УДК 621.3.015.4

ПРОБЛЕМА СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА

В. В. Белоглазов, Н. Д. Бирюк, В. В. Юргелас

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.10.2010 г.

Аннотация. Анализ вынужденных процессов параметрических и нелинейных колебательных систем связан с большими трудностями. Часто он приводится к решению бесконечных систем алгебраических уравнений. Удобный для прикладников приближенный метод решения таких систем — метод редукции. Однако, его можно применять только тогда, когда бесконечная система уравнений сходится. Проблема сходимости бесконечных систем уравнений рассмотрена на примере анализа вынужденных колебаний последовательного параметрического контура.
Ключевые слова: параметрический контур, вынужденные колебания, бесконечные системы уравнений, метод редукции, сходимость

Abstract. Analysis forced processes into time varying and nonlinear oscillatory system is vary difficult. Often it reduced to solution of infinite algebraic equation system. Convenient for user approximating method of solution of this systems is reduction method. But it mays be used only at that time when infinite equation system agrees. Agreeing problem is considered as an example for analysis forced oscillations into series time varying circuit.
Key words: time varying circuit, forced oscillation, infinite system of equations, method of reduction, convergence.

Рассмотрим последовательный параметрический контур, схема которого представлена на рис. 1:

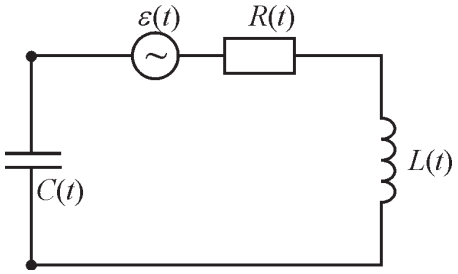

Рис. 1. Последовательный параметрический контур

Предполагается, что элементы контура являются положительными и изменяются во времени периодически с одним и тем же периодом, т. е. $C(t) = C(t+T)$, $R(t) = R(t+T)$, $L(t) = L(t+T)$, контур возмущается гармонической э.д.с $\varepsilon(t) = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \alpha)$. Ниже используется круговая частота изменения элементов контура $\Omega = 2\pi / T$.

© Белоглазов В. В., Бирюк Н. Д., Юргелас В. В., 2010

Задача анализа в такой постановке является весьма сложной и слишком общей. В радиоэлектронике обычно конкретизируют эту задачу, задавая функции времени изменения элементов контура двумя способами:

$$P(t) = P_0[1 + m_p \cos(\Omega t + \phi_p)] \quad (1)$$

или

$$P(t) = \frac{P_0}{1 + m_p \cos(\Omega t + \phi_p)}. \quad (2)$$

Здесь P — обобщенное обозначение элементов контура, вместо которого следует подставлять C, R или L. Считается, что $m_p < 1$. Несмотря на конкретизацию, в процессе анализа обнаруживаются особенности, важные для качественной задачи анализа в общей постановке. Комбинируя функции (1) и (2), можно получить несколько вариантов задачи анализа, принципиально равноправных, но с различной трудоемкостью промежуточных преобразова-

ний. Выбираем для определенности вариант, в котором индуктивность и сопротивление изменяются во времени по функции (1), а емкость — по функции (2), т. е.

$$L = L_0[1 + m_L \cos(\Omega t + \phi_L)],$$
$$R = R_0[1 + m_R \cos(\Omega t + \phi_R)],$$
$$C = \frac{C_0}{1 + m_C \cos(\Omega t + \phi_C)}.$$

Функции процесса в контуре (ток, напряжение, заряд, потокосцепление) могут быть разными, но наиболее удобной из них является ток i, т. к., в отличие от напряжений, ток один и тот же для всех элементов контура. Согласно второму закону Кирхгофа нетрудно составить уравнение контура относительно тока

$$L\frac{di}{dt} + (R + \dot{L})i + 1C\int i\,dt = \varepsilon. \qquad (3)$$

Преобразуем коэффициент при втором слагаемом:

$$R + \dot{L} = R_0[1 + m_R \cos(\Omega t + \phi_R)] - m_L L_0 \Omega \sin(\Omega t + \phi_L) =$$
$$= R_0 + \left[m_R R_0 \cos(\Omega t + \phi_R) + m_L \Omega L_0 \cos\left(\Omega t + \phi_L + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$
$$= R_0 + R_0\left[m_R \cos(\Omega t + \phi_R) + m_L \frac{\Omega L_0}{R_0}\cos\left(\Omega t + \phi_L + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$
$$= R_0[1 + m\cos(\Omega t + \phi)],$$

здесь

$$m = \sqrt{m_R^2 + m_L^2\left(\frac{\Omega L_0}{R_0}\right)^2 + 2m_R m_L \frac{\Omega L_0}{R_0}\sin(\phi_r - \phi_L)},$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{m_R R_0 \sin\phi_R + m_L \Omega L_0 \cos\phi_L}{mRR_0 \cos\phi_r - m_L \Omega L_0 \sin\phi_L}.$$

Теперь с учетом проведенных преобразований представим уравнение (3) в развернутом виде

$$L_0[1 + m_L \cos(\Omega t + \phi_L)]\frac{di}{dt} +$$
$$+R_0[1 + m\cos(\Omega t + \phi)]i + \qquad (4)$$
$$+\frac{1 + m_C \cos(\Omega t + \phi_C)}{C_0}\int i\,dt = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \alpha).$$

Для анализа этого уравнения воспользуемся весьма популярным в радиоэлектронике и электротехнике [1] методом комплексных амплитуд. Основная идея метода заключается в том, что применяется неэквивалентное преобразование уравнения, в котором косинусоидальные функции времени заменяются экспонентами с мнимыми показателями. В основе метода лежит не равенство, а соответствие, например,

$$\varepsilon(t) = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \alpha) \leftarrow \hat{\varepsilon} =$$
$$= \mathcal{E}_m e^{j(\omega t + \alpha)} = \mathcal{E}_m e^{jt} e^{j\omega t} = \dot{\mathcal{E}} e^{j\omega t}.$$

При этом используется следующая терминология: функция времени, расположенная слева от стрелки, называется оригиналом; стрелка острием к оригиналу означает соответствие, $\hat{\varepsilon}$ называется изображением, $\mathcal{E}_m$ — амплитудой, $\dot{\mathcal{E}}_m = \mathcal{E}_m e^{j\alpha}$ — комплексной амплитудой. Ценность метода применительно к (4) заключается в том, что изображение тока $\hat{i}$ найти легче, чем ток i, а ток по своему изображению находится согласно выражению $i = \operatorname{Re}\hat{i}$, где оператор Re означает взятие действительной части комплекснозначной функции времени.

Итак, имеем уравнение для оригинала $i(t)$, по нему нужно составить соответствующее уравнение для изображения $\hat{i}$ Для этого целесообразно преобразовать уравнение (4) к более подходящему виду:

$$\left(\frac{\dot{m}_L}{2}L_0 e^{j\Omega t} + L_0 + \frac{\dot{m}_L}{2}L_0 e^{-j\Omega t}\right)\frac{di}{dt} +$$
$$+\left(\frac{\dot{m}_R}{2}R_0 e^{j\Omega t} + R_0 + \frac{\dot{m}_R}{2}R_0 e^{-j\Omega t}\right)i + \qquad (5)$$
$$+\left(\frac{\dot{m}_C L}{2}\frac{1}{C_0}e^{j\Omega t} + \frac{1}{C_0} + \frac{\dot{m}_C}{2}\frac{1}{C_0}e^{-j\Omega t}\right)\int i\,dt =$$
$$= \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \alpha).$$

По этому уравнению для оригинала $i(t)$ легко составить уравнение для изображения $\hat{i}$:

$$\left(\frac{\dot{m}_L}{2}L_0 e^{j\Omega t} + L_0 + \frac{\dot{m}_L}{2}L_0 e^{-j\Omega t}\right)d\hat{i}dt +$$
$$+\left(\frac{\dot{m}_R}{2}R_0 e^{j\Omega t} + R_0 + \frac{\dot{m}_R}{2}R_0 e^{-j\Omega t}\right)\hat{i} + \qquad (6)$$
$$+\left(\frac{\dot{m}_C L}{2}\frac{1}{C_0}e^{j\Omega t} + \frac{1}{C_0} + \frac{\dot{m}_C}{2}\frac{1}{C_0}e^{-j\Omega t}\right)\int \hat{i}\,dt = \dot{\mathcal{E}}_m e^{j\omega t}.$$

Здесь $\dot{m}_L = m_L e^{j\phi_L}$, $\overset{*}{m}_L = m_L e^{-j\phi_L}$, $\dot{m} = me^{j\phi}$, $\overset{*}{m} = me^{-j\phi}$, $\dot{m}_C = m_C e^{j\phi_C}$, $\overset{*}{m}_C = m_L C e^{-j\phi_C}$, $j = \sqrt{-1}$.

Очевидно, уравнение (6) получено из уравнения (5) в результате неэквивалентных преобразований, поскольку $\hat{i} \neq i(t)$.

Для того чтобы развернуть уравнение (6), нужно знать вид решений уравнений (5) и (6). Например, для обычного колебательного контура особую роль играют синусодальные функции времени в том смысле, что если э.д.с. синусоидальна, то все токи и напряжения тоже синусоидальны с тем же периодом. Этим свойством обладает не только контур, но и электрическая цепь с постоянными параметрами любой сложности. Поэтому гармоничность функций процесса таких цепей является их фундаментальным свойством. Кратко его можно выразить так: гармоническое возмущение вызывает гармонический с той же частотой отклик.

Аналогичным свойством обладают и параметрические цепи с периодическими параметрами и с одинаковым периодом. Здесь место синусоиды занимает более сложная функция — функция Хилла. В нашем случае ее более удобно представлять для изображения тока

$$\hat{i} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{I}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \tag{7}$$

а для оригинала (в конечном счете, нас интересует только он) она может быть найдена по изображению:

$$i(t) = \operatorname{Re} \hat{i}. \tag{8}$$

Используя (7), находим

$$\begin{gathered} d\hat{i}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j(\omega + k\Omega)\dot{I}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \\ \int \hat{i}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{I}_k j(\omega + k\Omega) e^{j(\omega+k\Omega)t}. \end{gathered} \tag{9}$$

Если подставить (7) и (9) в (6), то после упорядочивания получим определяющее уравнение

$$\begin{gathered} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\dot{m}}{2} R_0 + j \left\{ \frac{\dot{m}_L}{2} [\omega + (k-1)\Omega] L_0 - \frac{\dot{m}_C}{2} \frac{1}{[\omega + (k-1)\Omega] C_0} \right\} \right) \dot{I}_{k-1} + \right. \\ + \left\{ R_0 + j \left[(\omega + k\Omega) L_0 - \frac{1}{(\omega + k\Omega) C_0} \right] \right\} \dot{I}_k + \\ \left. + \left(\frac{\overset{*}{m}}{2} R_0 + j \left\{ \frac{\overset{*}{m}_L}{2} [\omega + (k+1)\Omega] L_0 - \frac{\overset{*}{m}_C}{2} \frac{1}{[\omega + (k+1)\Omega] C_0} \right\} \right) I_{k+1} \right] \times \\ \times e^{j(\omega+k\Omega)t} = \mathcal{E}_m e^{j\omega t}. \end{gathered}$$

Определяющее уравнение — основа анализа. Для упрощения его записи введем обозначения

$$\begin{gathered} \dot{Z}_{k,k-1} = \frac{\dot{m}}{2} R_0 + j \left\{ \frac{\dot{m}_L}{2} [\omega + (k-1)\Omega] L_0 - \right. \\ \left. - \frac{\dot{m}_C}{2} \frac{1}{[\omega + (k-1)\Omega] C_0} \right\}, \\ \dot{Z}_{k,k} = R_0 + j \left[(\omega + k\Omega) L_0 - \frac{1}{(\omega + k\Omega) C_0} \right], \\ \dot{Z}_{k,k+1} = \frac{\overset{*}{m}}{2} R_0 + j \{ \frac{\overset{*}{m}_L}{2} [\omega + (k+1)\Omega] L_0 - \\ - \frac{\overset{*}{m}_C}{2} \frac{1}{[\omega + (k+1)\Omega] C_0} \}. \end{gathered} \tag{10}$$

Тогда определяющее уравнение в новых обозначениях записывается в виде

$$\begin{gathered} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\dot{Z}_{k,k-1}\dot{I}_{k-1} + \dot{Z}_{k,k}\dot{I}_k + \dot{Z}_{k,k+1}\dot{I}_{k+1}) e^{j(\omega+k\Omega)t} = \\ = \dot{\mathcal{E}}_m e^{j\omega t}. \end{gathered} \tag{11}$$

Выбирая для конкретных k члены с одинаковыми экспоненциальными множителями и сокращая на них, получим бесконечную линейную алгебраическую систему

$$\left. \begin{array}{l} \ldots \\ \dot{Z}_{-2-3}\dot{I}_{-3} + \dot{Z}_{-2-2}\dot{I}_{-2} + \dot{Z}_{-2-1}\dot{I}_{-1} = 0 \\ \dot{Z}_{-1-2}\dot{I}_{-2} + \dot{Z}_{-1-1}\dot{I}_{-1} + \dot{Z}_{-10}\dot{I}_0 = 0 \\ \dot{Z}_{0-1}\dot{I}_{-1} + \dot{Z}_{00}\dot{I}_0 + \dot{Z}_{01}\dot{I}_1 = \dot{E}_m \\ \dot{Z}_{10}\dot{I}_0 + \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}_2 = 0 \\ \dot{Z}_{21}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{22}\dot{I}_2 + \dot{Z}_{23}\dot{I}_3 = 0 \\ \ldots \end{array} \right\} \tag{12}$$

Структура этой бесконечной системы проясняется, если ее представить в векторном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{-2-3} & \dot{Z}_{-2-2} & \dot{Z}_{-2-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_{-1-2} & \dot{Z}_{-1-1} & \dot{Z}_{-10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_{0-1} & \boxed{\dot{Z}_{00}} & \dot{Z}_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{Z}_{10} & \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \dot{Z}_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_{-3} \\ \dot{I}_{-2} \\ \dot{I}_{-1} \\ \boxed{\dot{I}_0} \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\dot{\mathcal{E}}_m} \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

или в компактной записи

$$\mathbf{Zi} = \mathcal{E}, \tag{14}$$

$\mathbf{Z} = \{\dot{Z}_{k,l}\}$ $l = k-1, k, k+1$; $k \in \mathbb{Z}$, — матрица системы;

$\mathbf{i} = colon(\ldots, \dot{I}_{-k} \ldots, \dot{I}_{-1}, \dot{I}_0, \dot{I}_1, \ldots, \dot{I}_k, \ldots)$ — вектор-столбец токов;

$\mathcal{E} = colon(\ldots, 0, \ldots, 0, \dot{\mathcal{E}}_m, 0, \ldots, 0, \ldots)$ — вектор-столбец э.д.с.

Получилась бесконечная в обе стороны алгебраическая система уравнений, матрица которой состоит из трех ненулевых диагоналей, и свободный вектор — из одного ненулевого элемента. Здесь бесконечная система линейных алгебраических уравнений представлена в каноническом виде (14) для конечных систем. Канонический вид для бесконечных систем — другой.

Естественный и удобный для практики приближенный метод решения бесконечных систем уравнений — метод редукции, когда бесконечная система уравнений усекается, решается конечное число уравнений. Если точность недостаточная, то берется большее число уравнений и т. д. Здесь неявно предполагается, что чем большее число уравнений берется для решения, тем выше точность решения. Однако, это не всегда так, такое свойство справедливо только для сходящихся бесконечных систем. Вопрос о сходимости бесконечных систем уравнений представляет собой отдельную задачу.

Для анализа бесконечной системы (14) необходим минимум сведений из теории бесконечных систем уравнений [2]. Бесконечная «вниз и вправо» система уравнений, представленная в каноническом для конечных систем виде записывается так:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots = b_2 \\ \cdots \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Эта же система, представленная в каноническом для бесконечных систем виде, имеет другую форму записи:

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k + b_i, \quad i \in \mathbb{N}. \qquad (16)$$

Из множества бесконечных систем (16) выделяется подмножество регулярных систем, для которых выполняется система неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| c_{ik} \right| < 1, \quad i \in \mathbb{N}; \qquad (17)$$

и множество вполне регулярных систем, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| c_{ik} \right| \le 1 - \theta < 1, \quad i \in \mathbb{N}. \qquad (18)$$

Иными словами в регулярных системах сумма модулей элементов матрицы любой строки меньше единицы, для вполне регулярных систем эта сумма меньше некоторого числа $(1-\theta)$, меньшего единицы. Для каждой строки бесконечной матрицы вводится параметр

$$\rho_i = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left| c_{ik} \right|, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Для регулярных систем $\rho_i > 0$, для вполне регулярных справедливо неравенство $\rho_i \ge \theta > 0$. На свободный член налагаются условия

$$\left| b_i \right| \le K \rho_i, \quad i \in \mathbb{N}, \qquad (19)$$

где K — постоянная.

Доказано, что если бесконечная система уравнений (16) регулярная (а тем более — вполне регулярная) и для нее выполняются неравенства (19), то она может быть решена методом редукции.

Если в системе (16) условие регулярности нарушено для конечного числа уравнений, то такая система называется квазирегулярной. При выполнении условий (19) она также может быть решена методом редукции.

Теперь оценим нашу систему (13) с точки зрения ее регулярности. Совершенно очевидно, что изначально эта система не обладает свойством регулярности. Это видно из того, что все три сопротивления (10) стремятся к бесконечности при $k \to \pm\infty$, т. е. система формально не только не регулярна, но и весьма далека от этого свойства. Попытаемся, однако, привести ее к виду, более соответствующему свойству регулярности.

Каждое уравнение системы (12) разделим на коэффициент $\dot{Z}_{kk}$, стоящий на главной ее диагонали. Тогда вместо (12) получим бесконечную систему

$$\left.\begin{array}{l} \ldots \\ \dot{c}_{-2-3}\dot{I}_{-3} + \dot{I}_{-2} + \dot{c}_{-2-1}I_{-1} = 0 \\ \dot{c}_{-1-2}\dot{I}_{-2} + \dot{I}_{-1} + \dot{c}_{-10}I_0 = 0 \\ \dot{c}_{0-1}\dot{I}_{-1} + \dot{I}_0 + \dot{c}_{01}I_1 = \dot{J} \\ \dot{c}_{10}\dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{c}_{12}I_{21} = 0 \\ \dot{c}_{21}\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{c}_{23}I_3 = 0 \\ \ldots \end{array}\right\}. \qquad (20)$$

где $\dot{J} = \dfrac{\dot{\mathcal{E}}_m}{\dot{Z}_{00}}$, $\dot{c}_{k,k-1} = \dfrac{\dot{Z}_{k,k-1}}{\dot{Z}_{k,k}}$, $\dot{c}_{k,k+1} = \dfrac{\dot{Z}_{k,k+1}}{\dot{Z}_{k,k}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Векторная запись системы (20) в каноническом виде для конечных систем типа (14) следующая

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{J}, \qquad (21)$$

где $\mathbf{C} = \{c_{k,l}\}$, $l = k-1, k, k+1$, $c_{kk} = 1$ — бесконечная матрица системы;

$\mathbf{i}$ — тот же бесконечный вектор-столбец, что и в (14);

$\mathbf{j} = colon\left(\ldots, 0, \dfrac{\dot{\mathcal{E}}_m}{\dot{Z}_{00}}, 0, \ldots\right)$ — бесконечный вектор-столбец с единственным ненулевым элементом, находящимся в нулевой строке.

Приведем бесконечную систему (21) к каноническому для бесконечных систем виду, т. к. именно для него разработана теория бесконечных систем уравнений:

$$\mathbf{i} = (-\mathbf{C} + \mathbf{I})\mathbf{i} + \mathbf{j}, \qquad (22)$$

где $\mathbf{I} = diag(\ldots, 1, 1, 1, \ldots)$ — единичная матрица бесконечного порядка. Очевидно, матрица $\mathbf{C} - \mathbf{I}$ отличается от матрицы $\mathbf{C}$ только тем, что у второй главная диагональ состоит из единиц, а у первой — из нулей.

Представим развернутый вид системы (22) —

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{-2} \\ \dot{I}_{-1} \\ \dot{I}_{0} \\ \dot{I}_{1} \\ \dot{I}_{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dot{c}_{-2-3} & 0 & \dot{c}_{-2-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{c}_{-1-2} & 0 & \dot{c}_{-10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{c}_{0-1} & \boxed{0} & \dot{c}_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{c}_{10} & 0 & \dot{c}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{c}_{21} & 0 & \dot{c}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{-3} \\ \dot{I}_{-2} \\ \dot{I}_{-1} \\ \boxed{\dot{I}_{0}} \\ \dot{I}_{1} \\ \dot{I}_{2} \\ \dot{I}_{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\dot{\mathcal{E}}_m / \dot{Z}_{00}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Каждая строка матрицы в (23) содержит всего лишь два ненулевых элемента. Является ли эта бесконечная система уравнений регулярной? Проведем соответствующий анализ. Имеем

$$\lim_{k\to\pm\infty} \dot{c}_{k,k-1} = \frac{\dot{m}_L}{2}, \quad \lim_{k\to\pm\infty} \dot{c}_{k,k+1} = \frac{\overset{*}{m}_L}{2}.$$

Поскольку $m_L < 1$, то $\left|\dot{c}_{k,k-1}\right| + \left|\dot{c}_{k,k+1}\right| < 1$ при больших по модулю k. Таким образом, при больших $|k|$ условие регулярности выполняется. Оно может не выполняться только для конечного числа уравнений, т. е. можно всегда указать такое $k_{\max}$, что условие регулярности может не выполняться только для k, удовлетворящих неравенству $|k| \le k_{\max}$. Следовательно, наша система (20), как минимум, квазирегулярная.

Она может быть и регулярной с тем большим основанием, чем меньше коэффициенты модуляции элементов контура m, m_C, m_L, однако, в этом вопросе есть «узкие места». Чтобы их обнаружить рассмотрим $\dot{c}_{k,k\pm1}$ (20) совместно с формулами (10). Предположим, что частота ω э.д.с. квазимедленно (как это принято при снятии резонансных характеристик) изменяется от нуля до бесконечности. Тогда при условии

$$(\omega + k\Omega)L_0 - \frac{1}{\omega + k\Omega} = 0 \text{ или } \omega + k\Omega = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \qquad (24)$$

сопротивление $\dot{Z}_{kk}$ по модулю может быть сколь угодно малым, а значит соответствующие $\dot{c}_{k-1}$, $\dot{c}_{k+1}$ — сколь угодно большими. В таких случаях условия регулярности бесконечной системы (20) нарушаются. Выделим в (24) частный случай $k = 0$, тогда

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Это резонансная частота обычного контура, получающегося из нашего параметрического контура в случае

$$m, m_C, m_L \equiv 0.$$

Другой особый случай возникает при

$$\omega + (k \pm \Omega) = 0. \qquad (25)$$

Тогда один из элементов $\dot{c}_{k,k-1}$, $\dot{c}_{k,k+1}$ равен бесконечности, что противоречит условию регулярности.

Однако, в любом случае условие квазирегулярности выполняется, а этого достаточно для применения метода редукции при решении исходной бесконечной системы (13).

Здесь рассмотрен один из вариантов параметрического контура при изменении во времени по функциям (1) и (2) его элементов. Другие варианты отличаются от данного тем, что в матрице системы типа (13) число ненулевых диагоналей больше и число ненулевых элементов в свободном векторе больше. Самый сложный вариант получается в случае, когда сопротивление и индуктивность изменяются во времени по функции (2), а емкость — по функции (1). Тогда матрица в системе типа (13) содержит семь ненулевых диагоналей, а свободный вектор — девять ненулевых элементов. Все эти варианты могут быть рассмотрены с помощью предложенной в данной статье методики.

Заключение. Настоящая статья является развитием и углублением статьи [3]. При решении разнообразных физических задач большое,

а во многих случаях определяющее, значение имеет адекватный математический аппарат. При анализе параметрических радиоцепей это — теория бесконечных линейных систем алгебраических уравнений. Это особый раздел математического анализа.

При работе над статьей обнаружилось, как нам кажется, некоторое побочное несоответствие или противоречие. С одной стороны, бесконечные системы уравнений возникают при решении многих задач естествознания и техники. С другой стороны, теория бесконечных систем уравнений не входит в вузовские программы даже для математических специальностей. Эта теория опирается на свойства бесконечных определителей. Обстоятельная систематизированная монография В. Ф. Кагана [4] по теории бесконечных определителей была последний раз издана около 90 лет тому назад. Других равноценных публикаций нами не обнаружено. Нам кажется что нужно включить этот раздел в математическую подготовку современных специалистов по естествознанию и технике, т. к. в настоящее время узких специалистов по теории бесконечных систем уравнений немного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники : в 3-х т. / К. М. Поливанов. — М. : Энергия, 1972. — Т. 1. — 240 с.

2. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — М.-Л. : Госфизматиздат, 1962. — 708 с.

3. Бирюк Н. Д. Проблема сходимости бесконечных систем алгебраических уравнений в теории параметрических радиоцепей / Н. Д. Бирюк, В. В. Горбатенко, С. А. Горбатенко, М. В. Поздняков // Электричество. — 2009. — № 5. — С. 55—62.

4. Каган В. Ф. Основания теории определителей / В. Ф. Каган. — Одесса, 1922. — 521 с.

Белоглазов Василий Васильевич — соискатель кафедры экспериментальной физики физического факультета

Бирюк Николай Данилович — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры экспериментальной физики физического факультета

Тел. (4732) 208-625

E-mail: lidia@vmail.ru

Юргелас Владимир Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры нелинейных колебаний факультета прикладной математики, информатики и механики

Тел. (4732) 208-649

E-mail: vyurgelas@vsu.ru

Byelozlazov Vasiliy V. — Candidate of Science presenter of Voronezh State University

Birjuk Nikolay D. — Professor of Physical Faculty of Voronezh State University

Тел. (4732) 208-625

E-mail: lidia@vmail.ru

Yurgelas Vladimir V. — Associated Professor of chair nonlinear vibration, Voronezh State University

Тел. (4732) 208-649

E-mail: vyurgelas@vsu.ru