнала, $\xi(t)$ — искаженная замираниями (замирающая) компонента, $[0; T]$ — интервал наблюдения сигнала.

Пусть неискаженная компонента $s_0(t)$ представляет собой радиосигнал

$$s_0(t) = a_0 \cos(\nu_0 t + \varphi_0), \quad t \in [0; T] \quad (2)$$

с постоянной амплитудой $a_0 \geq 0$, с частотой ν_0 и с неизвестной начальной фазой φ_0 , принимающей значения из интервала $[-\pi; \pi]$. Считаем, что длительность сигнала T много больше периода $T_0 = 2\pi/\nu_0$ несущей этого сигнала, т.е.

$$\eta_0 = T / T_0 = T\nu_0 / 2\pi \gg 1. \quad (3)$$

Следовательно, компонента $s_0(t)$ (2) сигнала (1) является *узкополосной*.

Компоненту $\xi(t)$ сигнала (1), искаженную замираниями, можно представить как радиосигнал с той же частотой ν_0 , но со случайными амплитудной и фазовой модуляцией [1, 4 и др.], т.е.

$$\xi(t) = a(t) \cos[\nu_0 t + \varphi(t)], \quad t \in [0; T]. \quad (4)$$

Здесь амплитудная и фазовая модуляция описываются стационарными случайными процессами $a(t)$ и $\varphi(t)$ соответственно. Считаем, что реализации случайных процессов $a(t)$ и $\varphi(t)$ мало меняются за период несущей T_0 , так что время корреляции этих процессов значительно больше периода несущей. Тогда время корреляции τ_k замирающей компоненты $\xi(t)$ также много больше периода T_0 , т.е.

$$\theta_0 = \tau_k / T_0 \gg 1. \quad (5)$$

Следовательно, замирающая компонента $\xi(t)$ сигнала (1) также является *узкополосным* случайным процессом. С другой стороны, считаем, что замирания сигнала (1) являются *быстрыми*. Это значит, что время корреляции τ_k случайного процесса $\xi(t)$ значительно меньше длительности T сигнала, т.е.

$$\mu_0 = T / \tau_k \gg 1. \quad (6)$$

Статистические свойства замираний.

На практике амплитуда $a(t)$ замирающей компоненты $\xi(t)$ часто имеет релеевское распределение вероятностей, а амплитуда всего замирающего сигнала (1) — райсовское распределение [5, 6]. При этом фаза $\varphi(t)$ замирающей компоненты $\xi(t)$ имеет равномерное распределение вероятностей [5, 6] в интервале $[-\pi; \pi]$.

Это обусловлено особенностями формирования замираний в каналах телекоммуникаций [3, 4 и др.]. Тогда замирающая компонента $\xi(t)$ (4), в силу условия узкополосности (5), является стационарным гауссовским случайным процессом [5, 6].

В силу гауссовости замирающей компоненты $\xi(t)$, для ее полного статистического описания достаточно задать математическое ожидание (МО) $m(t) = \langle \xi(t) \rangle$ и корреляционную функцию (КФ) $B(t_1 - t_2) = \langle [\xi(t_1) - m(t_1)][\xi(t_2) - m(t_2)] \rangle$ [5, 6]. Здесь $\langle \rangle$ обозначает усреднение по реализациям случайного процесса при фиксированных статистических характеристиках процесса. Вместо КФ $B(t)$ замирающей компоненты удобно рассматривать ее спектральную плотность $G(\omega)$, однозначно связанную с КФ преобразованием Фурье [5, 6].

При равномерном распределении случайного процесса $\varphi(t)$ получаем [5], что МО замирающей компоненты $\xi(t)$ равно $m(t) = 0$. Спектральную плотность $G(\omega)$ замирающей компоненты $\xi(t)$, удобно представить в виде [7]

$$G(\omega) = \frac{\gamma_0}{2} \left\{ g\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega_0}\right) + g\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\Omega_0}\right) \right\}, \quad (7)$$

где $\gamma_0 = 2 \max G(\omega)$ — интенсивность, ν_0 — центральная частота,

$$\Omega_0 = \int_0^\infty G^2(\omega) d\omega / \max G^2(\omega)$$

— эквивалентная ширина полосы частот замирающей компоненты, а функция $g(x) \geq 0$ описывает форму спектральной плотности (7) и нормирована так, что

$$\max g(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^\infty g^2(x) dx = 1. \quad (8)$$

При этом время корреляции замирающей компоненты равно $\tau_k = 2\pi/\Omega_0$. Тогда условие (5) узкополосности замирающей компоненты можно записать как

$$\nu_0 \gg \Omega_0, \quad (9)$$

а условие (6) быстроты замираний принимает вид

$$\mu_0 = T\Omega_0 / 2\pi \gg 1. \quad (10)$$

Модель помехи и наблюдаемых данных. Пусть сигнал (1) наблюдается на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 [5, 6]. Считаем, что сигнал $s(t)$ (1) и шум $n(t)$ ста-

тистически независимы, что на практике выполняется. Белый шум является стационарным случайным процессом с МО $m_N(t) = \langle n(t) \rangle = 0$ и КФ $B_N(t_1 - t_2) = \langle n(t_1) n(t_2) \rangle = (N_0/2) \delta(t_2 - t_1)$, где $\delta(t)$ — “дельта” — функция [5]. Белый шум является адекватной моделью широкополосных флуктуационных шумов, в том числе внутренних тепловых шумов радиоприемных устройств [5]. При этом необходимо, чтобы ширина полосы частот реального шума превосходила ширину полосы пропускания радиоприемного устройства, а спектральная плотность (мощность) шума была бы постоянна в пределах полосы пропускания приемника.

Таким образом, обработке доступна реализация наблюдаемых данных $x(t)$, представляющая сумму сигнала (1) и шума:

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad t \in [0; T]. \quad (11)$$

Задача оценки фазы сигнала. На основе обработки принимаемой реализации $x(t)$ (11), с учетом имеющейся априорной информации о свойствах сигнала и шума, необходимо оценить (измерить) фазу φ_0 неискаженной составляющей $s_0(t)$ принимаемого сигнала $s(t)$.

2. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ФАЗЫ

Метод оценки. Для оценки фазы φ_0 воспользуемся методом максимального правдоподобия (МП) [1, 2]. Согласно методу МП по наблюдаемой реализации $x(t)$ (11) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) $L(\varphi)$ как функцию возможных значений φ неизвестной фазы φ_0 из интервала $[-\pi; \pi]$. Тогда оценка максимального правдоподобия (ОМП) φ_m неизвестной фазы φ_0 определяется как положение абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОР $L(\varphi)$ на интервале $\varphi \in [-\pi; \pi]$, т.е.

$$\varphi_m = \arg \sup_{\varphi \in [-\pi; \pi]} L(\varphi). \quad (12)$$

Логарифм функционала отношения правдоподобия. Учтем, что сигнал $s(t)$ (1) и шум $n(t)$ являются статистически независимыми гауссовскими случайными процессами. Тогда принимаемая смесь $x(t)$ (11) сигнала и шума также является гауссовским случайным процессом [5, 6]. Выражения для логарифма ФОР гауссовских случайных процессов получены в ряде работ. В частности, в [8] приведено общее выражение логарифма ФОР L для суммы статистически независимых гауссовско-

го случайного процесса $s(t)$ и гауссовского белого шума $n(t)$. Пусть $m_s(t)$ и $B_s(t_1, t_2)$ — МО и КФ гауссовского случайного процесса (сигнала) $s(t)$, а N_0 — односторонняя спектральная плотность белого шума $n(t)$. Тогда, согласно [8]

$$L = \int_0^T x(t)V(t)dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1)x(t_2)\Theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - E_0 - E, \quad (13)$$

где E_0 и E не зависят от реализации наблюдаемых данных $x(t)$ и определяются как

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_0^T m_s(t)V(t)dt, \quad E = \frac{1}{2} \int_0^1 d\chi \int_0^T Q(t, t, \chi)dt. \quad (14)$$

Здесь функция $Q(t_1, t_2, \chi)$ является решением интегрального уравнения

$$\frac{N_0}{2} Q(t_1, t_2, \chi) + \chi \int_0^T Q(t_1, t, \chi) B_s(t, t_2) dt = B_s(t_1, t_2), \quad (15)$$

$\Theta(t_1, t_2) = Q(t_1, t_2, 1)$, а функция $V(t)$ определяется как

$$V(t) = \frac{2}{N_0} \left[m_s(t) - \int_0^T m_s(u) \Theta(t, u) du \right]. \quad (16)$$

Конкретизируем общее выражение (13) в случае приема замирающего сигнала $s(t)$ (1) на фоне белого шума $n(t)$. Здесь МО $m_s(t) = \langle s(t) \rangle$ сигнала (1) совпадает с неискаженной компонентой $s_0(t)$ (2), а КФ $B_s(t_1, t_2) = \langle [s(t_1) - m_s(t_1)] \times [s(t_2) - m_s(t_2)] \rangle$ сигнала (1) совпадает с корреляционной функцией $B(t_1 - t_2)$ замирающей компоненты $\xi(t)$. Решение уравнения (15) при $B_s(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2)$ и выполнении (10) найдено в [7, 9] и равно

$$Q(t_1, t_2, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) \exp[-j\omega(t_2 - t_1)]}{\pi [N_0 + 2\chi G(\omega)]} d\omega. \quad (17)$$

Используя (17), получаем, что [7]

$$E = \frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2G(\omega)}{N_0} \right] d\omega, \quad (18)$$

а второе слагаемое логарифма ФОП (13) можно представить в виде [7, 9]:

$$L_0[x(t)] = \frac{q_0}{N_0} \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(u) h(t-u) du \right]^2 dt, \quad (19)$$

где $q_0 = \gamma_0 / N_0$ — отношение интенсивности замирающей компоненты (4) сигнала (1) к спектральной мощности аддитивного шума $n(t)$, а $h(t)$ — функция, спектр $H(\omega)$ которой удовлетворяет условию

$$|H(\omega)|^2 = \frac{2G(\omega) / \gamma_0}{1 + 2G(\omega) / N_0}. \quad (20)$$

Используя (17) при выполнении (10), аналогично [7, 9], находим

$$V(t) = \frac{2a_0}{N_0[1 + q_0 g(0)]} \cos(v_0 t + \varphi_0). \quad (21)$$

Подставляя (21) в (14), при выполнении условия (3) получаем

$$E_0 = \frac{a_0^2 T}{2 N_0 [1 + q_0 g(0)]}. \quad (22)$$

Таким образом, логарифм ФОП (13) при приеме замирающего сигнала (1) на фоне белого шума $n(t)$ можно представить в виде:

$$L(\varphi_0) = \frac{2a_0}{N_0[1 + q_0 g(0)]} \int_0^T x(t) \cos(v_0 t + \varphi_0) dt + L_0[x(t)] - E_0 - E, \quad (23)$$

где функционал $L_0[x(t)]$ определяется из (19), (20), а E и E_0 — из (18) и (22).

Алгоритм оценки. Подставляя (23) в (12) и учитывая, что $a_0 \geq 0$, получаем, что ОМП φ_m (12) фазы φ_0 можно представить в виде

$$\varphi_m = \arg \sup_{\varphi \in [-\pi; \pi]} M_0(\varphi), \quad (24)$$

где

$$M_0(\varphi) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(v_0 t + \varphi) dt \quad (25)$$

— составляющая логарифма ФОП (23), зависящая от наблюдаемых данных $x(t)$ и фазы φ сигнала. Явное выражение для ОМП φ_m (24) можно найти из решения системы правдоподобия [1, 2 и др.]

$$\left. \frac{dM_0(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_m} = 0, \quad \left. \frac{d^2 M_0(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_m} < 0. \quad (26)$$

Ведем в рассмотрение квадратурные составляющие функционала (25)

$$M_C = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(v_0 t) dt, \quad M_S = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(v_0 t) dt. \quad (27)$$

Тогда решение системы правдоподобия (26) имеет вид

$$\varphi_m = -\arctg\left(\frac{M_s}{M_c}\right) + \begin{cases} 0, & \text{при } M_c \geq 0; \\ (-\pi), & \text{при } M_c < 0, M_s \geq 0; \\ \pi, & \text{при } M_c < 0, M_s < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Отметим, что алгоритм (28) ОМП фазы φ_0 неискаженной составляющей замирающего сигнала (1) совпадает с соответствующим алгоритмом оценки фазы сигнала при отсутствии замираний [1, 2 и др.]. При этом, вследствие быстроты замираний, в замирающей компоненте принимаемого сигнала отсутствует информация о фазе передаваемого сигнала. Однако характеристики ОМП (28) при наличии и при отсутствии замираний будут существенно отличаться. Отметим также, что алгоритм (28) не требует априорной информации о значении $a_0 \geq 0$ амплитуды принимаемого сигнала. Поэтому ОМП (28) можно использовать как при известной, так и при неизвестной амплитуде сигнала.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ ФАЗЫ

Статистические характеристики квадратурных составляющих.

Рассмотрим вначале характеристики функционалов M_c и M_s (27). Учтем, что принимаемая смесь $x(t)$ (11) сигнала и шума является гауссовским случайным процессом. Тогда квадратурные составляющие M_c и M_s (27) являются гауссовскими случайными величинами [5, 6]. Известно, что для статистического описания гауссовских случайных величин достаточно определить их математические ожидания (МО), дисперсии и коэффициент взаимной корреляции [5, 6].

При выполнении (3) математические ожидания $m_c = \langle M_c \rangle$ и $m_s = \langle M_s \rangle$ квадратурных составляющих M_c и M_s (27) с точностью до величин порядка $\Delta_m = a_0 \Delta_0$, где $\Delta_0 = 1/2\pi\eta_0 \ll 1$, определяются как

$$m_c = a_0 \cos(\varphi_0), \quad m_s = -a_0 \sin(\varphi_0). \quad (29)$$

Пренебрежение величинами порядка Δ_m в (29) приводит к погрешности рассчитанного значения смещения ОМП, не превосходящей $\Delta_0 = 1/v_0 T$. Поскольку $1/v_0 T \ll 1$ при выпол-

нении (3), то такой систематической ошибкой Δ_0 можно пренебречь.

При выполнении (3), (10) дисперсии $\sigma_c^2 = \langle [M_c - m_c]^2 \rangle$ и $\sigma_s^2 = \langle [M_s - m_s]^2 \rangle$ квадратурных составляющих M_c и M_s одинаковы и равны

$$\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \frac{N_0}{T} [1 + q_0 g(0)] = \sigma^2, \quad (30)$$

а коэффициент корреляции $R_{cs} = \langle [M_c - m_c] \times [M_s - m_s] \rangle$ случайных величин M_c и M_s удовлетворяет условию $R_{cs} \ll \sigma^2$. Тогда случайные величины M_c и M_s (27) при выполнении (3), (10) можно считать некоррелированными, а в силу гауссовости этих величин — также и статистически независимыми.

Плотность вероятности оценки фазы. Указанные выше свойства квадратурных составляющих M_c и M_s (27) позволяют, аналогично [2, 5, 6], записать плотность вероятности ОМП φ_m (28). Оценку фазы φ_m (28), следуя [5, 6], можно интерпретировать как угол φ между осью ОХ декартовой системы координат ХОУ и вектором $\mathbf{J}$, выходящим из начала этой системы координат, причем проекции этого вектора на оси ОХ и ОУ равны M_c и $(-M_s)$ соответственно. Положительному значению угла φ соответствует поворот от оси ОХ к вектору $\mathbf{J}$ против часовой стрелки, а отрицательному значению угла — по часовой стрелке. При этом проекции M_c и $(-M_s)$ вектора $\mathbf{J}$ на оси ОХ и ОУ являются статистически независимыми гауссовскими случайными величинами с МО m_c и $(-m_s)$ (29) соответственно, а также с одинаковыми дисперсиями σ^2 (30). Плотность вероятности $W(\varphi)$ фазы φ такого случайного вектора $\mathbf{J}$ известна и может быть представлена в виде [5, 6 и др.]

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{m \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \Phi\left(\frac{m \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sigma}\right) \exp\left[-\frac{m^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{2\sigma^2}\right], \\ \text{при } |\varphi - \varphi_0| \leq \pi, \\ \text{где } m = \sqrt{m_c^2 + m_s^2}, \text{ а } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

— интеграл вероятности.

Подставляя сюда выражения (29), (30) для МО m_c , m_s и дисперсии σ^2 , получаем условную (при фиксированной фазе φ_0) плотность вероятности ОМП (28):

$$W(\varphi_m | \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) + \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \cos(\varphi_m - \varphi_0) \times \exp\left[-\frac{z^2}{2} \sin^2(\varphi_m - \varphi_0)\right] \Phi\left[z \cos(\varphi_m - \varphi_0)\right], \quad (31)$$

при $|\varphi - \varphi_0| \leq \pi$. Здесь

$$z = \frac{m}{\sigma} = \frac{z_0}{\sqrt{1 + q_0 g(0)}}, \quad (32)$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) для алгоритма оценки (28), а

$$z_0^2 = a_0^2 T / N_0 \quad (33)$$

— отношение энергии неискаженной составляющей (2) сигнала (1) к спектральной мощности аддитивного шума $n(t)$. Напомним, что формула (31) получена в пренебрежении систематическими ошибками измерения фазы сигнала порядка $\Delta_0 = 1/v_0 T$, причем $\Delta_0 \ll 1$ при выполнении (3).

Анализ распределения (31) показывает, что при больших ОСШ z (32) оценки φ_m (28) группируются в окрестности истинного значения φ_0 фазы принимаемого сигнала. При этом с увеличением ОСШ z величина этой окрестности уменьшается, а при $z \rightarrow \infty$ оценка $\varphi_m \rightarrow \varphi_0$ в среднеквадратическом. Поэтому при больших ОСШ z можно использовать аппроксимацию распределения (31) в малой окрестности точки $\varphi = \varphi_0$, приведенную, например, в [6]:

$$W(\varphi_m | \varphi_0) \approx \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2} (\varphi_m - \varphi_0)^2\right]. \quad (34)$$

Точность выражения (34) возрастает с увеличением ОСШ z . Отметим, что ОСШ z (32) велико при больших z_0 (33), когда q_0 не слишком велико.

Распределение (31) ОМП (28) не является гауссовским. Однако асимптотически точное (с ростом ОСШ z) распределение (34) является гауссовским. Таким образом, ОМП φ_m (28) фазы φ_0 является асимптотически гауссовской (с ростом ОСШ z) случайной величиной.

Если замирания сигнала отсутствуют, то в (32) следует положить $q_0 = 0$. Тогда $z = z_0$ и распределения (31), (34) совпадают с известными распределениями ОМП фазы радиосигнала, неискаженного замираниями [2, 6 и др.].

Смещение и рассеяние оценки фазы.

Распределения (31), (34) являются симметричными относительно значения $\varphi = \varphi_0$. Поэтому смещение оценки (систематическая ошибка) $b_\varphi = \langle \varphi_m - \varphi_0 \rangle$, соответствующее этим распределениям, будет равно 0. Формулы (31), (34) получены в пренебрежении систематическими ошибками измерения фазы порядка $\Delta_0 = 1/v_0 T$. Поэтому, строго говоря, смещение b_φ ограничено по модулю величиной Δ_0 . Так как при выполнении (3) имеем $\Delta_0 \ll 1$, то таким смещением оценки можно пренебречь.

Используя плотность вероятности (31), можно рассчитать рассеяние (средний квадрат ошибки) $V_\varphi = \langle (\varphi_m - \varphi_0)^2 \rangle$ оценки φ_m (28) по формуле

$$V_\varphi = \int_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi_0 + \pi} (\varphi - \varphi_0)^2 W(\varphi | \varphi_0) d\varphi. \quad (35)$$

Расчет по формуле (35) возможен только численными методами, что не всегда удобно при теоретическом анализе. Используя (34), можно записать более простое выражение для рассеяния оценки (28), асимптотически точное с ростом ОСШ z (32). Так как распределение (34) является гауссовским с МО φ_0 и с дисперсией $1/z^2$, то соответствующее выражение для рассеяния оценки имеет вид:

$$V_\varphi \approx 1/z^2. \quad (36)$$

Точность выражения (36) возрастает с увеличением ОСШ z (32).

На рис. 1 показаны зависимости рассеяния V_φ оценки (28) от ОСШ z . Сплошная линия, рассчитана по точной формуле (35) с использованием распределения (31), а штрих-пунктирная — по асимптотически точной формуле (36). Из рис. 1 видно, что более простая, но приближенная, формула (36) хорошо аппроксимирует точную зависимость (35) уже при $z \geq 2..3$, причем погрешность такой аппроксимации уменьшается с увеличением ОСШ z . Однако, при $z < 0.5..1$ точность приближенной формулы (36) оказывается неудовлетворительной. При $z \rightarrow 0$, согласно (31), (35), рассеяние оценки фазы $V_\varphi \rightarrow \pi^2/3$, в то время как из (36) получаем, что $V_\varphi \rightarrow \infty$.

4. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОЦЕНКИ ФАЗЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАМИРАНИЙ РАДИОСИГНАЛА

Как отмечалось выше, при выполнении условия (3) смещение (систематическая ошиб-

ка) $b_\varphi = \langle \varphi_m - \varphi_0 \rangle$ оценки φ_m пренебрежимо мало. Рассмотрим влияние интенсивности замираний сигнала на рассеяние (средний квадрат ошибки) $V_\varphi = \langle (\varphi_m - \varphi_0)^2 \rangle$ оценки φ_m (28).

Обозначим соответственно

$$E_S = \int_0^T \langle s^2(t) \rangle dt, \quad E_0 = \int_0^T \langle s_0^2(t) \rangle dt, \quad E_\xi = \int_0^T \langle \xi^2(t) \rangle dt$$

— средняя энергия принимаемого сигнала $s(t)$ (1), энергия неискаженной компоненты $s_0(t)$ (2) и средняя энергия замирающей компоненты $\xi(t)$ (4) сигнала (1), причем $E_S = E_0 + E_\xi$. При выполнении (3), (10) получаем

$$E_0 = a_0^2 T / 2, \quad E_\xi = \gamma_0 \mu_0 \rho_0, \\ E_S = a_0^2 T / 2 + \gamma_0 \mu_0 \rho_0, \quad (37)$$

где $\rho_0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$, а $\mu_0 = T \Omega_0 / 2\pi$.

Введем отношение средней энергии E_S сигнала (1) к односторонней спектральной плотности N_0 аддитивного шума :

$$\eta = E_S / N_0 = \mu_0 q_0 \rho_0 + z_0^2 / 2. \quad (38)$$

Введем также отношение средней энергии E_ξ замирающей компоненты (4) сигнала (1) к средней энергии E_S всего сигнала (1):

$$\varepsilon = E_\xi / E_S = [1 + z_0^2 / (2\mu_0 q_0 \rho_0)]^{-1}, \quad (39)$$

которое характеризует глубину замираний. Параметр ε (39) может принимать значения из интервала $[0; 1]$, причем $\varepsilon = 0$ при отсутствии замираний, а $\varepsilon = 1$ при наибольшей глубине

замираний, когда неискаженная составляющая сигнала отсутствует. Из (38), (39) следует, что

$$z_0^2 = 2\eta(1 - \varepsilon), \quad q_0 = \eta \varepsilon / \mu_0 \rho_0. \quad (40)$$

На рис. 2 показаны зависимости ОСШ z (32) от глубины замираний ε (39) при фиксированной средней энергии сигнала E_S (фиксированном η (38)). На рис. 3 приведены соответствующие зависимости рассеяния V_φ (35) оценки фазы, рассчитанные с использованием распределения (31). Кривые на рис. 2, 3 получены при $\mu_0 = 200$ для случая прямоугольной спектральной плотности замираний $g(x) = I(x)$, когда $g(0) = 1$ и $\rho_0 = 1$. Кривая 1 соответствует $\eta = 2$, кривая 2

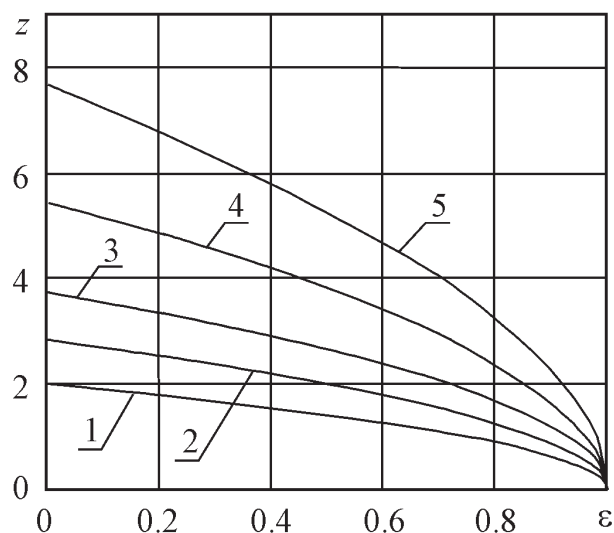


Рис. 2. Отношение сигнал / шум при различной глубине замираний

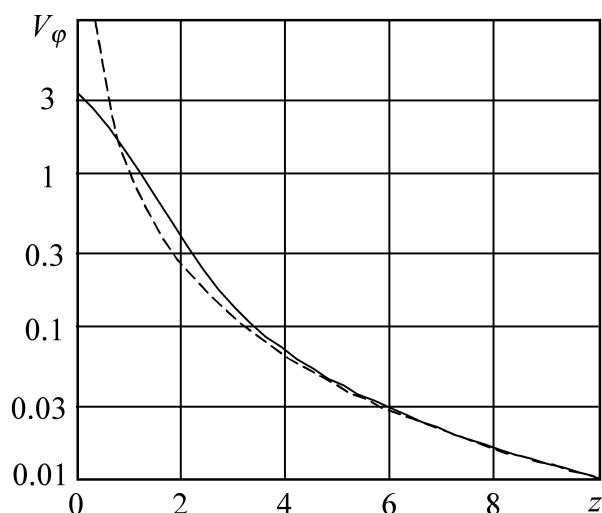


Рис. 1. Сравнение различных выражений для рассеяния оценки фазы

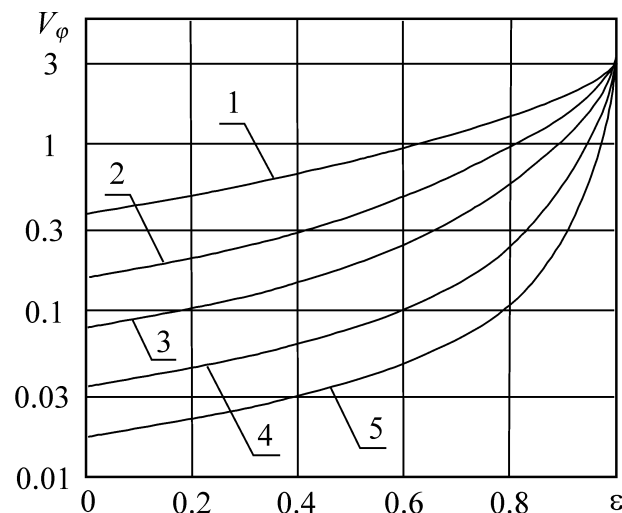


Рис. 3. Рассеяние оценки фазы при различной глубине замираний

— $\eta = 4$, кривая 3 — $\eta = 7$, кривая 4 — $\eta = 15$, а кривая 5 — $\eta = 30$. Из рис. 2, 3 видно, что с ростом глубины замираний ε уменьшается ОСШ z и возрастает рассеяние V_ϕ оценки фазы, так что точность ОМП фазы (28) ухудшается. Чем больше средняя энергия E_s замирающего сигнала (отношение η), тем сильнее влияют замирания на характеристики оценки фазы.

Отметим, что вследствие быстроты замираний, отсутствует информация о фазе ϕ_0 в замирающей компоненте (4) принимаемого сигнала (1). Это не позволяет использовать замирающую компоненту сигнала для уточнения оценки (28) фазы ϕ_0 . Здесь замирающая компонента сигнала выступает в качестве аддитивной помехи. Скомпенсировать ухудшение точности ОМП (28) из-за наличия замираний можно, если увеличить мощность (амплитуду) передаваемого сигнала, а также длительность T сигнала (длительность интервала обработки сигнала). При этом возрастает отношение $\eta = E_s / N_0$ средней энергии E_s принимаемого сигнала (1) к спектральной мощности N_0 аддитивного шума, что (как видно из рис. 3) приводит к уменьшению рассеяния оценки фазы. Другой мерой борьбы с замираниями является применение пространственной селекции неискаженной составляющей сигнала (например, использование антифединговых антенн). Это позволяет уменьшить интенсивность γ_0 замирающей компоненты (4) принимаемого сигнала (т.е. уменьшить отношение $q_0 = \gamma_0 / N_0$), что приводит к увеличению ОСШ z (32) и к уменьшению рассеяния V_ϕ ОМП фазы (28).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в работе аналитические выражения (31), (34), (35), (36) для характеристик

ОМП (28) дают возможность оценить влияние быстрых замираний на точность оценки фазы ϕ_0 неискаженной составляющей сигнала (1). Это позволяет сделать обоснованный вывод о целесообразности применения алгоритма оценки (28) и дополнительных мер по уменьшению замираний, в зависимости от глубины замираний и от требований к точности измерения фазы принимаемого сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.
2. Куликов Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
3. Теория электрической связи / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В. И. Коржик, В. М. Назаров; под ред Д. Д. Кловского. — М.: Радио и связь, 1999. — 432 с.
4. Феер К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра / К. Феер. — М.: Радио и связь, 2000. — 520 с.
5. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
6. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.
7. Трифонов А. П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, Е. П. Нечаев, В. И. Парфенов. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. — 246 с.
8. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции / Г. Ван Трис. — М.: Сов радио, 1977. — Т. 3. — 644 с.
9. Трифонов А. П. Прием сигнала с неизвестной задержкой при наличии модулирующей помехи / А. П. Трифонов, А. В. Захаров // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 1986. — Т. 29, № 4. — С. 36—41.

Захаров А. В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики, Воронежский государственный университет
E-mail: zakharov@phys.vsu.ru
Тел.: (4732) 208-916

Zakharov A. V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor of the Chair of Radiophysics, Voronezh State University
E-mail: zakharov@phys.vsu.ru
Tel.: (4732) 208-916