УДК 517. 432+517. 515+515. 958

О ПОРОЖДАЕМЫХ ПЛЮС-ОПЕРАТОРАМИ ОПЕРАТОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

В. А. Хацкевич, В. А. Сендеров

Брауде Колледж, Израиль

Дата поступления: 19 февраля 2010 г.

Аннотация. Изучаются плюс-операторы, порожденные ими дробно-линейные отношения $\mathcal{F}_A$ и связанные с $\mathcal{F}_A$ операторные множества. Показано, что в широком классе банаховых пространств возможно равенство $\mathcal{F}_A = \varnothing$. Показано также, что в гильбертовом случае, при некоторых естественных ограничениях, $\operatorname{Im}\mathcal{F}_A$ — непустое выпуклое компактное в слабой операторной топологии множество.
Ключевые слова: плюс-оператор, дробно-линейное отношение, операторный шар, индефинитное пространство, пространство Крейна.

Abstract. The plus-operators, the linear-fractional relations $\mathcal{F}_A$ generated by these operators, and the operator sets related to $\mathcal{F}_A$ are considered. It is shown that the equality $\mathcal{F}_A = \varnothing$ can hold in a wide class of Banach spaces. It is also shown that, under certain natural restrictions in the Hilbert case, $\operatorname{Im}\mathcal{F}_A$ is a nonempty convex set compact in a weak operator topology.
Key words: plus-operator, linear-fractional relational, operator ball, indefinite space, Krein space.

1. ВВЕДЕНИЕ

Топологическая (т.е. с непрерывными проекторами P_1 на $\mathfrak{L}_1$ и P_2 на $\mathfrak{L}_2$) прямая сумма

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \dot{+} \mathfrak{L}_2$$

комплексных банаховых пространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, где $\min\{\dim \mathfrak{L}_1, \dim \mathfrak{L}_2\} > 0$, называется индефинитным пространством, если в ней выделены множества всех неотрицательных векторов

$$\mathfrak{p}_+ = \Big\{x \in \mathfrak{L} : x = x_1 + x_2,\ x_1 \in \mathfrak{L}_1, x_2 \in \mathfrak{L}_2, \|x_1\| \geq \|x_2\|\Big\}$$

и всех неположительных векторов

$$\mathfrak{p}_- = \Big\{x \in \mathfrak{L} : x = x_1 + x_2,\ x_1 \in \mathfrak{L}_1, x_2 \in \mathfrak{L}_2, \|x_1\| \leq \|x_2\|\Big\}.$$

Все используемые ниже геометрические и операторные понятия и утверждения, связанные с индефинитными пространствами, содержатся, для частного случая пространств Крейна, в монографии [1].

Напомним некоторые наиболее существенные для понимания настоящей статьи определения, обозначения и утверждения из [1].

Пусть $\mathcal{L}_+$ — линеал, $\mathcal{L}_+ \subset \mathfrak{p}_+$. Тогда $\mathcal{L}_+ = \{x_1 + Kx_1\}$, где x_1 пробегает некоторый линеал из $\mathfrak{L}_1$, K — сжатие, действующее с $P_1\mathcal{L}_+$ в $\mathfrak{L}_2$. Аналогично если $\mathcal{L}_- \subset \mathfrak{p}_-$, то $\mathcal{L}_- = \{x_2 + Qx_2\}$.

В случае $P_1\mathcal{L}_+ = \mathfrak{L}_1$ $\left(P_2\mathcal{L}_- = \mathfrak{L}_2\right)$ пишут $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}_+$ $(\mathcal{L}_- \in \mathfrak{M}_-)$.

Если $\|K\| < 1$ $(\|Q\| < 1)$, линеал называется равномерно положительным (равномерно отрицательным). В случае $\|K\| < 1$, $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}_+$ $(\|Q\| < 1, \mathcal{L}_- \in \mathfrak{M}_-)$ будем писать $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}_+^\circ$ $(\mathcal{L}_- \in \mathfrak{M}_-^\circ)$.

Напомним также определения основных фигурирующих в статье классов операторов в индефинитных пространствах.

Для этого введем в $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{J}_\nu$-метрику по формуле $\mathfrak{J}_\nu(x) = \|P_1x\|^\nu - \|P_2x\|^\nu$, где $x \in \mathfrak{L}$, $\nu > 0$. В важном частном случае, когда $\mathfrak{L}$ — пространство Крейна (т.е. $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $P_{1,2} = P_{1,2}^*$, $\nu = 2$), имеем $\mathfrak{J}_2(x) = \Big(\big(P_1 - P_2\big)x, x\Big) = [x, x]$. (Здесь $(\cdot,\cdot)$ — обычное скалярное произведение на $\mathfrak{H}$.)

Оператор A называется плюс-оператором, если $A\mathfrak{p}_+ \subseteq \mathfrak{p}_+$.

Плюс-оператор называется строгим, если $\mu(A) = \inf\limits_{\mathfrak{J}_\nu(x)=1} \mathfrak{J}_\nu(Ax) > 0$, и нестрогим, если $\mu(A) = 0$.

Оператор A называется $\mathfrak{J}_\nu$-унитарным, если $A\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{J}_\nu(Ax) = \mathfrak{J}_\nu(x)$ для всех $x \in \mathfrak{L}$.

Ниже нам понадобится также (для случая пространства Крейна) понятие бистрогого плюс-оператора: строгого, сопряженный к которому также строг.

Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый единичный шар пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Формула

$$A_{21} + A_{22}K_+ = K'_+(A_{11} + A_{12}K_+),$$

где $K_+,\ K'_+ \in \mathcal{K}$ и $A_{ij} \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_i)$ при $i, j = 1, 2$, определяет в K дробно-линейное отношение (д.л.о.) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A = \{K_+, K'_+\}$.

Предметом настоящей статьи являются, в основном, некоторые связанные с д.л.о. $\mathcal{F}_A$ операторные множества.

Легко показать, что уже в случае пространства Крейна при $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ возможна ситуация $\mathcal{F}_A = \varnothing$. Из результатов второго раздела работы сразу следует, что в случае общего индефинитного пространства равенство $\mathcal{F}_A = \varnothing$ возможно и при плюс-операторе A. Более того: такая ситуация не является патологической. Так, из результатов второго раздела с помощью известной теоремы Линденштрауса—Цафрири можно вывести: всякое сепарабельное банахово пространство $\mathfrak{L}_1$, не изоморфное гильбертову, можно погрузить в индефинитное пространство $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \dot{+} \mathfrak{L}_2$ такое, что $\mathcal{F}_A = \varnothing$ при некотором плюс-операторе $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{L})$.

В третьем и четвертом разделах изучается случай, когда индефинитное пространство $\mathfrak{L}$ является пространством Крейна. В этом случае для любого плюс-оператора A область определения д.л.о. $\mathcal{F}_A$ совпадает со всем шаром $\mathcal{K}$. В этом случае предметом нашего изучения становится множество $\operatorname{Im}\mathcal{F}_A$.

В частном случае бистрогого плюс-оператора A множество $\operatorname{Im}\mathcal{F}_A$ изучалось во многих работах. Однако общий случай д.л.о. требует принципиально новых методов и подходов.

Именно, мы воспользуемся в третьем разделе генетически восходящим к работе Т. Я. Азизова [2] методом факторизации операторов (см. ниже Лемму 3.1). С помощью этого метода мы докажем, что для любого строгого плюс-оператора A с условием

$$A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^* \geq 0$$

множество $\operatorname{Im}\mathcal{F}_A$ выпукло и компактно в с.о.т.

В статье [3] изучались необходимые и достаточные условия, при которых треугольный (верхний или нижний) оператор A является плюс-оператором в случае общего индефинитного пространства $\mathfrak{L}$. В [4] указанные вопросы изучались для бистрогих плюс-операторов (не обязательно треугольных) в пространстве Крейна.

В четвертом разделе обобщаются некоторые результаты [4]. Именно, лемма о факторизации (Лемма 3.1) позволяет получить новые условия того, что данный оператор является плюс-оператором.

При этом условие $0 \in \rho(A_{11})$ заменено менее ограничительным: $0 \in \tilde{\rho}(A_{11})$ (т.е. ограниченный обратный оператор может быть теперь определен и не на всем пространстве).

Заметим, что в случае строгого плюс-оператора A всегда имеем $0 \in \tilde{\rho}(A_{11})$.

2. ПЛЮС-ОПЕРАТОРЫ A С ПУСТОЙ ОБЛАСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $\mathcal{F}_A$

Построению таких операторов мы предпошлем построение неотрицательных подпространств $\mathcal{L}$, не допускающих расширения до $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}_+$.

Пример 2.1. Пусть в $\mathfrak{L}_1$ есть $\mathcal{M}$, не допускающее ограниченного проектора; $\mathfrak{L}_2$ — экземпляр $\mathcal{M}$; K — оператор естественного отождествления $\mathcal{M}$ и $\mathfrak{L}_2$ с нормой $\frac{1}{2}$. Из ограниченного $\tilde{K} \supset K$, заданного на всем $\mathfrak{L}_1$, сразу строился бы ограниченный проектор из $\mathfrak{L}_1$ на $\mathcal{M}$.

Замечание 2.2. Нерасширяемое подпространство Примера 2.1 равномерно положительно.

Замечание 2.3. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное подпространство, не допускающее проектора с нормой 1. Тогда конструкция Примера 2.1 позволяет построить нейтральное подпространство $\mathcal{L} = \left\{x_1 + Kx_1, x_1 \in \mathcal{M}\right\}$, не допускающее расширения до $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}_+$.

Так, в трехмерном $\mathfrak{L}_1$ с чебышевской нормой или нормой l_1 достаточно взять $\mathcal{M} = Lin\left\{e_1 + e_2,\ e_2 + e_3\right\}$.

Теперь построим искомый плюс-оператор A.

Теорема 2.4. Пусть в $\mathfrak{L}$ существует неотрицательное $\mathcal{L}$, не расширяемое до $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}_+$; существует B на $\mathfrak{L}_1$: $\overline{B\mathfrak{L}_1} = \mathcal{L}$. Тогда существует плюс-оператор A такой, что область определения д.л.о. $\mathcal{F}_A$ пуста.

Доказательство. Возьмем A со свойствами $\overline{A\mathfrak{L}_1} = \mathcal{L}$, $A\mathfrak{L}_2 = \{0\}$. Ясно, что из $\mathcal{L}' \in \mathfrak{M}_+$ следует $\overline{A\mathcal{L}'} = \mathcal{L}$.

Осталось построить какое-либо $\mathfrak{L}_1$, недополняемое $\mathcal{M}$ в нем и B' на $\mathfrak{L}_1$: $B'\mathfrak{L}_1 = \mathcal{M}$.

Пример 2.5. Пусть $\mathfrak{L}_1 = l_1, \{f_i\}_{i\in N}$ — естественный базис l_1, $\mathcal{M} \subset l_1$, $\mathcal{M}$ в l_1 недополняемо, $\{g_i\}_{i\in N}$ — плотное в $\mathcal{M}$ множество. Достаточно взять $B'f_i = \alpha_i g_i$, где $\|\alpha_i g_i\| = 2^{-i}$ $\forall i$: $g_i \neq 0$.

Справедлива и следующая

Теорема 2.6 (Виктор Шульман). Пусть X — произвольное банахово пространство, Y — его сепарабельное подпространство. Тогда на X существует ограниченный линейный оператор A такой, что $AX = Y$.

Замечание 2.7. В случае допускающего проектирование подпространства $\mathcal{M}$ (см. Замечание 2.3) в качестве оператора B' достаточно взять ограниченный проектор на $\mathcal{M}$.

3. О ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРОВ И О СВОЙСТВАХ ОБРАЗОВ ОПЕРАТОРНЫХ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Лемма 3.1. Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $T_{12} = T_{11}\Gamma^*$, $\|\Gamma\| < 1$. Тогда $T = BV$, где $B_{12} = 0$, а V — $\mathfrak{J}$-унитарный оператор.

Доказательство. Рассмотрим оператор $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, блок-матрица которого в базисе $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2\}$ имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} & -\Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} \\ -\Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Оператор U (а, значит, и U^{-1}) $\mathfrak{J}$-унитарен (вследствие [1, Теорема 2.5.10]). Полагая $B = TU$, получаем: $B_{12} = 0$, $T = BV$, где $V = U^{-1}$.

Теорема 3.2. Пусть плюс-оператор $A = T$ удовлетворяет условиям Леммы 3.1. Тогда множество $\operatorname{Im}\mathcal{F}_A$ выпукло и компактно в слабой операторной топологии (с.о.т.).

Доказательство. Так как $\mathcal{F}_V$ — дробно-линейное **отображение** шара $\mathcal{K}$, то

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B \circ \mathcal{F}_V$$

[5, Предложение 4.20]. Отсюда вследствие аффинности отношения $\mathcal{F}_B$ и равенства $\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ легко следует выпуклость множества $\operatorname{Im}\mathcal{F}_A$.

Осталось доказать компактность в с.о.т. множества $\mathcal{F}_B(\mathcal{K})$.

Т.к. шар $\mathcal{K}$ в с.о.т. является компактом, то и его образ $\mathcal{K}_1$ при непрерывном отображении $K_+ \to B_{21} + B_{22}K_+$ — компакт. Следовательно, $\mathcal{K}_1$ — замкнутое подмножество пространства $L(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$. Поэтому замкнут и полный прообраз $\mathcal{F}_B(\mathcal{K})$ множества $\mathcal{K}_1$ при непрерывном отображении $K'_+ \to K'_+B_{11}$ шара $\mathcal{K}$. Значит, поскольку $\mathcal{K}$ — компакт, то и $\mathcal{F}_B(\mathcal{K})$ — компакт. Теорема доказана.

Лемма 3.3. Пусть A — строгий плюс-оператор, $\mathcal{L} = A^*\mathfrak{H}_1$. Тогда $\mathcal{L}^\perp$ и $\mathcal{L}^{[\perp]}$ — равномерно отрицательные подпространства.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{L}^\perp$. Тогда $(x, \mathcal{L}) = (Ax, \mathfrak{H}_1) = 0$. Таким образом, $x \in Ker(P_1A)$, где P_1A — строгий плюс-оператор. Вследствие [1, Предложение 2.4.14] подпространство $Ker(P_1A)$ равномерно отрицательно. Окончание доказательства очевидно.

Лемма 3.4. Строгий плюс-оператор $A = T$ удовлетворяет условиям Леммы 3.1 в точности если $D = A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^* \geq 0$.

Доказательство. В условиях Леммы 3.1 линеал $A^*\mathfrak{H}_1$ равномерно положителен. Отсюда, очевидно, $D \geq 0$.

Пусть $D \geq 0$, т.е. $A^*\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{p}_+$. Из Леммы 3.3 следует, что $\overline{\mathcal{L}}$ — невырожденное подпространство. Отсюда $\overline{\overline{\mathcal{L}} \dotplus \mathcal{L}^{[\perp]}} = \mathfrak{H}$ [1, Лемма 1.7.7]. Следовательно, поскольку угол между неотрицательным подпространством $\overline{\mathcal{L}}$ и равномерно отрицательным подпространством $\mathcal{L}^{[\perp]}$ положителен [6, Лемма], имеем $\overline{\mathcal{L}} \dotplus \mathcal{L}^{[\perp]} = \mathfrak{H}$. Отсюда $\mathcal{L}^{[\perp]} \in \mathfrak{M}_-^\circ$ [7, Теорема 1.1]. Следовательно, линеал $\mathcal{L}$ равномерно положителен, что эквивалентно доказываемому утверждению.

4. ЛЕММА О ФАКТОРИЗАЦИИ И СВОЙСТВА ПЛЮС-ОПЕРАТОРОВ

Определение 4.1. Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $0 \in \tilde{\rho}(T)$. Положим

$$T^{(-1)}x = \begin{cases} T^{-1}x, & \text{если } x \in \operatorname{Im} T, \\ 0, & \text{если } x \in (\operatorname{Im} T)^\perp. \end{cases}$$

Очевидно, $T^{(-1)}T = I$, $TT^{(-1)} = P_{\operatorname{Im} T}$.

Лемма 4.2. Пусть $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $B_{12} = 0$, $0 \in \tilde{\rho}(B_{11})$,

$$\|B_{21}\| + \|B_{22}\| \leq \left\|B_{11}^{(-1)}\right\|^{-1}. \tag{4.1}$$

Тогда B — плюс-оператор.

Доказательство. Пусть $x = x_1 + x_2 \in \mathfrak{p}_+$, $\|x_1\| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\|P_2Bx\| &= \|B_{21}x_1 + B_{22}x_2\| \le \\ &\le \|B_{21}\|\cdot\|x_1\| + \|B_{22}\|\cdot\|x_2\| \le \\ &\le \|B_{21}\| + \|B_{22}\| \le \|B_{11}^{(-1)}\|^{-1} = \\ &= \inf_{\|x\|=1}\|B_{11}x\| \le \|B_{11}x_1\| = \|P_1Bx\|.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Заметим, что плюс-оператор B с $B_{12} = 0$ даже в случае $0 \in \rho(B_{11})$ может не удовлетворять неравенству (4.1).

Пример 4.3. Пусть $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$, $\dim \mathfrak{H}_2 = 2$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Легко показать, что B — строгий плюс-оператор. Однако

$$\|B_{21}\| + \|B_{22}\| = \beta + \alpha > 1 = \|B_{11}^{(-1)}\|^{-1}.$$

Теорема 4.4. Пусть оператор $A = T$ удовлетворяет условиям Леммы 3.1; $0 \in \tilde{\rho}(A_{11})$; справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\left\|(A_{21} - A_{22}A_{12}^*(A_{11}^{(-1)})^*)(I - A_{11}^{(-1)}A_{12}A_{12}^*(A_{11}^{-1})^*)^{-\frac{1}{2}}\right\| + \\ &+\left\|(A_{22} - A_{21}A_{11}^{(-1)}A_{12})(I - A_{12}^*(A_{11}^{(-1)})^*A_{11}^{(-1)}A_{12})^{-\frac{1}{2}}\right\| \le \\ &\le \left\|A_{11}(I - A_{11}^{(-1)}A_{12}A_{12}^*(A_{11}^{(-1)})^*)^{\frac{1}{2}})^{(-1)}\right\|^{-1}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Тогда A — плюс-оператор.

Доказательство. По Лемме 3.1

$$\begin{aligned}B_{11} &= (A_{11} - A_{12}\Gamma)(I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= (A_{11} - (A_{11}\Gamma^*)\Gamma)(I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= A_{11}(I - \Gamma^*\Gamma)(I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= A_{11}(I - \Gamma^*\Gamma)^{\frac{1}{2}}, \\ B_{21} &= (A_{21} - A_{22}\Gamma)(I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}}, \\ B_{22} &= (A_{22} - A_{21}\Gamma^*)(I - \Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma^* &= A_{11}^{(-1)}A_{12}, \\ \Gamma &= A_{12}^*(A_{11}^{-1})^*.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Преобразуя (4.2) с помощью (4.4) и (4.3), мы приходим к неравенству (4.1). Отсюда по Лемме 4.2 B является плюс-оператором. Значит и A — плюс-оператор. Теорема доказана.

Лемма 4.5. Пусть $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $B(\mathfrak{p}_+ \cap \mathfrak{p}_-) \subseteq \mathfrak{p}_+$, $B_{12} = 0$. Тогда

$$\|B_{21}\|^2 + \|B_{22}\|^2 \le \|B_{11}\|^2. \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть $x = x_1 \pm x_2$, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\|B_{21}x_1 \pm B_{22}x_2\|^2 &= \|P_2Bx\|^2 \le \\ &\le \|P_1Bx\|^2 = \|B_{11}x_1\|^2.\end{aligned}$$

Сложив получившиеся два неравенства и воспользовавшись равенством параллелограмма, получаем

$$\|B_{21}x_1\|^2 + \|B_{22}x_2\|^2 \le \|B_{11}x_1\|^2.$$

Вследствие $\|B_{11}x_1\| \le \|B_{11}\|$ получаем отсюда (4.5).

Заметим, что удовлетворяющий (4.5) оператор B с $B_{12} = 0$ даже в случае $0 \in \rho(B_{11})$ может не быть плюс-оператором.

Пример 4.6. Пусть $\dim \mathfrak{H}_1 = \dim \mathfrak{H}_2 = 1$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Очевидно, неравенство (4.5) справедливо. Однако $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \overline{\in} \mathfrak{p}_+$.

С помощью Леммы 4.5 аналогично Теореме 4.4 доказывается

Теорема 4.7. Пусть плюс-оператор $A = T$ удовлетворяет условиям Леммы 3.1; $0 \in \tilde{\rho}(A_{11})$.

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\left\|(A_{21} - A_{22}A_{12}^*(A_{11}^{(-1)})^*)(I - A_{11}^{(-1)}A_{12}A_{12}^*(A_{11}^{(-1)})^*)^{-\frac{1}{2}}\right\|^2 + \\ &+\left\|(A_{22} - A_{21}A_{11}^{(-1)}A_{12})(I - A_{12}^*(A_{11}^{(-1)})^*A_{11}^{(-1)}A_{12})^{-\frac{1}{2}}\right\|^2 \le \\ &\le \left\|A_{11}(I - A_{11}^{(-1)}A_{12}A_{12}^*(A_{11}^{(-1)})^*)^{\frac{1}{2}}\right\|^2.\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Москва. Наука. — 1986.

2. *Азизов Т. Я.* О расширениях инвариантных дуальных пар. Украинский математический жур-

нал. — Т. 41, 7, — с. 958 — 961, — июль 1989.

3. *Khatskevich V. A., Senderov V. A.* Abel—Schröder type equations for maps of operator balls. Functional differential equations, — Vol. 10, — 2003, — № 1—2, — P. 239—258.

4. *Азизов Т., Хацкевич В.* Бистрогие плюс-операторы и операторные дробно-линейные преобразования. Український математичний вісник. — Том 4 — (2007), 3, — 311—332.

5. *Khatskevich V., Ostrovskii M., Shulman V.* Linear fractional relations for Hilbert space operators. Math. Nachr. 279. 8 (2006). — 875, — 890.

6. *Азизов Т. Я., Сендеров В. А.* О непрерывности некоторых классов операторов в нормированных пространствах с индефинитной метрикой. Сб. трудов аспирантов матем. ф-та, 2. Воронеж, — 1971, — 1 — 6.

7. *Сендеров В. А., Хацкевич В. А.* О нормированных J_v-пространствах и некоторых классах линейных операторов в этих пространствах // Матем. исслед. 8:3 (29). Кишинев. РИО АН Молд. ССР (1973), — 56 — 75.

Хацкевич Виктор Анатольевич
к.ф.-м.н. профессор, Брауде Колледж, Израиль

Hatskevich V.A.
Ph.D., Professor of the Mathematical Departament, Dept. of Mathematics, ORT Braude College College Campus,
P.O. Box 78 Karmiel 21982 Israel

Сендеров Валерий Анатольевич
jsadovskaya@mail.ru
7 (495) 759-33-81

Senderov V.A.
jsadovskaya@mail.ru
7 (495) 759-33-81