

# ВИЗУАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СЛАБО КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ\*

М. В. Турбин, С. К. Кондратьев

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию: 28.07.2010 г.

**Аннотация.** В работе были рассмотрены возмущения в виде бегущей волны установившегося течения Пуазейля для модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров. Найдены различные условия, при которых данные возмущения становятся периодическими, затухают или разрушаются (уходят на бесконечность). Получена визуализация аттракторов для изучаемой задачи.

**Ключевые слова:** гидродинамика, неньютоновская жидкость, растворы полимеров, аттракторы пространства траекторий, визуализация аттракторов.

**Abstract.** In this paper traveling wave perturbations of stable Poiseuille flow for model of weak concentrated aqueous polymer solutions were under consideration. Various conditions for periodicity, damping and crushing (infinite increase) of the perturbations were obtained. A visualization of attractors of the problem was presented.

**Keywords:** hydrodynamics, Non-Newtonian fluid, polymer solutions, attractors of a trajectory space, visualization of attractors.

## ВВЕДЕНИЕ

В течение последних полутора столетий основной моделью, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости, является модель ньютоновской жидкости. Она описывает течение при умеренных скоростях большинства встречающихся на практике вязких несжимаемых жидкостей. Однако уже в середине XIX века стали известны такие вязкие несжимаемые жидкости, которые не подчиняются ньютоновскому определяющему уравнению. Впервые модели, описывающие движение таких жидкостей, были предложены в XIX веке Дж. Максвеллом, В. Кельвином и В. Фойгтом и были развиты в середине XX века в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта. Отличительной особенностью данных моделей является учет ими предыстории течения жидкости. Подобные модели движения жидкости впоследствии стали называть «неньютоновскими». В данной работе рассматривается одна из таких моделей, а именно модель, описывающая

движение слабо концентрированных водных полимерных растворов [1], [2]. Отметим также, что данная модель является частным случаем модели движения жидкости Ривлина—Эриксона второго порядка [3]. Реологическое соотношение для исследуемой модели имеет вид:

$$\sigma = 2\nu \left( \mathcal{E} + \nu^{-1} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right), \quad (0.1)$$

$$\nu, \nu > 0.$$

Здесь  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости, а  $\nu$  — время запаздывания. Определяющее соотношение устанавливает связь девятатора тензора напряжений  $\sigma = (\sigma_{ij})$  и тензора скоростей деформаций  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})$

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(\nu) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

определяемого полем скоростей жидкости  $v$ . В работе [2] было показано, что исследуемая модель описывает течение вязкой неньютоновской жидкости, которой требуется время, чтобы прийти в движение под действием внезапно приложенной силы.

Подставляя  $\sigma$  в уравнение движения в форме Коши

\* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 - 2013 годы» (Госконтракт № П941).

© Турбин М. В., Кондратьев С. К.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \text{grad } p = \text{Div } \sigma + 0$$

(через  $\text{Div } \sigma$  в данной системе обозначен вектор, координаты которого являются дивергенцией строк матрицы  $\sigma = (\sigma_{ij}(x))$ ) и учитывая условие несжимаемости жидкости:

$$\text{div } v = 0,$$

мы получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \quad (0.2)$$

$$-\varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \text{grad } p = 0,$$

$$\text{div } v = 0. \quad (0.3)$$

Различные начально-краевые задачи для системы уравнений (0.2) — (0.3) были исследованы в работах [4], [5], а результаты о существовании аттрактора для более общей модели были получены в работе [6].

При рассмотрении конкретных задач о течениях вязкой жидкости часто исследуются либо стационарные течения, либо эволюция течения на достаточно большом временном промежутке. Более того, отыскивая численно стационарное течение, часто используют метод установления, при котором стационарное течение ищется как предел нестационарных течений при неограниченном увеличении времени. Именно таким образом мы и будем искать аттракторы для системы уравнений (0.2), (0.3).

Мы будем изучать систему (0.2), (0.3) в ограниченной трубе  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{\Omega} = [-R; R] \times [-1; 1]$ , на промежутке времени  $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ . Для удобства перепишем ее в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) + u(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, t) + \\ & + w(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t) - \\ & - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, t) \right) - \quad (0.4) \\ & - \varkappa \left( \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} u(x, y, t) + \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} u(x, y, t) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} p(x, y, t) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} w(x, y, t) + u(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} w(x, y, t) + \\ & + w(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} w(x, y, t) - \\ & - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y, t) \right) - \quad (0.5) \\ & - \varkappa \left( \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} w(x, y, t) + \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} w(x, y, t) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} p(x, y, t) = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial y} w(x, y, t) = 0. \quad (0.6)$$

Координаты  $x$ ,  $y$  и время  $t$  являются независимыми переменными, а функции  $u$ ,  $w$  и  $p$  — зависимыми переменными, функциями от  $x$ ,  $y$ ,  $t$ . Заметим, что уравнения (0.4) и (0.5) нелинейны, и именно это вызывает основную трудность при их изучении.

Для системы (0.4) — (0.6) мы рассмотрим краевую задачу с граничным условием

$$u|_{y=\pm 1} = w|_{y=\pm 1} = 0. \quad (0.7)$$

Для краевой задачи (0.4) — (0.7) мы выведем уравнения для малых колебаний (возмущений), возникающих в течениях. Подобное уравнение для системы уравнений Навье—Стокса называется уравнением Орра—Зоммерфельда (подробнее см. в [1]).

Наш подход к изучению предельных режимов флуктуаций течения Пуазейля будет заключаться в том, что мы рассмотрим некоторый класс его возмущений, назвав его *пространством траекторий*, и будем исследовать траекторные и фазовые аттракторы этого пространства траекторий.

Метод описание динамики с помощью пространств траекторий излагается, например, в книгах [7], [8], [9]. Этот метод заключается в выделении некоторого класса функций, определенных на  $\mathbb{R}_+$  и принимающих значения в фазовом пространстве, как правило, функциональном: этот класс и называется *пространством траекторий*. Считается, что функции из этого класса, называемые *траекториями*, описывают эволюцию системы. Для изучения предельных режимов используются понятия траекторного и глобального аттракторов. Тра-

екторный аттрактор состоит из функций от времени со значениями в фазовом пространстве, на которые «становятся похожи» траектории с течением времени; глобальный же аттрактор является подмножеством фазового пространства, в определенном смысле притягивающего ограниченные семейства траекторий.

Для нужд настоящей задачи целесообразно несколько видоизменить этот подход, а именно, несколько иначе подойти к понятию пространства траекторий. В п. 3 обосновывается целесообразность этой модификации, а также приводятся некоторые эвристические соображения касательно выбора пространства траекторий. Затем даются некоторые абстрактные определения и утверждения, которые применяются к пространству возмущений течения Пуазейля.

### 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ И ИХ СВОЙСТВА

В этом параграфе для краевой задачи (0.4) — (0.7) будут получены уравнения для малых колебаний, возникающих в жидкости. (Мы будем рассматривать течения, которые в среднем являются параллельными и установившимися.) А именно, нами будут рассмотрены возмущения течения Пуазейля. Вывод состоит из трех этапов: выделение флуктуации, линеаризация уравнений и введение комплексных функций.

#### 1.1. ВЫДЕЛЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ

Предположим с самого начала, что при отсутствии возмущений течение является ламинарным и его можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= U(y), \\ w &= 0, \\ p &= P(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Заметим, что для течений в каналах (трубах) давление  $P$  зависит линейно от  $x$ , а градиент давления  $P$  уравнивается членом  $v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ . Для пограничного слоя давление  $P$  постоянно и член  $v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$  уравнивается

конвективным членом. Однако такими членами в приближении (1.1) пренебрегают.

Будем предполагать, что параметры течения колеблются около этих средних значений,

и будем использовать тильду для обозначения флуктуаций. Таким образом, мы полагаем, что

$$u = U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \tag{1.2}$$

$$w = \tilde{w}(x, y, t), \tag{1.3}$$

$$p = P(x) + \tilde{p}(x, y, t). \tag{1.4}$$

Если эти выражения подставить в уравнения (0.4) — (0.6), то получим систему

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(x, y, t) - v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, y, t) - \\ & - v \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{u}(x, y, t) - \varkappa \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \tilde{u}(x, y, t) - \\ & - \varkappa \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} \tilde{u}(x, y, t) + U(y) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, y, t) + \\ & + \tilde{u}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, y, t) + \tilde{w}(x, y, t) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial y} U(y) + \tilde{w}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{u}(x, y, t) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}(x, y, t) = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}(x, y, t) - v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{w}(x, y, t) - \\ & - v \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{w}(x, y, t) - \varkappa \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \tilde{w}(x, y, t) - \\ & - \varkappa \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} \tilde{w}(x, y, t) + U(y) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{w}(x, y, t) + \\ & + \tilde{u}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{w}(x, y, t) + \\ & + \tilde{w}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{w}(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{p}(x, y, t) = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{w}(x, y, t) = 0. \tag{1.7}$$

Данная система уже не содержит членов  $-v \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(y)$  и  $\frac{\partial}{\partial x} P(x)$ , так как основное течение при отсутствии возмущений является решением исходной системы, а как выше было сказано, для ламинарного течения эти два члена уравниваются друг друга.

#### 1.2 ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

В системе уравнений (1.5) — (1.7) члены, содержащие произведения

$$\begin{aligned} & \tilde{u}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{w}(x, y, t); \quad \tilde{w}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{w}(x, y, t); \\ & \tilde{u}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, y, t); \quad \tilde{w}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, y, t) \end{aligned}$$

соответствуют взаимодействию флуктуаций между собой. Если отдельные пульсации имеют частоту  $\omega$ , то их произведения будут иметь частоту 0 или  $2\omega$ . Поэтому они будут или изменять основное течение, или порождать гармоники высшего порядка. Для того чтобы преодолеть эти трудности, мы будем предполагать, что флуктуации и их производные имеют малые амплитуды. Тогда указанными членами в левых частях уравнений (1.5) и (1.6) можно пренебречь, и мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(x, y, t) - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, y, t) - \\ & - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{u}(x, y, t) - \kappa \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \tilde{u}(x, y, t) - \\ & - \kappa \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} \tilde{u}(x, y, t) + U(y) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, y, t) + \\ & + \tilde{w}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} U(y) + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}(x, y, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}(x, y, t) - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{w}(x, y, t) - \\ & - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{w}(x, y, t) - \kappa \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \tilde{w}(x, y, t) - \\ & - \kappa \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} \tilde{w}(x, y, t) + U(y) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial x} \tilde{w}(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{p}(x, y, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{w}(x, y, t) = 0. \quad (1.10)$$

Данные уравнения линейны. Действительно, если функции  $\tilde{u}_1, \tilde{w}_1, \tilde{p}_1$  являются одним частным решением, а функции  $\tilde{u}_2, \tilde{w}_2, \tilde{p}_2$  образуют другое частное решение, то любая их линейная комбинация тоже будет решением. Это основное свойство линейных уравнений гарантирует, что различные колебания в жидкости происходят независимо друг от друга.

### 1.3. ВВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

Воспользуемся линейностью полученных уравнений и будем искать их решения в виде комплексных функций. Таким образом можно свести данную систему уравнений в частных производных (1.8) — (1.10) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что даст очевидные преимущества при дальнейшем исследовании. Имея это в виду, мы попытаемся найти решение в следующем виде:

$$\hat{u} = \mathbf{u}(y)e^{i\alpha(x-ct)}; \quad (1.11)$$

$$\hat{w} = \mathbf{w}(y)e^{i\alpha(x-ct)}; \quad (1.12)$$

$$\hat{p} = \mathbf{p}(y)e^{i\alpha(x-ct)}, \quad (1.13)$$

где «крышечка» обозначает «предварительное» комплексное решение, с помощью которого мы затем найдем действительное решение, отмеченное ранее тильдой. В выражениях (1.11) — (1.13) величина  $\alpha$  представляет собой волновое число, а  $c$  — скорость волны возмущения. Мы будем предполагать, что  $\alpha$  — вещественное положительное число, а число  $c$  — комплексное, при этом  $\text{Re}c$  — скорость распространения волны, а величина  $\text{Im}c$  характеризует скорость изменения амплитуды. Жирным шрифтом в выражениях (1.11) — (1.13) обозначены комплексные функции  $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{p}$ , зависящие только от неизвестной  $y$ . Стоит отметить, что часто решение такого вида называют решением типа «бегущей волны». Заметим, что при положительной мнимой части величины  $c$  происходит экспоненциальный рост возмущений со временем, при отрицательной правой части соответственно происходит затухание возмущений со временем с экспоненциальной скоростью. В случае  $\text{Im}c = 0$  мы получаем постоянные незатухающие колебания. Подробнее см. в п. 3.1.

Три функции, определенные выражениями (1.11) — (1.13), должны удовлетворять системе уравнений (1.8) — (1.10). Подставляя  $\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}$  в (1.8) — (1.10), преобразуя полученные выражения и исключая экспоненциальные множители, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & (\nu\alpha^2 - i\alpha c - i\kappa\alpha^3 c + i\alpha U(y))u(y) + \\ & + (i\kappa\alpha c - \nu)u''(y) + \\ & + w(y)U'(y) + i\alpha p(y) = 0; \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & (\nu\alpha^2 - i\alpha c - i\kappa\alpha^3 c + i\alpha U(y))w(y) + \\ & + (i\kappa\alpha c - \nu)w''(y) + p'(y) = 0; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$i\alpha u(y) + w'(y) = 0, \quad (1.16)$$

в которой штрихами обозначено дифференцирование по  $y$ .

В этой работе мы будем рассматривать возмущения установившегося течения Пуазейля. Это простое сдвиговое течение, для которого

$$U(y) = 1 - y^2.$$

Таким образом из системы уравнений (1.14) — (1.16) мы получим систему:

$$\begin{aligned} & (v\alpha^2 - i\alpha c - i\alpha\alpha^3 c + i\alpha(1 - y^2))\mathbf{u}(y) + \\ & + (i\alpha\alpha c - v)\mathbf{u}''(y) - \\ & - 2y\mathbf{w}(y) + i\alpha\mathbf{p}(y) = 0; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} & (v\alpha^2 - i\alpha c - i\alpha\alpha^3 c + i\alpha(1 - y^2))\mathbf{w}(y) + \\ & + (i\alpha\alpha c - v)\mathbf{w}''(y) + \mathbf{p}'(y) = 0; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$i\alpha\mathbf{u}(y) + \mathbf{w}'(y) = 0. \quad (1.19)$$

Последняя система уравнений не содержит переменных  $x$  и  $t$ . Таким образом, мы свели систему уравнений в частных производных (1.8) — (1.10) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Нужно отметить, что если функции  $\mathbf{u}_*$ ,  $\mathbf{w}_*$  и  $\mathbf{p}_*$  являются решением системы уравнений (1.17) — (1.19), то еще одно решение можно получить, взяв функции, комплексно сопряженные к  $\mathbf{u}_*$ ,  $\mathbf{w}_*$ ,  $\mathbf{p}_*$ . Тогда для исходной системы (1.8) — (1.10) решением также будет следующий набор функций:

$$\bar{\hat{u}}(x, y, t) = \bar{\mathbf{u}}_*(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}; \quad (1.20)$$

$$\bar{\hat{w}}(x, y, t) = \bar{\mathbf{w}}_*(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}; \quad (1.21)$$

$$\bar{\hat{p}}(x, y, t) = \bar{\mathbf{p}}_*(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}. \quad (1.22)$$

Это свойство следует из того факта, что в первоначальных уравнениях (1.8) — (1.10) не содержится никаких комплексных величин.

Таким образом, если функции  $\mathbf{u}, \mathbf{w}$  и  $\mathbf{p}$  являются решением системы (1.17) — (1.19), то можно построить чисто действительное решение системы уравнений (1.8) — (1.10), положив:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, t) &= \frac{1}{2}(\hat{u}(x, y, t) + \bar{\hat{u}}(x, y, t)) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}(y)e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{\mathbf{u}}(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}) = \text{Re } \hat{u}; \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, y, t) &= \frac{1}{2}(\hat{w}(x, y, t) + \bar{\hat{w}}(x, y, t)) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{w}(y)e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{\mathbf{w}}(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}) = \text{Re } \hat{w}; \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, y, t) &= \frac{1}{2}(\hat{p}(x, y, t) + \bar{\hat{p}}(x, y, t)) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}(y)e^{i\alpha(x-ct)} + \bar{\mathbf{p}}(y)e^{-i\alpha(x-\bar{c}t)}) = \text{Re } \hat{p}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

#### 1.4. УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

Выразим функцию  $\mathbf{u}$  из уравнения (1.19) и подставим ее в уравнение (1.17). После этого выражая  $\mathbf{p}$  из (1.17) и подставляя в (1.18), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & (v - i\alpha\alpha\kappa)\mathbf{w}^{IV}(y) + (2i\alpha\alpha^3\kappa - 2v\alpha^2 - \\ & - i\alpha(1 - y^2) + i\alpha)\mathbf{w}''(y) + \\ & + (v\alpha^4 - i\alpha\alpha^5\kappa + i\alpha^3(1 - y^2) - \\ & - i\alpha\alpha^3 - 2i\alpha)\mathbf{w}(y) = 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Решение (вектор-функция  $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ ) системы (1.17) — (1.19) должно удовлетворять граничному условию (0.7), то есть обращаться в нуль при  $y = \pm 1$ . При этом из уравнения (1.19):

$$i\alpha\mathbf{u}(y) + \mathbf{w}'(y) = 0.$$

непосредственно следует, что  $\mathbf{w}'(y)$  тоже должно обращаться в нуль при  $y = \pm 1$ .

Таким образом для уравнения (1.26) у нас есть следующие граничные условия:

$$\mathbf{w}(-1) = 0; \quad (1.27)$$

$$\mathbf{w}'(-1) = 0; \quad (1.28)$$

$$\mathbf{w}(1) = 0; \quad (1.29)$$

$$\mathbf{w}'(1) = 0. \quad (1.30)$$

Задача (1.26) — (1.28) линейная, и при любых значениях параметров  $\alpha$  и  $c$  она имеет тривиальное нулевое решение. Представляют интерес нетривиальные решения этой задачи, которые существуют не при любых значениях  $(\alpha, c)$ . Значения параметров, при которых нетривиальные решения существуют, называются *собственными значениями* задачи (1.26) — (1.28), а сами нетривиальные решения — *собственными функциями*.

#### 1.5. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

На отрезке  $[-1, 1]$  рассмотрим дифференциальное выражение

$$\begin{aligned} l(\mathbf{w}) &= (v - i\alpha\alpha\kappa)\mathbf{w}^{IV}(y) + \\ & + (2i\alpha\alpha^3\kappa - 2v\alpha^2 - i\alpha(1 - y^2) + \\ & + i\alpha)\mathbf{w}''(y) + (v\alpha^4 - i\alpha\alpha^5\kappa + \\ & + i\alpha^3(1 - y^2) - i\alpha\alpha^3 - 2i\alpha)\mathbf{w}(y), \end{aligned} \quad (1.31)$$

которое представляет собой левую часть уравнения (1.26). Коэффициенты этого выражения гладкие и непрерывно зависят от параметров  $(\alpha, c)$ , а при фиксированном  $\alpha$  аналитически

зависят от комплексного параметра  $c$ . Отметим, что коэффициент при старшей производной — постоянная. Если она равна нулю, то дифференциальное выражение имеет второй порядок, поэтому задача Коши для уравнения

$$l(\mathbf{w}) = 0$$

с начальными условиями (1.27), (1.28) имеет единственное (тривиальное) решение. Следовательно, при тех значениях параметров  $\alpha, c$ , при которых коэффициент при  $\mathbf{w}^{IV}$  обращается в 0, не являются собственными значениями, поэтому будем считать, что

$$v - ic\alpha \neq 0.$$

Пусть дифференциальный оператор  $L$  порожден дифференциальным выражением  $l$  и краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} U_1(\mathbf{w}) &\equiv \mathbf{w}(-1) = 0, \\ U_2(\mathbf{w}) &\equiv \mathbf{w}'(-1) = 0, \\ U_3(\mathbf{w}) &\equiv \mathbf{w}(1) = 0, \\ U_4(\mathbf{w}) &\equiv \mathbf{w}'(1) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

то есть областью его определения служит линейное многообразие  $\mathcal{D} \subset C^4[-1, 1]$ , задаваемое условиями (1.32), и для любого  $\mathbf{w} \in \mathcal{D}$

$$L\mathbf{w} = l(\mathbf{w}).$$

Нас интересуют значения параметров  $\alpha, c$  при которых уравнение

$$L\mathbf{w} = 0 \quad (1.33)$$

имеет ненулевые решения. Таким образом, мы имеем дело с нелинейной задачей на собственные значения.

Прежде всего отметим, что размерность всякого собственного подпространства заведомо не превосходит 4. Кроме того, заметим, что если функция  $\mathbf{w}(y)$  удовлетворяет уравнению (1.33), то ему также удовлетворяет и функция  $\mathbf{w}(-y)$ , а следовательно, и функции  $(\mathbf{w}(y) \pm \mathbf{w}(-y)) / 2$  — четная и нечетная. Отсюда следует, что базис всякого собственного подпространства можно составить из четных и нечетных функций. В частности, это значит, что достаточно ограничиться поиском четных и нечетных собственных функций.

Обозначим через

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(y, \alpha, c), \\ \mathbf{w}_2(y, \alpha, c), \\ \mathbf{w}_3(y, \alpha, c), \\ \mathbf{w}_4(y, \alpha, c) \end{aligned}$$

фундаментальную систему решений дифференциального уравнения

$$l(y) = 0,$$

определенную начальными условиями

$$\mathbf{w}_j^{(k-1)}|_{y=-1} = \delta_{jk} \quad (1.34)$$

( $\delta_{jk}$  — символ Кронекера). Эти решения непрерывно по совокупности переменных зависят от  $\alpha, c$ , а при фиксированном  $\alpha$  являются аналитическими функциями от  $c$ .

Составим характеристический определитель

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha, c) &= \\ &= \begin{vmatrix} U_1(\mathbf{w}_1) & U_1(\mathbf{w}_2) & U_1(\mathbf{w}_3) & U_1(\mathbf{w}_4) \\ U_2(\mathbf{w}_1) & U_2(\mathbf{w}_2) & U_2(\mathbf{w}_3) & U_2(\mathbf{w}_4) \\ U_3(\mathbf{w}_1) & U_3(\mathbf{w}_2) & U_3(\mathbf{w}_3) & U_3(\mathbf{w}_4) \\ U_4(\mathbf{w}_1) & U_4(\mathbf{w}_2) & U_4(\mathbf{w}_3) & U_4(\mathbf{w}_4) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{w}_1(-1) & \mathbf{w}_2(-1) & \mathbf{w}_3(-1) & \mathbf{w}_4(-1) \\ \mathbf{w}'_1(-1) & \mathbf{w}'_2(-1) & \mathbf{w}'_3(-1) & \mathbf{w}'_4(-1) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{w}_3(-1) & \mathbf{w}_4(-1) \\ \mathbf{w}'_3(-1) & \mathbf{w}'_4(-1) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Определитель  $\Delta(\alpha, c)$  непрерывно зависит от  $\alpha, c$  и аналитически зависит от  $c$  при фиксированном  $\alpha$ . Известно (см. [10]), что собственные значения уравнения (1.33) и только они являются решениями уравнения

$$\Delta(\alpha, c) = 0. \quad (1.36)$$

В частности, из свойств аналитических функций следует, что при фиксированном  $\alpha$  определитель  $\Delta$  либо тождественно равен 0, либо обращается в 0 не более чем в счетном множестве значений  $c$ , которое не имеет предельных точек. Кроме того, известно, что простым корням уравнения (1.36) соответствуют одномерные собственные подпространства (подробнее см. [10]).

Уравнение (1.36) затруднительно использовать для нахождения собственных значений, поскольку неизвестен явный вид этой функции: значения решений  $\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$  и их производных, из которых составлен этот определитель, могут быть найдены лишь численно. Смотри также замечание 2.1 ниже.

В данной работе нами численно найдены ненулевые решения краевой задачи (1.26) — (1.28). После этого по этим решениям мы по

формулам (1.23) — (1.25) получаем решения исходной задачи (1.8) — (1.10). Далее на основе этого нами получена визуализация аттракторов для данной задачи при различных значениях параметров  $\nu$  и  $\varkappa$ . Важно отметить, что полученные результаты согласуются с ранее известными результатами для системы Навье—Стокса. А именно, в работах [11], [12] — [15] для системы Навье—Стокса были получены результаты об устойчивости малых возмущений. Для этого похожим способом было получено уравнение, которое в данное время носит название уравнения Орра—Зоммерфельда, и многочисленными способами были получены численные решения этого уравнения. Рассматриваемая нами система (0.4) — (0.6) близка к системе Навье—Стокса при очень малых временах запаздывания  $\varkappa$ . И, несмотря на то, что метод, использованный нами, отличается от методов, предложенных в работах [11], [12] — [15], при малых значениях параметра  $\varkappa$  полученные нами результаты согласуются с уже имеющимися.

## 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1.26)—(1.28)

В этом параграфе мы находим численные решения краевой задачи (1.26)—(1.28) при различных значениях параметров  $\nu$  и  $\varkappa$ .

### 2.1 ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Для нахождения решений краевой задачи (1.26) — (1.28) мы выделим старшую производную из уравнения (1.26).

На отрезке  $y \in [-1, 1]$  рассмотрим дифференциальное выражение

$$l_0(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^{IV}. \quad (2.1)$$

На линейном многообразии  $\mathfrak{D}$ , задаваемом краевыми условиями (1.27) — (1.30), дифференциальное выражение (2.1) задает дифференциальный оператор, который обозначим через  $L_0$ . Нас будут интересовать спектральные свойства этого оператора.

Заметим, что оператор  $L_0$  является (формально) самосопряженным. Действительно, возьмем произвольную функцию  $\mathbf{z} \in C^4[-1, 1]$ , умножим дифференциальное выражение (2.1) на  $\bar{\mathbf{z}}$  и 4 раза проинтегрируем произведение по частям; получаем формулу Лагранжа:

$$\int_{-1}^1 \mathbf{w}^{IV} \bar{\mathbf{z}} dy = \mathbf{w}(-1) \bar{\mathbf{z}}'''(-1) - \mathbf{w}'(-1) \bar{\mathbf{z}}''(-1) + \mathbf{w}''(-1) \bar{\mathbf{z}}'(-1) - \mathbf{w}'''(-1) \bar{\mathbf{z}}(-1) - \mathbf{w}(1) \bar{\mathbf{z}}'''(1) + \mathbf{w}'(1) \bar{\mathbf{z}}''(1) - \mathbf{w}''(1) \bar{\mathbf{z}}'(1) + \mathbf{w}'''(1) \bar{\mathbf{z}}(1) + \int_{-1}^1 \mathbf{w} \bar{\mathbf{z}}^{IV} dy,$$

то есть

$$\int_{-1}^1 l(\mathbf{w}) \bar{\mathbf{z}} dy = P(\eta, \zeta) + \int_{-1}^1 \overline{\mathbf{w}l(\mathbf{z})} dy, \quad (2.2)$$

где  $P(\eta, \zeta)$  — билинейная форма относительно значений функций  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{z}$  на концах отрезка. Отсюда видим, во-первых, что дифференциальное выражение (2.1) является самосопряженным, а во-вторых, что краевые условия (1.27) — (1.30) также являются самосопряженными. Следовательно, оператор  $L_0$ , порожденный этими дифференциальным выражением и краевыми условиями, самосопряжен.

Рассмотрим спектральную задачу

$$L_0 \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w},$$

то есть

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}^{IV} &= \lambda \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}(-1) &= 0, \\ \mathbf{w}'(-1) &= 0, \\ \mathbf{w}(1) &= 0, \\ \mathbf{w}'(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Отметим, что не всякое число  $\lambda$  является собственным значением этой задачи: например, при  $\lambda = 0$  задача (2.3) имеет, как легко видеть, только нулевое решение. Следовательно, *множество собственных значений оператора  $L_0$  не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек*; так как оператор  $L_0$  самосопряженный, то *все его собственные значения вещественны* (см. [10]).

Покажем, что оператор  $L_0$  положительно определен. Действительно,

$$\begin{aligned} (L\mathbf{w}, \mathbf{w}) &= \int_{-1}^1 \mathbf{w}^{IV} \overline{\mathbf{w}} dy = \\ &= \mathbf{w}'''(y) \overline{\mathbf{w}}(y) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \mathbf{w}'''(y) \overline{\mathbf{w}'(y)} dy = \\ &= - \int_{-1}^1 \mathbf{w}'''(y) \overline{\mathbf{w}'(y)} dy = -\mathbf{w}''(y) \overline{\mathbf{w}'(y)} \Big|_{-1}^1 + \\ &+ \int_{-1}^1 \mathbf{w}''(y) \overline{\mathbf{w}''(y)} dy = \int_{-1}^1 |\mathbf{w}''(y)|^2 dy \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что собственные значения оператора  $L_0$  положительны.

Заметим, что если  $\mathbf{w}(y)$  — собственная функция оператора  $L_0$ , то  $\mathbf{w}(-y)$  — также его собственная функция, а вместе с ними решениями задачи (2.3) являются и функции  $(\mathbf{w}(y) \pm \mathbf{w}(-y))/2$  (четная и нечетная). Следовательно, достаточно ограничиться поиском четных и нечетных собственных функций оператора  $L_0$ .

Общее решение уравнения

$$l_0(\mathbf{w}) - \lambda \mathbf{w} \equiv \mathbf{w}^{IV} - \lambda \mathbf{w} = 0$$

при  $\lambda > 0$  имеет вид

$$C_1 sh \mu y + C_2 \sin \mu y + C_3 ch \mu y + C_4 \cos \mu y,$$

где  $\mu = \sqrt[4]{\lambda} > 0$ . Следовательно, нечетные решения имеют вид

$$C_1 sh \mu y + C_2 \sin \mu y, \quad (2.4)$$

а четные имеют вид

$$C_3 ch \mu y + C_4 \cos \mu y. \quad (2.5)$$

Найдем значения  $\mu$ , при которых существует нетривиальное нечетное решение, удовлетворяет краевым условиям (1.27) — (1.30). В силу нечетности достаточно проверять краевые условия, относящиеся только к  $y = 1$ . Производная решения (2.4) равна

$$\mu C_1 ch \mu y + \mu C_2 \cos \mu y;$$

приравняв к нулю решение и его производную в точке  $y = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} C_1 sh \mu + C_2 \sin \mu = 0, \\ \mu C_1 ch \mu + \mu C_2 \cos \mu = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальные решения относительно  $C_1, C_2$  тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} sh \mu & \sin \mu \\ \mu ch \mu & \mu \cos \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение можно преобразовать к эквивалентному виду

$$tg \mu - th \mu = 0. \quad (2.6)$$

Отделим корни уравнения (2.6). Функция  $f(\mu) = tg \mu - th \mu$  определена на объединении интервалов

$$\left( -\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \quad (2.7)$$

по  $k \in \mathbb{Z}$ , и имеет производную  $tg^2 \mu + th^2 \mu$ , положительную везде, кроме единственной точки  $\mu = 0$ , поэтому эта функция возрастает

на каждом из интервалов (2.7). Предельные значения этой функции при приближении к концам интервалов равны  $\pm \infty$ , поэтому  $f(\mu)$  единственный раз обращается в 0 на каждом из интервалов. На интервале  $\left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ , соответствующем значению  $k = 0$ , имеем  $f(0) = 0$ , и поэтому  $f(\mu) > 0$  при  $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, при  $k = 1, 2, \dots$  на каждом из интервалов (2.7) лежит единственный корень уравнения (2.6), и это уравнение не имеет других положительных корней. Несложно вывести и асимптотическую формулу: из уравнения (2.6) следует

$$\mu = \text{arctg} \mu + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

откуда

$$\mu = \text{arctgth}(\text{arctgth} \mu + \pi k) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Интересующим нас положительным корням соответствуют  $k = 1, 2, \dots$  и нетрудно видеть, что при каждом из этих  $k$  решение последнего уравнения принадлежит интервалу (2.7). Так как

$$\text{th} x = 1 + O(e^{-2x}) \quad x \rightarrow \infty,$$

то

$$\text{th}(\text{arctgth} \mu + \pi k) = 1 + O(e^{-2\pi k}) \quad k \rightarrow \infty$$

равномерно по  $\mu$  в силу ограниченности величины  $\text{arctgth} \mu$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu &= \text{arctg}(1 + O(e^{-2\pi k})) + \pi k = \\ &= \frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}). \end{aligned}$$

Таким образом, собственные значения оператора  $L_0$ , с которыми ассоциированы нечетные собственные функции, имеют вид  $\lambda_k = \mu_k^4$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\mu_k$  — единственный корень уравнения (2.6), лежащий на интервале (2.7); собственные функции имеют вид (2.4), где коэффициенты  $C_1, C_2$  определяются из уравнения

$$C_1 sh \mu_k + C_2 \sin \mu_k = 0.$$

Имеет место асимптотическая формула

$$\mu_k = \frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}). \quad (2.8)$$

Случай четных собственных функций рассматривается аналогично, и результат имеет



следующий вид: собственные значения оператора  $L_0$ , с которыми ассоциированы четные собственные функции, имеют вид  $\lambda_k = v_k^4$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $v_k$  — единственный корень уравнения

$$tg v + th v = 0, \tag{2.9}$$

лежащий на интервале (2.7); собственные функции имеют вид (2.5), где коэффициенты  $C_3, C_4$  определяются из уравнения

$$C_3 ch v_k + C_4 \cos v_k = 0.$$

Имеет место асимптотическая формула

$$v_k = -\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}).$$

Отметим, что не существует положительных чисел, одновременно удовлетворяющих уравнениям (2.6) и (2.9). Действительно, если  $tg \xi \pm th \xi = 0$ , то  $th \xi = 0$  и  $\xi = 0$ . Следовательно, каждому собственному значению оператора  $L_0$  отвечает единственная собственная функция.

Численное решение уравнений (2.6) и (2.9) не представляет сложностей.

В следующей таблице приведены первые 10 собственных значений  $\lambda_k$  и собственных функций  $e_k$  оператора  $L$ , нормированных в  $L_2(-1, 1)$ .

Из общих результатов о разложениях в ряд Фурье по собственным функциям самосопряженных дифференциальных операторов (см. [10]) следует, что ортогональная система  $e_1, e_1, \dots$  полна в  $L_2(-1, 1)$ , и ряд Фурье по этой

системе каждой функции из  $\mathfrak{D}$  сходится к этой функции равномерно.

## 2.2 СХЕМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1.26) — (1.30).

Для отыскания собственных функций краевой задачи (1.26) — (1.30) был использован метод Фурье, то есть решение искалось в виде ряда:

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

точнее, мы находили его в виде конечного числа членов:

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^N a_k e_k, \tag{2.10}$$

В этом представлении для четной собственной функции  $\mathbf{w}$  коэффициенты при нечетных функциях  $e_k$  заведомо равны 0, а для нечетной — коэффициенты при четных функциях  $e_k$  равны 0.

Для нахождения собственных значений мы подставляем представление (2.10) для функции  $\mathbf{w}$  в уравнение (1.26), умножаем полученное выражение скалярно в  $L_2(-1, 1)$  на  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Отметим, что представление (2.10) автоматически удовлетворяет краевым условиям (1.27) — (1.30), поскольку каждая функция  $e_k$  является собственной функцией оператора  $L_0$  с такими же самыми граничными условиями.

Таким образом относительно коэффициентов  $a_k$  мы получим систему линейных однород-

Таблица 1

$k$	$\lambda_k$	$e_k$
1	31,28524384	$1,316992755 \cdot 10^{-1} ch(2,365020372y) + 0,9912897156 \cos(2,365020372y)$
2	237,7210675	$2,788573138 \cdot 10^{-2} sh(3,926602312y) + 1,000388732 \sin(3,926602312y)$
3	913,6018832	$5,792176773 \cdot 10^{-3} ch(5,497803919y) - 0,9999832253 \cos(5,497803919y)$
4	2496,487438	$1,204117398 \cdot 10^{-3} sh(7,068582746y) - 1,000000725 \sin(7,068582746y)$
5	5570,962979	$2,503110359 \cdot 10^{-4} ch(8,639379829y) + 0,9999999686 \cos(8,639379829y)$
6	10867,58220	$5,203455549 \cdot 10^{-5} sh(10,21017612y) + 1,000000001 \sin(10,21017612y)$
7	19263,02825	$1,081692132 \cdot 10^{-5} ch(11,78097245y) - 0,9999999996 \cos(11,78097245y)$
8	31780,09648	$2,248617022 \cdot 10^{-6} sh(13,35176878y) - 0,9999999998 \sin(13,35176878y)$
9	49587,69585	$4,674415538 \cdot 10^{-7} ch(14,92256510y) + 1,0 \cos(14,92256510y)$
10	74000,84933	$9,717155222 \cdot 10^{-8} sh(16,49336143y) + 1,0 \sin(16,49336143y)$

ных уравнений, коэффициенты которых являются многочленами от  $\alpha$  и  $c$ . Для того чтобы эта система имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы ее определитель  $D(\alpha, c)$  был равен нулю. Это и было положено в основу поиска собственных значений  $(\alpha, c)$ . Определитель  $D(\alpha, c)$  представляет собой многочлен от  $\alpha$ ,  $c$ . При решении уравнения

$$D(\alpha, c) = 0$$

положительному параметру  $\alpha$  давались различные значения, для которых численно находились комплексные корни получившегося многочлена от переменного  $c$ . Число этих корней равно  $N$  и, таким образом, получаются  $N$  непрерывных ветвей зависимости  $c$  от  $\alpha$ . При увеличении  $N$ , таким образом, добавляются новые ветви, но имевшиеся ветви фактически стабилизируются.

При этом в данной работе мы ограничились случаем  $N = 10$ . На самом деле нами была получена целая серия вычислений при различных значениях  $N$  от 6 до 16. При больших значениях  $N$  (обычно при  $N \geq 12$ ) полученная зависимость параметра  $c$  от параметра  $\alpha$  приобретала постоянный характер, причем  $\text{Im } c$  становилась отрицательной, что соответствует затуханию колебаний со временем. В результате большой серии вычислений было установлено, что наиболее содержательный случай возникает именно при  $N = 10$ . Когда на основе полученных значений  $\alpha$  и  $c$  вычислялось решение — функция  $\mathbf{w}$ , то члены в представлении (2.10) с индексами более 10 уже не вносили сколь-либо значимых изменений в значение  $\mathbf{w}$ . При этом во время вычислений имело место почти полное повторение получаемых значений при различном числе членов  $N$ , то есть если посчитать приближение для функции  $\mathbf{w}$  при  $N = 8$ , а затем посчитать при  $N = 10$ , то первые восемь коэффициентов по сути совпадут (разность будет близка к машинному нулю).

*Замечание 2.1.* В принципе метод Фурье имеет ограниченную применимость для численного нахождения собственных значений, так как он требует вычисления определителей высокого порядка. Однако полученные этим методом приближенные значения можно эффективно уточнять, основываясь на том обстоятельстве, что собственные значения являются решениями уравнения (1.36) (определитель  $\Delta(\alpha, c)$  определяется формулой (1.35)). Именно,

полученное методом Фурье значение  $(\alpha_0, c_0)$  можно считать первым приближением собственного значения. При  $\alpha = \alpha_0$  следующим приближением для  $c$  можно взять число

$$c_1 = c_0 - \frac{\Delta(\alpha_0, c_0)}{\Delta_c(\alpha_0, c_0)},$$

где  $\Delta_c$  обозначает производную определителя  $\Delta$  по второму аргументу.

Для вычисления определителя  $\Delta(\alpha_0, c_0)$  нужно найти численно решения  $w_3$ ,  $w_4$  уравнения (1.26) с начальными условиями (1.34), а для производной этого определителя по  $c$  нужно численно найти решение соответствующего уравнения в вариациях. Обе задачи не представляют существенных трудностей (если не получается сильно осциллирующее решение), и через некоторое число итераций определитель  $\Delta$  становится близок к машинному нулю.

В следующих разделах приведены результаты вычислений при различных значениях параметров  $\nu$  и  $\varkappa$ . В зависимости от этих значений изменяются свойства жидкости, описываемой исследуемой моделью. Первый случай — это  $\nu = \frac{1}{5772,22}$ ,  $\varkappa = 0,1 \cdot 10^{-7}$ . В этом

случае исследуемая система очень близка к системе Навье—Стокса, а уравнение для малых колебаний (1.26) будет не сильно отличаться от уравнения Орра—Зоммерфельда. Отметим, что результаты, полученные в следующем разделе полностью согласуются с известными ранее [15].

### 2.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1.26) — (1.28)

$$\text{ПРИ } \nu = \frac{1}{5772,22}, \quad \varkappa = 0,1 \cdot 10^{-7}.$$

В данном случае при нахождении зависимости  $c$  от  $\alpha$  было получено 10 различных решений (как уже было сказано, мы рассматриваем (2.10) при  $N = 10$ ). Среди этих решений восемь являются «устойчивыми», то есть при всех  $\alpha > 0$  значение  $\text{Im } c < 0$ . Для примера мы приводим один из полученных графиков (рис. 1), остальные выглядят аналогично.

В этом случае мы не будем находить непосредственный вид решения, поскольку нас интересуют только аттракторы для исследуемой системы. Для этих же значений  $c$ , решения (1.23) — (1.25) для исходной системы будут затухающими со временем и поэтому интереса для нас не представляют.

Более интересны два графика (рис. 2 и рис. 3), на которых решение пересекает ось  $\text{Im}c$ .

Для каждого из случаев пересечения графика с осью  $\text{Im}c$  найдем соответствующее периодическое решение. При  $\alpha = 0,532$  находим  $c = 0,4570133353$ . Соответствующее этим собственным значениям решение имеет вид:

$$\begin{aligned} w_1 = & 0,946010828297543572e_2 + \\ & +(0,309551793724183288 - \\ & -0,00536341979325181962i)e_4 + \\ & +(0,0919042922784482074 - \\ & -0,0127887926857560044i)e_6 + \\ & +(0,0111185761233730772 - \\ & -0,0161237081327746876i)e_8 - \\ & -(0,00925911983045863558 + \\ & +0,0115392078366829584i)e_{10}. \end{aligned}$$

Здесь  $e_k$  — это собственные функции оператора  $L_0$ . Как видно из приведенного представления, полученное решение является нечетным.

При  $\alpha = 1,005953125$  получим, что  $c = 0,3559945864$ . Решение при таких собственных значениях будет следующим:

$$\begin{aligned} w_2 = & 0,990853414303858537e_1 + \\ & +(0,133181017781741073 - \\ & -0,000919782665162280356i)e_3 + \\ & +(0,0207337056565789700 - \\ & -0,00164204902792234979i)e_5 - \\ & -(0,00284717465939735362 + \\ & +0,00183114512943261779i)e_7 - \\ & -(0,005085626669481882162 + \\ & +0,00125534644031155204i)e_9. \end{aligned}$$

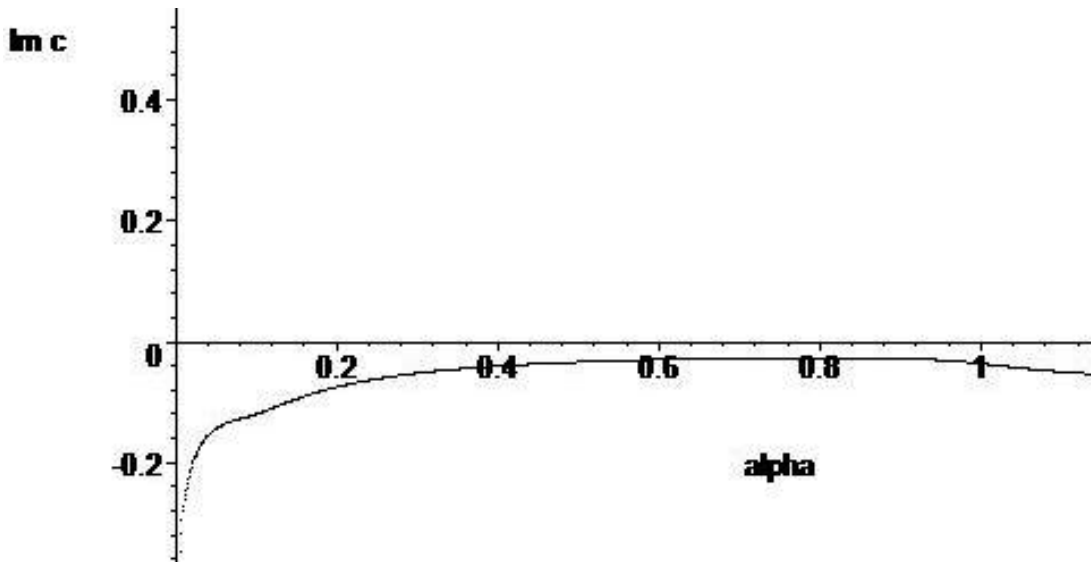


Рис. 1

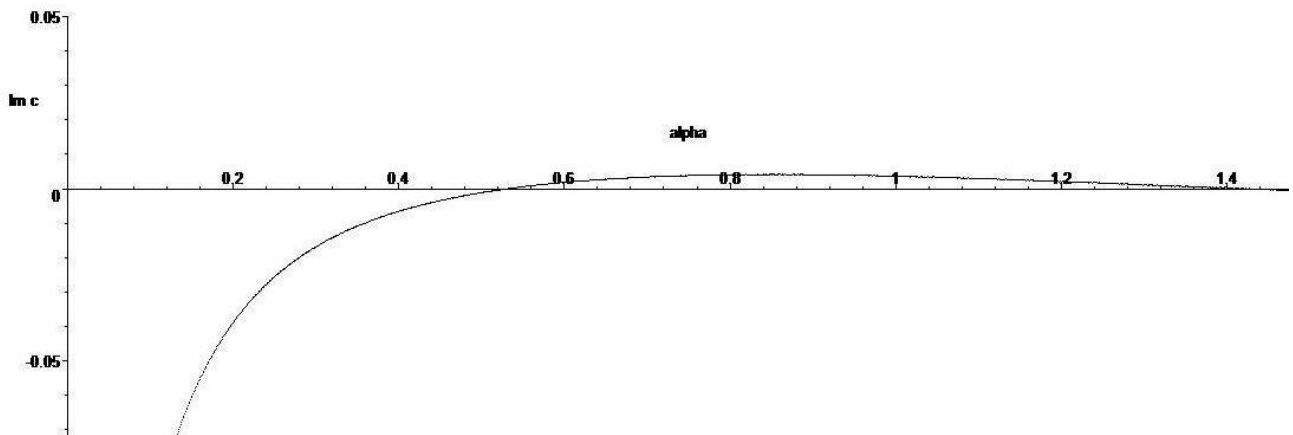


Рис. 2

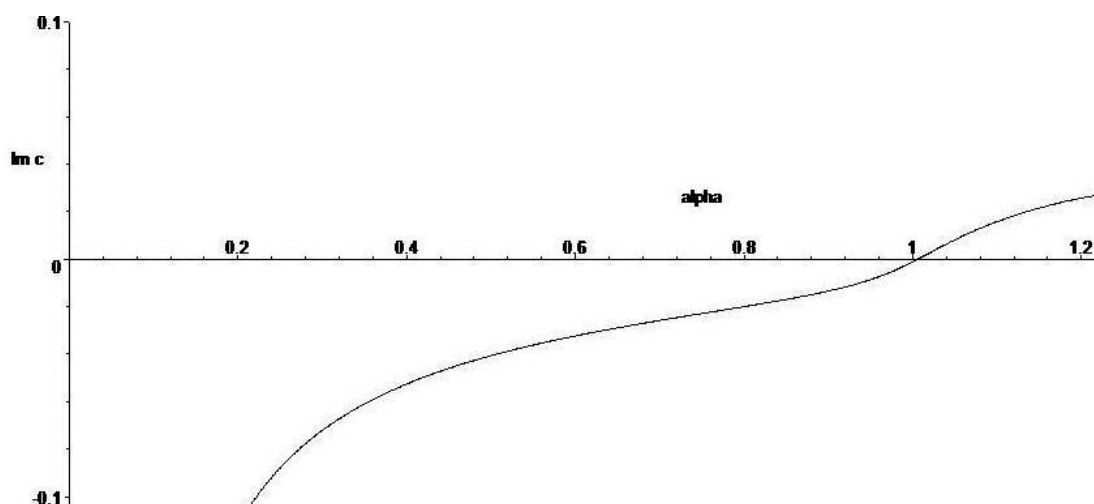


Рис. 3

Причем это решение уже будет четным, в отличие от решения  $w_1$ .

Наконец, для  $\alpha = 1,421$  имеем, что  $c = 0,4595294312$  и соответствующее решение  $w_3$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} w_3 = & 0,928133783222198306e_2 + \\ & +(0,353707628843797251 - \\ & -0,00222677474870314196i)e_4 + \\ & +(0,113895657238734016 - \\ & -0,00552402264632256835i)e_6 + \\ & +(0,0156114541899586498 - \\ & -0,00723441567749829630i)e_8 - \\ & -(0,0112463726437033000 + \\ & +0,00532583136848784750i)e_{10}. \end{aligned}$$

Отметим, что  $w_3$  будет нечетной функцией также как и  $w_1$ .

#### 2.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1.26)—(1.28)

ПРИ  $\nu = 0,0001$ ,  $\varkappa = 0,0001$ .

При значениях параметров  $\nu = 0,0001$ ,  $\varkappa = 0,0001$  аналогично предыдущему было получено 10 различных зависимостей  $c$  от  $\alpha$  (как уже было сказано, мы рассматриваем (2.10) при  $N = 10$ ). Среди этих решений как и в прошлом пункте восемь являются «устойчивыми», то есть при всех значениях параметра  $\alpha > 0$  мы имеем, что  $\text{Im } c < 0$ . Приведем один из графиков (рис. 4), полученных зависимостей (остальные выглядят аналогично):

Два оставшихся графика, на которых график решения пересекает ось  $\text{Im } c$  представлены на рис. 5 и 6).

Для каждого из случаев пересечения графика с осью  $\text{Im } c$  найдем соответствующее ему периодическое решение. При  $\alpha = 0,347140625$  получаем, что  $c = 0,4500455769$ . Решение, со-

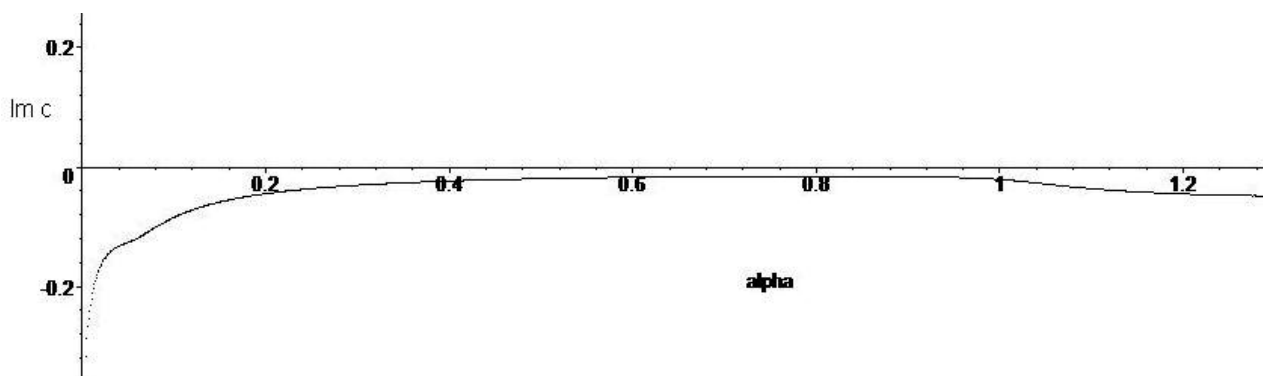


Рис. 4

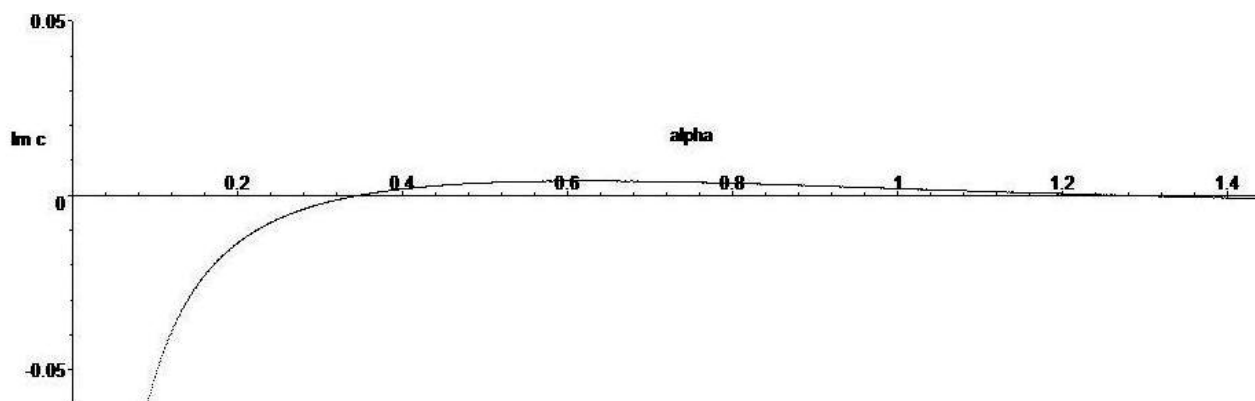


Рис. 5

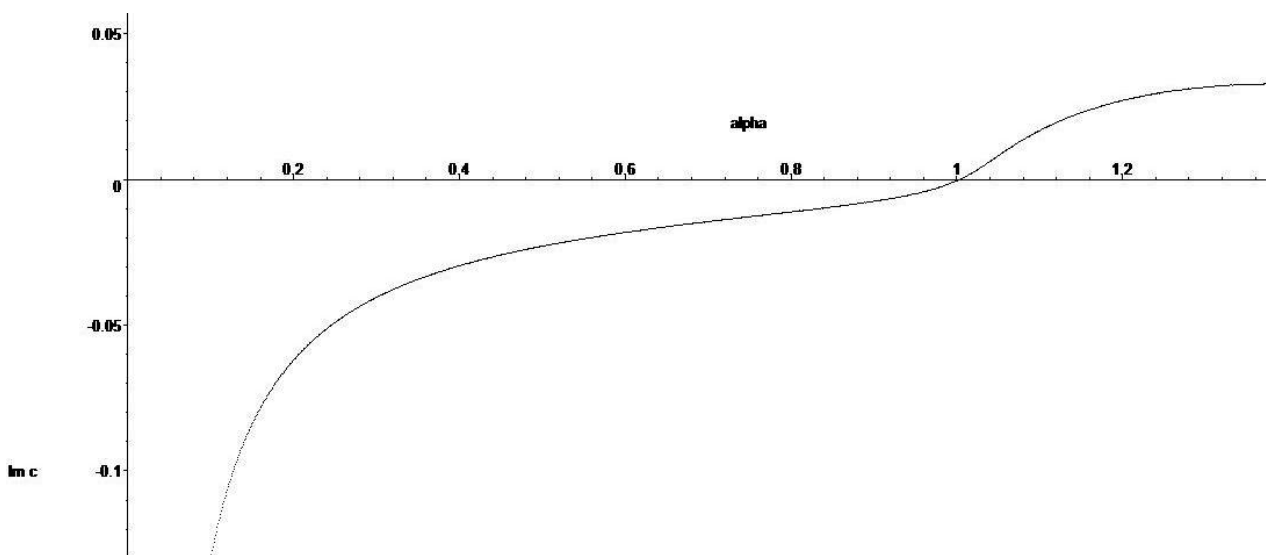


Рис. 6

ответствующее этим значениям  $\alpha$  и  $c$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_4 = & 0,945652897571301998e_2 + \\ & +(0,310143992620476427 - \\ & -0,00449348097372478940i)e_4 + \\ & +(0,0941274884187178057 - \\ & -0,0110474034495624748i)e_6 + \\ & +(0,0124247029152494173 - \\ & -0,0142680526767717149i)e_8 - \\ & -(0,00907040652339627038 + \\ & +0,0104334913598939337i)e_{10}, \end{aligned}$$

где  $e_k$  — это собственные функции оператора  $L$ . Из приведенного представления видно, что  $\mathbf{w}_4$  — нечетная функция.

При  $\alpha = 1,003695312$  получим, что  $c = 0,3531828748$ . При этих собственных зна-

чениях решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_5 = & 0,990662544488362773e_1 + \\ & +(0,134494412572750188 - \\ & -0,000569543194878639748i)e_3 + \\ & +(0,0215232368769952068 - \\ & -0,000976573990302693694i)e_5 - \\ & -(0,00259206099257544738 + \\ & +0,00108639871755822436i)e_7 - \\ & -(0,00509776561798508128 + \\ & +0,000749583899413754692i)e_9. \end{aligned}$$

Данное решение является четным.

Для значения параметра  $\alpha = 1,274$  имеем, что  $c = 0,4522447428$  и соответствующее решение  $\mathbf{w}_6$  имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_6 = & 0,930225048335144855e_2 + \\ & +(0,348449609064081068 - \\ & -0,00119695207776668312i)e_4 + \\ & +(0,113285416874402842 - \\ & -0,00330006205823793475i)e_6 + \\ & +(0,0164216666677512897 - \\ & -0,00449588465666764336i)e_8 - \\ & -(0,0108128107803986962 + \\ & +0,00339405667736338318i)e_{10}. \end{aligned}$$

Отметим, что как и  $\mathbf{w}_4$  решение  $\mathbf{w}_6$  будет нечетной функцией.

### 2.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1.26) — (1.27) ПРИ «БОЛЬШИХ» ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ $\nu$ И $\varkappa$ .

При значениях параметра  $\nu = 0,001$  и более различных значениях параметра  $\varkappa$  все 10 различных зависимостей  $s$  от  $\alpha$  являются «устойчивыми», то есть при всех значениях параметра  $\alpha > 0$  мы имеем, что  $\text{Im } s < 0$ . При-

ведем два характерных графика. Первый (рис. 7) из них получен при  $\nu = 0,001$ ,  $\varkappa = 0,001$ :

Второй из приводимых здесь графиков (рис. 8) соответствует значениям  $\nu = 0,01$ ,  $\varkappa = 0,1 \cdot 10^{-7}$ :

Таким образом, нами было численно получены результаты о том, что при увеличении параметра  $\nu$  (при  $\nu \geq 0,001$ ) все получаемые решения вида (1.23) — (1.25) являются затухающими. Это согласуется и с физическим смыслом задачи, на самом деле, параметр  $\nu$  отвечает за вязкость жидкости и при его увеличении естественно ожидать, что при малых возмущениях течение быстро придет в первоначальное установившееся состояние.

## 3. АТТРАКТОРЫ

### 3.1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ

Мы рассматриваем возмущения течения Пуазёйля вида

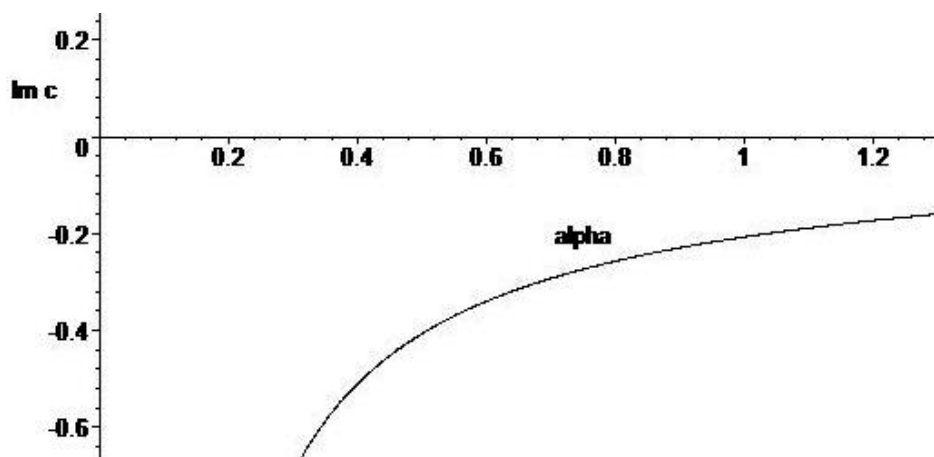


Рис. 7

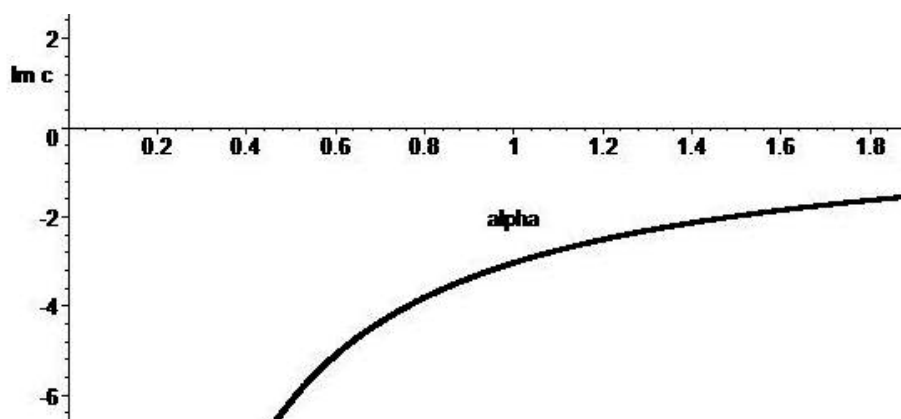


Рис. 8

$$\Phi(x, y, t) = \operatorname{Re}(\tilde{\Phi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}), \quad (3.1)$$

$$(x, y, t) \in [-R, R] \times [-1, 1] \times \mathbb{R}_+,$$

где  $\tilde{\Phi}(y) = (\mathbf{u}(y), \mathbf{w}(y), \mathbf{p}(y))$  — решение системы (1.14) — (1.16) с некоторыми значениями параметров  $\alpha > 0$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , а  $\operatorname{Re}$  в данном случае, как и ниже в аналогичных, означает взятие действительной части каждой компоненты вектора из пространства  $\mathbb{C}^3$ .

Пусть  $c = a + ib$ :  $a, b \in \mathbb{R}$ , тогда равенство (3.1) можно записать в виде

$$\Phi(x, y, t) = \left[ \operatorname{Re}(\tilde{\Phi}(y)e^{i\alpha(x-at)}) \right] e^{\alpha bt}. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что отсюда следует оценка

$$\max_{x,y} |\Phi(x, y, t)| = \max_{-1 \leq y \leq 1} |\tilde{\Phi}(y)| e^{\alpha bt}. \quad (3.3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |\Phi(x, y, t)| &= \left| \operatorname{Re} \tilde{\Phi}(y) e^{i\alpha(x-at)} \right| e^{\alpha bt} = \\ &= \left( \left( \operatorname{Re} \mathbf{u}(y) e^{i\alpha(x-at)} \right)^2 + \left( \operatorname{Re} \mathbf{w}(y) e^{i\alpha(x-at)} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \operatorname{Re} \mathbf{p}(y) e^{i\alpha(x-at)} \right)^2 \right)^{1/2} e^{\alpha bt} \leq \\ &\leq \left( |\mathbf{u}(y)|^2 + |\mathbf{w}(y)|^2 + |\mathbf{p}(y)|^2 \right)^{1/2} e^{\alpha bt} = \\ &= |\tilde{\Phi}(y)| e^{\alpha bt}, \end{aligned}$$

откуда и следует (3.3).

Из соотношений (3.2), (3.3) ясно, что ненулевые возмущения вида (3.1) по-разному ведут себя при  $t \rightarrow \infty$  в зависимости от  $\operatorname{Im} c$ : если  $\operatorname{Im} c < 0$ , то возмущение затухает, если  $\operatorname{Im} c = 0$ , то возмущение является периодическим, если же  $\operatorname{Im} c > 0$ , то амплитуда возмущения растет, и модель становится неприменима через конечный промежуток времени, поскольку система (1.14) — (1.16) получена в результате линеаризации и, следовательно, физический смысл имеют только малые возмущения. Таким образом, предельные режимы при  $t \rightarrow \infty$  имеет смысл изучать только для тех возмущений, которым соответствуют значения  $\operatorname{Im} c \leq 0$ . Пространство траекторий будет состоять из возмущений именно такого вида.

Отметим, что разумно определенный траекторный аттрактор должен содержать каждое периодическое возмущение. Пусть равенство (3.1) задает некоторое периодическое возмущение  $\Phi$ . Так как система (1.14) — (1.16) линейна, то при любом  $\lambda \in \mathbb{R}$  вектор-функция  $\lambda \tilde{\Phi}(y)$  является ее решением, откуда следует, что функция  $\lambda \Phi$  также является некоторым

периодическим возмущением. Если мы включим в траекторный аттрактор все функции вида  $\lambda \Phi$ , то он будет неограничен, что нежелательно. С другой стороны, функции вида  $\lambda \Phi$  уже не имеют физического смысла при больших  $|\lambda|$ . Следовательно, без ущерба для содержательной стороны можно ограничиться рассмотрением только таких возмущений, которые ограничены некоторой постоянной  $R_0$  (скажем,  $R_0 = 1$ ). Таким образом, множество всех функций, из которых будет строиться пространство траекторий, будем рассматривать ограниченным.

Каждое отдельное затухающее возмущение стремится со временем к нулю, то есть возмущенное течение приближается к течению Пуазейля. Однако надо отметить, что множество *всех* затухающих возмущений, ограниченных в совокупности постоянной  $R_0$ , не будет равномерно стремиться к нулю, так как скорость затухания определяется величиной  $\alpha \operatorname{Im} c$ , которая может быть сколь угодно близка к нулю. Таким образом, для выделения класса множеств, которые будут равномерно притягиваться к аттрактору, нужно учитывать значение величины  $\alpha \operatorname{Im} c$  для соответствующих возмущений. Это обстоятельство приводит к тому, что элементами пространства траекторий должны быть пары, состоящие из функции и числового параметра, характеризующего скорость затухания. В этом состоит основное отличие предлагаемого ниже подхода к пространствам траекторий и их аттракторам от подхода, осуществляемого в книгах [7], [8], [9] (есть и менее существенные технические различия).

### 3.2. АТТРАКТОРЫ ПРОСТРАНСТВА ТРАЕКТОРИЙ

Пусть  $E$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_E$ , и пусть  $C_b(\mathbb{R}_+, E)$  — пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на  $\mathbb{R}_+$  и принимающих значения в  $E$ , с нормой

$$\|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}_+, E)} = \sup_{t \geq 0} \|\varphi(t)\|_E.$$

На пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+, E)$  действуют линейные ограниченные операторы сдвига  $\mathbf{T}(t)$  ( $t \geq 0$ ) по следующему правилу:

$$(\mathbf{T}(t)\varphi)(s) = \varphi(s+t) \quad (s \geq 0).$$

Очевидно, что  $\mathbf{T}(t_1)\mathbf{T}(t_2) = \mathbf{T}(t_1+t_2)$ , и  $\mathbf{T}(0)$  — тождественный оператор; семейство  $\{\mathbf{T}(t)\}_{t \geq 0}$  называется *полугруппой трансляций*.

Будем рассматривать также пространство  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$  с нормой

$$\|(\varphi, \gamma)\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}} = \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} + |\gamma|. \quad (3.4)$$

Для всякого множества  $P \subset C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$  будем обозначать

$$\tilde{P} = \{\varphi : (\varphi, \gamma) \in P\}.$$

При этом множество  $\tilde{P}$  нередко будем рассматривать как подпространство метрического пространства  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ .

На пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$  зададим операторы сдвига формулой

$$T(t)(\varphi, \gamma) = (T(t)\varphi, \gamma) \quad (t \geq 0).$$

Множество  $P$  из  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$  или из  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$  будем называть трансляционно инвариантным, если

$$T(t)P \subset P \quad (t \geq 0),$$

и строго трансляционно инвариантным, если

$$T(t)P = P \quad (t \geq 0),$$

Рассмотрим некоторое непустое множество

$$\mathcal{H}^+ \subset C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R},$$

которое будем называть пространством траекторий; каждый элемент  $(\varphi, \gamma) \in \mathcal{H}^+$  будем называть траекторией.

**Определение 3.1.** Будем называть множество  $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{H}}^+$  траекторным аттрактором пространства  $\mathcal{H}^+$ , если оно обладает следующими свойствами:

(i) множество  $\mathcal{U}$  замкнуто в  $\tilde{\mathcal{H}}^+$  и ограничено в норме пространства  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ ;

(ii) множество  $\mathcal{U}$  строго трансляционно инвариантно;

(iii) для любого множества  $B \subset \mathcal{H}^+$ , ограниченного в пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ , выполняется условие притягивания:

$$\sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \|T(t)\varphi - \psi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.5)$$

**Определение 3.2.** Будем называть множество  $\mathcal{A} \subset E$  фазовым аттрактором пространства  $\mathcal{U}$ , если оно обладает следующими свойствами:

(i) множество  $\mathcal{A}$  замкнуто и ограничено в  $E$ ;

(ii) для любого множества  $B \subset \mathcal{H}^+$ , ограниченного в пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ , выполняется условие притягивания:

$$\sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{f \in \mathcal{A}} \|\varphi(t) - f\|_E \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.6)$$

Фазовый аттрактор будем называть минимальным, если он удовлетворяет условию

(iii) множество  $\mathcal{A}$  является наименьшим (по включению), удовлетворяющим условиям (i), (ii).

*Замечание 3.1.* Очевидно, что если минимальный фазовый аттрактор существует, то он единственный, а любое его надмножество, удовлетворяющее условию (i) определения 3.2, является фазовым аттрактором.

**Лемма 3.1.** Пусть существует траекторный аттрактор  $\mathcal{U}$  пространства траекторий  $\mathcal{H}^+$ . Тогда для любого строго трансляционно инвариантного множества  $B \subset \mathcal{H}^+$ , ограниченного в  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ , множество  $\tilde{B}$  содержится в  $\mathcal{U}$ .

*Доказательство.* Обозначим  $O_\varepsilon$   $\varepsilon$ -окрестность аттрактора  $\mathcal{U}$  в пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ . Для множества  $B$  выполнено условие притягивания (3.5). В левой части предельного соотношения (3.5) записано полуотклонение множества  $T(t)\tilde{B}$  от  $\mathcal{U}$  в пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ , поэтому геометрически это условие означает включение

$$T(t)\tilde{B} \subset O_\varepsilon, \quad t \geq t_\varepsilon. \quad (3.7)$$

Строгая трансляционная инвариантность множества  $B$  эквивалентна строгой трансляционной инвариантности множества  $\tilde{B}$ , поэтому имеем

$$T(t)\tilde{B} = \tilde{B} \quad (t \geq 0).$$

Отсюда и из (3.7) делаем вывод, что

$$\tilde{B} \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} O_\varepsilon.$$

Стоящее в правой части пересечение всех  $\varepsilon$ -окрестностей множества  $\mathcal{U}$  является замыканием  $\bar{\mathcal{U}}$  этого множества в пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ . Таким образом, множество  $\tilde{B}$  содержится в  $\mathcal{U}$  и в  $\tilde{\mathcal{H}}^+$ , то есть в замыкании  $\mathcal{U}$  в  $\mathcal{H}^+$  как подпространстве пространства  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ . В силу замкнутости аттрактора в  $\mathcal{H}^+$  получаем  $\tilde{B} \subset \mathcal{U}$ , что и требовалось доказать. ■

**Следствие 3.1.** Траекторный аттрактор единственен.

Пусть  $P \subset C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ . Множество

$$P(t) = \{\varphi(t) : (\varphi, \gamma) \in P\} \subset E$$

назовем сечением множества  $P$ .

**Лемма 3.2.** Пусть  $\mathcal{U}$  — траекторный аттрактор пространства  $\mathcal{H}^+$ . Тогда замыка-



ние  $[\mathcal{U}(t)]_E$  сечения  $\mathcal{U}(t)$  в пространстве  $E$  не зависит от  $t \geq 0$  и является фазовым аттрактором пространства  $\mathcal{H}^+$ .

*Доказательство.* Так как траекторный аттрактор по определению трансляционно инвариантен, то

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t) &= \{\varphi(t) : \varphi \in \mathcal{U}\} = \{(T(t)\varphi)(0) : \varphi \in \mathcal{U}\} = \\ &= (T(t)\mathcal{U})(0) = \mathcal{U}(0). \end{aligned}$$

Таким образом, сечение  $\mathcal{U}(t)$  не зависит от  $t \geq 0$ . Следовательно, его замыкание  $[\mathcal{U}(t)]_E$  также не зависит от  $t \geq 0$ . Обозначим это сечение буквой  $\mathcal{A}$ .

Покажем, что  $\mathcal{A}$  — фазовый аттрактор.

Множество  $\mathcal{U}$  ограничено в  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ , поэтому множество  $\mathcal{U}(0)$  ограничено в  $E$ . Следовательно, замыкание  $\mathcal{A}$  этого множества замкнуто и ограничено в  $E$ , то есть удовлетворяет условию (i) определения 3.2.

Проверим выполнение условия (ii) определения 3.2. Пусть  $B \subset \mathcal{H}^+$  — множество, ограниченное в пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ . Для этого множества выполняется условие (3.5), поэтому имеем

$$\begin{aligned} &\sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{f \in \mathcal{A}} \|\varphi(t) - f\|_E \leq \\ &\leq \sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \|T(t)\varphi(0) - \psi(0)\|_E \leq \\ &\leq \sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \|T(t)\varphi - \psi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} \rightarrow 0 \\ &\quad (t \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

### 3.3. АТТРАКТОРЫ ПРОСТРАНСТВА ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим замкнутую область

$$\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x \leq R, -1 \leq y \leq 1\}.$$

В качестве фазового пространства примем банахово пространство  $E = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ , состоящее из непрерывных ограниченных вектор-функций, определенных на  $\bar{\Omega}$ , с нормой

$$\|u\|_E = \max_{(x, y) \in \bar{\Omega}} |u(x, y)|.$$

**Определение 3.3.** *Пространством траекторий системы (1.14)–(1.16) или пространством возмущений* будем называть множество

$$\mathcal{H}^+ \subset C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R},$$

состоящее из пар  $(\varphi, \gamma)$ , где функция  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}_+; E)$  задается равенством

$$\varphi(t)(x, y) = \Phi(x, y, t), \quad (3.8)$$

в правой части которого стоит возмущение вида (3.1), соответствующее некоторым значениям параметров  $\alpha > 0$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } c \leq 0$ , которое удовлетворяет неравенству

$$|\Phi(x, y, t)| \leq R_0(x, y, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+,$$

с раз и навсегда установленной постоянной  $R_0$  (например,  $R_0 = 1$ ); число же  $\gamma \geq 0$  определяется следующим образом:

$$\gamma = \begin{cases} (-\alpha \text{Im } c)^{-1}, & \text{если } \text{Im } c < 0, \\ 0, & \text{если } \text{Im } c = 0. \end{cases}$$

*Замечание 3.2.* Пространство траекторий непусто: оно заведомо содержит пару  $(0, 0)$ , где первый нуль означает возмущение, тождественно равное нулю.

*Замечание 3.3.* Множество  $\mathcal{H}^+$  ограничено в  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ : для любой функции  $\varphi \in \mathcal{H}^+$  имеем

$$\|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} \leq R_0.$$

*Замечание 3.4.* Пространство траекторий трансляционно инвариантно, то есть

$$T(\tau)(\mathcal{H}^+) \subset \mathcal{H}^+ \quad (\tau \geq 0).$$

Пусть  $(\varphi, \gamma) \in \mathcal{H}^+$ ; докажем включение

$$T(\tau)(\varphi, \gamma) = (T(\tau)\varphi, \gamma) \in \mathcal{H}^+.$$

По определению имеем

$$\varphi(t)(x, y) = \text{Re}(\tilde{\Phi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}),$$

где  $\tilde{\Phi}(y)$  — некоторое решение системы (1.14) — (1.16), соответствующее определенным значениям параметров  $\alpha > 0$  и  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } c \leq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} (T(\tau)\varphi)(t)(x, y) &= \varphi(t + \tau)(x, y) = \\ &= \text{Re}(\tilde{\Phi}(y)e^{i\alpha(x-c(t+\tau))}) = \\ &= \text{Re}\left[\left[e^{-i\alpha c\tau}\tilde{\Phi}(y)\right]e^{i\alpha(x-ct)}\right]. \end{aligned}$$

Так как система (1.14) — (1.16) линейна, то функция  $e^{-i\alpha c\tau}\tilde{\Phi}(y)$  является ее решением (при тех же  $\alpha$ ,  $c$ , что и  $\tilde{\Phi}$ ), причем

$$\begin{aligned} &\left|e^{-i\alpha c\tau}\tilde{\Phi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}\right| = \\ &= \left|e^{-i\alpha c\tau}\tilde{\Phi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}\right| \leq \\ &\leq e^{\alpha \text{Im } c\tau} R_0 \leq R_0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $(T(\tau)\varphi, \gamma) \in \mathcal{H}^+$ , что и требовалось доказать.

Далее для удобства будем отдельно рассматривать затухающие и периодические возмущения: положим

$$\mathcal{H}_1^+ = \{(\varphi, \gamma) \in \mathcal{H}^+ : \gamma > 0\};$$

$$\mathcal{H}_2^+ = \{(\varphi, \gamma) \in \mathcal{H}^+ : \gamma = 0\}.$$

*Замечание 3.5.* Так как нулевое возмущение существует при любых допустимых значениях параметров  $\alpha, c$ , то множества  $\mathcal{H}_1^+, \mathcal{H}_2^+$  непусты. Очевидно, что их объединением будет все пространство  $\mathcal{H}^+$ .

**Лемма 3.3.** Для любой траектории  $(\varphi, \gamma) \in \mathcal{H}_1^+$  имеет место оценка

$$\|\varphi(t)\|_E \leq R_0 e^{-t/\gamma} \quad (t \geq 0). \quad (3.9)$$

*Доказательство.* Утверждение немедленно следует из определения пространства траекторий и оценки (3.3). ■

**Лемма 3.4.** Траекторным аттрактором пространства траекторий  $\mathcal{H}_1^+$  является множество  $\mathcal{U}_1 = \{0\}$ , состоящее из нулевого возмущения (принадлежащего  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ ). Минимальным фазовым аттрактором пространства  $\mathcal{H}_1^+$  является множество  $\mathcal{A}_1 = \{0\}$ , состоящее из нулевой функции (принадлежащей  $E$ ).

*Доказательство.* Выполнение для  $\mathcal{H}_1^+$  условий (i) и (ii) определения 3.1 очевидно. Проверим условие (iii) этого определения. Пусть  $B \subset \mathcal{H}^+$  — множество, ограниченное в  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ . Тогда  $B$  состоит из пар  $(\varphi, \gamma)$ , где  $0 < \gamma \leq \gamma_0$ ,  $\gamma_0$  — некоторое число. Для всякой такой пары с учетом леммы 3.3 при всех  $s \geq 0$  имеем

$$\|\varphi(t)\|_E \leq R_0 e^{-t/\gamma} \leq R_0 e^{-t/\gamma_0}. \quad (3.10)$$

С помощью этой оценки получаем

$$\begin{aligned} \sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{\psi \in \mathcal{U}_1} \|T(t)\varphi - \psi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} &= \\ = \sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \sup_{s \geq 0} \|\varphi(s+t)\|_E &\leq R_0 e^{-t/\gamma_0} \rightarrow 0 \\ (t \rightarrow \infty), & \end{aligned}$$

что и означает выполнение условия (3.5).

Нетрудно показать, что  $\mathcal{A}_1$  — фазовый аттрактор. Действительно, условие (i) определения 3.2 для  $\mathcal{A}_1$ , очевидно, выполняется. Свойство притягивания (ii) следует из оценки (3.10):

$$\begin{aligned} \sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{f \in \mathcal{A}_1} \|\varphi(t) - f\|_E &= \\ = \sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \|\varphi(t)\|_E &\leq R_0 e^{-t/\gamma_0} \rightarrow 0 \\ (t \rightarrow \infty). & \end{aligned}$$

Выполнение условия минимальности (iii) этого определения очевидно. ■

**Лемма 3.5.** Множество  $\mathcal{H}_2^+$  строго трансляционно инвариантно, то есть

$$\Gamma(t)\mathcal{H}_2^+ = \mathcal{H}_2^+ \quad (t \geq 0).$$

*Доказательство.* Пусть  $t \geq 0$ . Для любой траектории  $(\varphi, 0) \in \mathcal{H}_2^+$  имеем

$$\Gamma(t)(\varphi, 0) = (\Gamma(t)\varphi, 0) \in \mathcal{H}_2^+,$$

откуда следует включение

$$\Gamma(t)\mathcal{H}_2^+ \subset \mathcal{H}_2^+.$$

Докажем обратное включение. Пусть  $(\varphi, 0) \in \mathcal{H}_2^+$ . Из определения множества  $\mathcal{H}_2^+$  следует, что функция  $\varphi$  периодична. Пусть  $t_0 > t$  — некоторый ее период. По доказанному имеем

$$\Gamma(t_0 - t)(\varphi, 0) \in \mathcal{H}_2^+.$$

Теперь, пользуясь периодичностью функции  $\varphi$ , получаем

$$\begin{aligned} (\varphi, 0) &= (\Gamma(t_0), 0) = (\Gamma(t)\Gamma(t_0 - t)\varphi, 0) = \\ &= \Gamma(t)\Gamma(t_0 - t)(\varphi, 0) \in \Gamma(t)\mathcal{H}_2^+. \end{aligned}$$

В силу произвольности  $(\varphi, 0)$  получаем требуемое включение

$$\mathcal{H}_2^+ \subset \Gamma(t)\mathcal{H}_2^+.$$

Строгая трансляционная инвариантность множества  $\mathcal{H}_2^+$  доказана. ■

**Лемма 3.6.** Множество  $\tilde{\mathcal{H}}_2^+$  замкнуто в  $\tilde{\mathcal{H}}^+$ .

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность  $\{\varphi_m\} \subset \tilde{\mathcal{H}}_2^+$ , сходящуюся к функции  $\varphi \in \tilde{\mathcal{H}}^+$  по норме пространства  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ . Требуется доказать включение  $\varphi \in \tilde{\mathcal{H}}_2^+$ . Предположим, что это неверно. Тогда  $\varphi \in \tilde{\mathcal{H}}_1^+$ , и, следовательно, для функции  $\varphi$  выполнено неравенство (3.9) с некоторым  $\gamma > 0$ .

Возьмем число  $\varepsilon > 0$ . Из неравенства (3.9) следует, что существует такое  $t_0$ , что при всех  $t \geq t_0$  выполняется неравенство

$$\|\varphi(t)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.11)$$

Из равномерной сходимости последовательности  $\{\varphi_m\}$  следует, что найдется такое  $m_0$ , что при  $m \geq m_0$  выполняется неравенство

$$\|\varphi_m(t) - \varphi(t)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.12)$$

Из (3.11), (3.12) следует, что при  $m \geq m_0$ ,  $t \geq t_0$  выполняется неравенство

$$\|\varphi_m(t)\|_E < \varepsilon.$$

Однако функции  $\varphi_m$  периодичны, поэтому это неравенство выполняется при всех  $t \geq 0$

( $m \geq m_0$ ). Это означает, что последовательность  $\{\varphi_m\}$  равномерно сходится к 0, то есть

$$\varphi = 0 \in \tilde{\mathcal{H}}_2^+,$$

что противоречит предположению  $\varphi \notin \tilde{\mathcal{H}}_2^+$ . Полученное противоречие доказывает утверждение. ■

**Лемма 3.7.** Множество  $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{H}}_2^+$  является траекторным аттрактором пространства траекторий  $\tilde{\mathcal{H}}_2^+$ .

*Доказательство.* Выполнение для  $\mathcal{U}$  условий (i) и (iii) определения 3.1 очевидно, а условие (ii) эквивалентно утверждению леммы 3.5. ■

**Лемма 3.8.** Множество

$$\mathcal{A} = [\mathcal{U}(t)]_E$$

является минимальным фазовым аттрактором пространства  $\mathcal{H}_2^+$ .

*Доказательство.* По лемме 3.2 множество  $[\mathcal{U}(t)]_E$  не зависит от  $t \geq 0$  и является фазовым аттрактором пространства  $\mathcal{H}_2^+$ . Таким образом, остается проверить выполнение для  $\mathcal{A}$  условия минимальности (iii) определения 3.2. Пусть некоторое множество  $\mathcal{A}_1$  удовлетворяет условиям (i) и (ii) этого определения. Пространство  $\mathcal{H}_2^+$  ограничено в  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ , поэтому оно притягивается к  $\mathcal{A}_1$  в том смысле, что

$$\sup_{(\varphi, 0) \in \mathcal{H}_2^+} \inf_{f \in \mathcal{A}_1} \|\varphi(t) - f\|_E \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

$$(t \rightarrow \infty).$$

Однако в силу строгой трансляционной инвариантности пространства  $\mathcal{H}_2^+$  (лемма 3.5) при  $t \geq 0$  имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{(\varphi, 0) \in \mathcal{H}_2^+} \inf_{f \in \mathcal{A}_1} \|\varphi(t) - f\|_E = \\ &= \sup_{(\varphi, 0) \in \mathcal{H}_2^+} \inf_{f \in \mathcal{A}_1} \|\Gamma(t)\varphi(0) - f\|_E = \\ &= \sup_{(\psi, 0) \in \Gamma(t)\mathcal{H}_2^+} \inf_{f \in \mathcal{A}_1} \|\psi(0) - f\|_E = \\ &= \sup_{(\psi, 0) \in \mathcal{H}_2^+} \inf_{f \in \mathcal{A}_1} \|\psi(0) - f\|_E. \end{aligned}$$

Последний член в этой цепочке равенств не зависит от  $t$ , что согласуется с (3.13) только если

$$\sup_{(\psi, 0) \in \mathcal{H}_2^+} \inf_{f \in \mathcal{A}_1} \|\psi(0) - f\|_E = 0,$$

то есть

$$\inf_{f \in \mathcal{A}_1} \|\psi(0) - f\|_E = 0$$

для всех  $(\psi, 0) \in \mathcal{H}_2^+$ . Однако левая часть этого равенства представляет собой расстояние в

метрическом пространстве  $E$  от точки  $\psi(0)$  до множества  $\mathcal{A}_1$ . В этом пространстве множество  $\mathcal{A}_1$  замкнуто, поэтому расстояние может быть равно 0 только если  $\psi(0) \in \mathcal{A}_1$ . Это верно для всех  $(\psi, 0) \in \mathcal{H}_2^+$ , поэтому

$$\mathcal{H}_2^+(0) \subset \mathcal{A}_1,$$

а тогда и

$$\mathcal{A} = [\mathcal{H}_2^+(0)]_E \subset \mathcal{A}_1$$

в силу замкнутости  $\mathcal{A}_1$ . Минимальность аттрактора  $\mathcal{A}$  доказана. ■

*Замечание 3.6.* Множество  $\mathcal{A}$  является также фазовым пространством пространства траекторий  $\mathcal{H}_1^+$ , так как оно содержит нулевую функцию  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  (см. замечание 3.1).

**Теорема 3.1.** Множество  $\mathcal{U}$  является траекторным аттрактором пространства возмущений  $\mathcal{H}^+$ , а множество  $\mathcal{A}$  является его минимальным фазовым аттрактором.

*Доказательство.* Проверим выполнение для множества  $\mathcal{U}$  условий определения 3.1. Это множество является траекторным аттрактором пространства  $\mathcal{H}_2^+$ , поэтому оно строго трансляционно инвариантно и ограничено в норме пространства  $C_b(\mathbb{R}_+; E)$ . По лемме 3.6 оно замкнуто в  $\mathcal{H}^+$ . Таким образом, условия (i) и (ii) выполняются.

Проверим условие притягивания (iii). Пусть  $B \subset \mathcal{H}^+$  — произвольное множество, ограниченное в пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+; E) \times \mathbb{R}$ . Представим это множество в виде объединения  $B = B_1 \cup B_2$ , где

$$\begin{aligned} B_1 &= B \cap \mathcal{H}_1^+, \\ B_2 &= B \cap \mathcal{H}_2^+. \end{aligned}$$

Так как  $\mathcal{U}$  — траекторный аттрактор пространства  $\mathcal{H}_2^+$ , то имеем

$$\sup_{(\varphi, \gamma) \in B_2} \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \|\Gamma(t)\varphi - \psi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} \rightarrow 0$$

$$(t \rightarrow \infty).$$

Так как  $\mathcal{U}$  содержит нулевую функцию, являющуюся траекторным аттрактором пространства  $\mathcal{H}_1^+$ , то имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{(\varphi, \gamma) \in B_1} \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \|\Gamma(t)\varphi - \psi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} \leq \\ & \leq \sup_{(\varphi, \gamma) \in B_1} \|\Gamma(t)\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}_+; E)} \rightarrow 0 \\ & (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \left\| \Gamma(t)\varphi - \psi \right\|_{C_b(\mathbb{R}_+, E)} = \\ & = \max \left\{ \sup_{(\varphi, \gamma) \in B_1} \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \left\| \Gamma(t)\varphi - \psi \right\|_{C_b(\mathbb{R}_+, E)}, \right. \\ & \left. \sup_{(\varphi, \gamma) \in B_2} \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \left\| \Gamma(t)\varphi - \psi \right\|_{C_b(\mathbb{R}_+, E)} \right\} \rightarrow 0 \\ & (t \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

и соотношение (3.5) доказано.

Покажем теперь, что  $\mathcal{A}$  — минимальный фазовый аттрактор пространства траекторий  $\mathcal{H}^+$ . Так как  $\mathcal{A}$  — фазовый аттрактор пространства  $\mathcal{H}_2^+$ , то это замкнутое и ограниченное в  $E$  множество, то есть условие (i) определения 3.2 выполнено. Проверим условие (ii) этого определения. Так как  $\mathcal{A}$  — глобальный аттрактор пространств  $\mathcal{H}_1^+$  и  $\mathcal{H}_2^+$  (лемма 3.7 и замечание 3.6), то для произвольного множества  $B \subset \mathcal{H}^+$ , ограниченного по норме пространства  $C_b(\mathbb{R}_+, E) \times \mathbb{R}$ , имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{(\varphi, \gamma) \in B} \inf_{f \in \mathcal{A}} \left\| \varphi(t) - f \right\|_E = \\ & = \max \left\{ \sup_{(\varphi, \gamma) \in B \cap \mathcal{H}_1^+} \inf_{f \in \mathcal{A}} \left\| \varphi(t) - f \right\|_E, \right. \\ & \left. \sup_{(\varphi, \gamma) \in B \cap \mathcal{H}_2^+} \inf_{f \in \mathcal{A}} \left\| \varphi(t) - f \right\|_E \right\} \rightarrow 0 \\ & (t \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

что и требовалось. Далее, всякий фазовый аттрактор  $\mathcal{A}_1$  пространства  $\mathcal{H}^+$  является также и фазовым аттрактором пространства  $\mathcal{H}_2^+ \subset \mathcal{H}^+$ , поэтому  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ , так что  $\mathcal{A}$  — минимальный фазовый аттрактор пространства  $\mathcal{H}^+$ . ■

#### 4. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРОВ

В этом параграфе мы приведем наши результаты, касающиеся визуализации аттракторов для исходной системы при рассмотренных ранее значениях параметров  $\nu$  и  $\varkappa$ .

Теорема 3.1 дает полное описание траекторного и минимального фазового аттракторов пространства возмущений: траекторный аттрактор состоит из периодических возмущений (включая нулевое), а минимальный фазовый — из значений возмущений, принадлежащих траекторному. Фазовый аттрактор лежит в функциональном пространстве  $E = C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ , а траекторный — в пространстве  $C_b(\mathbb{R}_+, E)$ . Для визуализации нам нужно получить наглядное представление о периодических возмущениях  $\varphi$  вида (3.8). Функция  $\Phi(x, y, t)$ , задаю-

щая такое возмущение, имеет вид (3.1). Согласно (3.1), в точках области  $\bar{\Omega}$  с одинаковыми значениями координаты  $y$  функция  $\varphi(t)$  принимает одни и те же значения со сдвигом по фазе. Таким образом, характер возмущения  $\varphi$  вполне ясен по его поведению при  $x = 0$ .

Согласно (3.8), (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t)(0, y) &= \operatorname{Re} \left( \tilde{\Phi}(y) e^{-i\alpha ct} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \left( \mathbf{u}(y) e^{i\alpha ct} \right) \\ \operatorname{Re} \left( \mathbf{w}(y) e^{i\alpha ct} \right) \\ \operatorname{Re} \left( \mathbf{p}(y) e^{i\alpha ct} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\Phi}(y) = (\mathbf{u}(y), \mathbf{w}(y), \mathbf{p}(y))$  — решение системы (1.14) — (1.16). В этой системе функции  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{p}$  можно выразить через  $\mathbf{w}$ , поэтому вся существенная информация о возмущении содержится в его компоненте  $\operatorname{Re}(\mathbf{w}(y)e^{-i\alpha ct})$ . Пусть  $w_1(y) = \operatorname{Re} \mathbf{w}(y)$ ,  $w_2(y) = \operatorname{Im} \mathbf{w}(y)$ , тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathbf{w}(y)e^{i\alpha ct}) &= \\ &= w_1(y) \cos \alpha ct - w_2(y) \sin \alpha ct. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Функции  $w_1$  и  $w_2$  интерпретируем как векторы (вещественного) пространства  $L_2(-1, 1)$ , тогда выражение (4.1) параметрически задает эллипс с осями  $w_1$  и  $w_2$ . Этот эллипс можно считать проекцией множества значений некоторой траектории, принадлежащей траекторному аттрактору, а его точки являются проекциями точек фазового аттрактора, причем из вышесказанного следует, что этот эллипс адекватно представляет возмущение.

Для всех не слишком больших  $\lambda \in \mathbb{R}$  возмущения  $\lambda\varphi$  также будут принадлежать траекторному аттрактору (по поводу ограничения на  $\lambda$  см. определение 3.3 пространства возмущений). Эти траектории изображаются эллипсами, гомотетичными эллипсу (4.1). Эти эллипсы замечают внутренность некоторого максимального эллипса. Однако на чертеже мы предпочитаем изобразить отдельные кривые, чтобы дать представление как о фазовом, так и о траекторном аттракторах.

Функции  $w_1$ ,  $w_2$  раскладываются в ряд Фурье по функциям  $e_1, e_2, \dots$ , введенным в п. 2.1. Мы выбираем первые три функции из этой ортогональной системы, коэффициенты при которых отличны от нуля, и изображаем эллипсы как их проекции на трехмерное подпространство, натянутое на эти векторы.

Подставим полученное нами выражение для решения (выражения для  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_4$ ,  $\mathbf{w}_5$ ,

$w_6$ , полученных в п. 2) и соответствующие ему значения параметров  $\alpha$  и  $c$  в (1.24).

При  $\nu = \frac{1}{5772,22}$ ,  $\varkappa = 0,1 \cdot 10^{-7}$  были полу-

чены следующие результаты: для четного решения (рис. 9) и для нечетного решения (рис. 10)

А при  $\nu = 0,0001$ ,  $\varkappa = 0,0001$  мы получили следующее представление: для четного решения (рис. 11) и для нечетного решения (рис. 12)

В заключение авторы выражают признательность Баскакову А. Г., Даринскому Б. М. и Звягину В. Г. за ценные замечания и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бетчов Р. Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале. — М.: Мир, — 1971. — 350 с.
2. Павловский В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В. А. Павловский // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, — № 4. — С. 809 — 812.

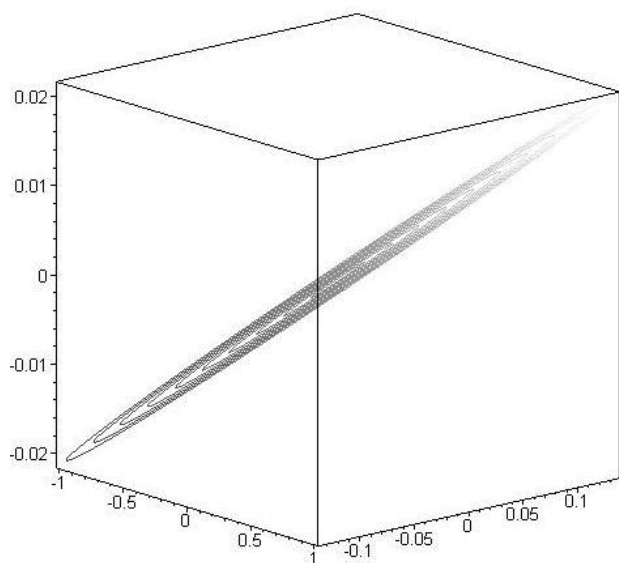


Рис. 9

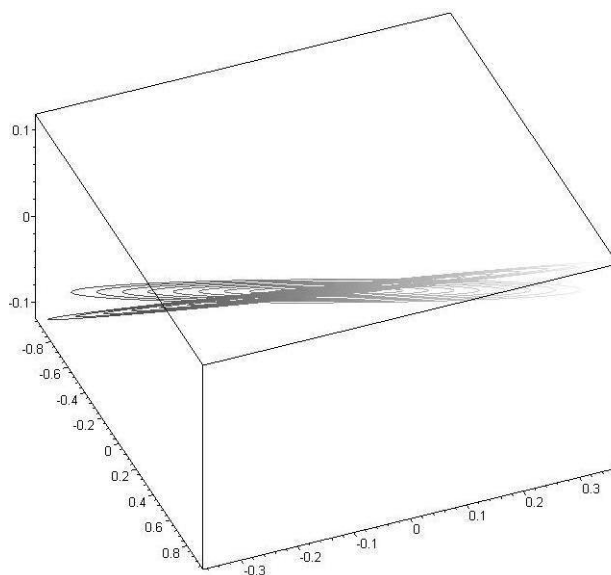


Рис. 10

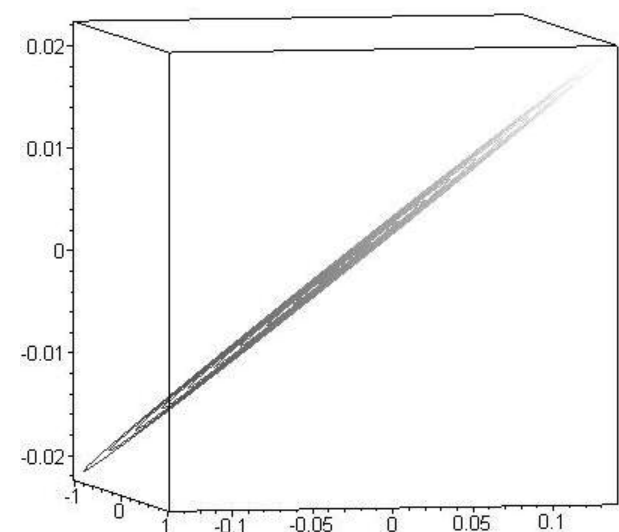


Рис. 11

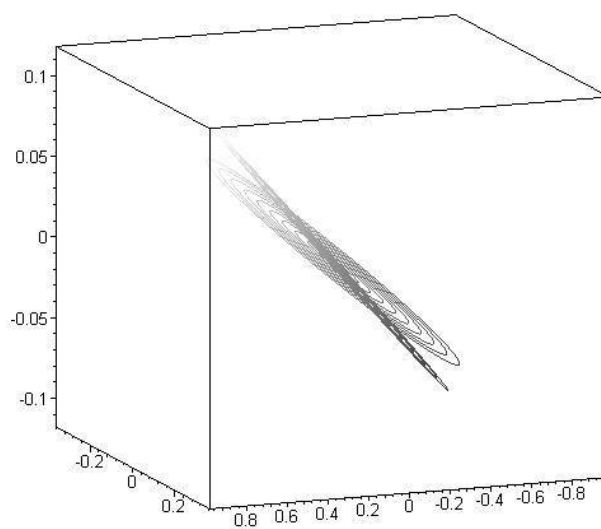


Рис. 12

3. Литвинов В. Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости / В. Г. Литвинов. — М. : Наука, — 1982. — 376 с.

4. Звягин В. Г. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина — Фойгта / В. Г. Звягин, М. В. Турбин // Совр. математика. Фунд. направления. — 2009. — Т. 31. — С. 3 — 144.

5. Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Тр. МИАН СССР. — 1987. — Т. 179. — С. 126 — 164.

6. Кондратьев С. К. Об аттракторах модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров / С. К. Кондратьев // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2010, — № 1. — С. 117 — 138.

7. Chepyzhov V. V. Attractors for equations of mathematical physics / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik. — Providence, RI : AMS Colloquium Publications. — 2002. — 363 p.

8. Zvyagin V. G. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov. — Berlin, New York : Walter de Gruyter, — 2008. — 232 p.

9. Звягин В. Г. Аттракторы для уравнений моделей движения вязкоупругих сред : учебное посо-

бие / В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, — 2010. — 266 с.

10. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. / М. А. Наймарк. — М. : Наука, — 1969. — 528 с.

11. Афендииков А. Л. О математическом моделировании турбулентности в течениях вязкой несжимаемой жидкости / А. Л. Афендииков, К. И. Бабенко // Математическое моделирование. — 1989. — Т. 1, — № 8. — С. 45 — 74.

12. Afendikov A. Bifurcations of Poiseuille Flow between Parallel Plates: Three-Dimensional Solutions with Large Spanwise Wavelength / A. Afendikov, A. Mielke // Arch. Rational Mech. Anal. — 1995. — Vol. 129. — P. 101 — 127.

13. Afendikov A. Multi-pulse solutions to the Navier—Stokes problem between parallel plates / A. Afendikov, A. Mielke // Z. angew. Math. Phys. — 2001. — Vol. 52. — P. 79 — 100.

14. Skorokhodov S. L. Numerical Analysis of the Spectrum of the Orr—Sommerfeld Problem / S. L. Skorokhodov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 47, Iss. 10. — P. 1603 — 1621.

15. Orszag S. Accurate solution of the Orr—Sommerfeld stability equation / S. Orszag // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 50, Iss. 4. — P. 659 — 703.

*Турбин Михаил Вячеславович — к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и топологических методов анализа математического факультета Воронежского государственного университета*

*Тел. 8-9507558604*

*E-mail: mrmike@math.vsu.ru*

*Кондратьев Станислав Константинович — младший научный сотрудник НИИ математики Воронежского государственного университета*

*Тел. 8-9036524904*

*E-mail: kondratjevsk@gmail.com*

*Turbin Mikhail Vyacheslavovich — Cand. Sc. (Phys. and Math.), associate professor at the Chair of Algebra and Topological Methods of Analysis of Mathematical Department, Voronezh State University*

*Tel. 8-9507558604*

*E-mail: mrmike@math.vsu.ru*

*Kondratyev Stanislav Konstantinovich — junior researcher at the Research Institute of Mathematics, Voronezh State University*

*Tel. 8-9036524904*

*E-mail: kondratjevsk@gmail.com*