УДК 517.9

# ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Г. Г. Саакян**

*Арцахский государственный университет*

Поступила в редакцию 1.07.2010 г.

**Аннотация.** В работе доказываются теоремы об осцилляции компонент решений для однородной линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с знакопостоянными коэффициентами.
**Ключевые слова:** Линейная однородная система, дифференциальные уравнения, осцилляция решений.

**Abstract.** The theorem on the oscillation of the component solutions for one homogeneous linear system of differential equations of the first order with sign constant coefficients is proved in the work.
**Key words:** linear homegeneous system, differential equations, oscillation of solution's .

**1. Предварительные сведения.** Рассматривается следующая линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{21}(t)y_2, \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1,2)$ — действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$.

Как известно (см., например, [1] — [4]), пара функций $y_1(t), y_2(t)$, определенная на интервале $a < t < b$, называется *решением системы* (1), если она, будучи подставленной в левые части уравнений системы (1), обращает их в тождество на $a < t < b$. Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ при этом называются соответственно первой и второй компонентами решения системы (1), причем, компонента решения системы (1) называется *осциллирующей* (колеблющейся) на отрезке $[a,b]$, если она имеет на этом отрезке более одного нуля.

Для дальнейшего изложения нам также понадобится теорема о сравнении канонических линейных однородных систем (см. [5]). Сравниваются следующие канонические системы

$$\begin{cases} y_1' = p_1(t)y_2, \\ y_2' = r_1(t)y_1, \end{cases} \tag{2}$$

и

$$\begin{cases} y_1' = p_2(t)y_2, \\ y_2' = r_2(t)y_1, \end{cases} \tag{3}$$

где $p_i(t)$, $r_i(t)$ $(i = 1,2)$ — действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$.

**Теорема 1 (о сравнении).** *Пусть* $\overline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\overline{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ *— соответственно нетривиальные решения систем* (2) *и* (3), *удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям:*

$$u_1(a) = v_1(a), \quad u_2(a) = v_2(a), \tag{4}$$

*и пусть*

$$p_1(t)p_2(t) > 0, \quad r_1(t)r_2(t) > 0, \tag{5}$$

$$p_i(t)r_i(t) < 0, \quad i = 1,2, \tag{6}$$

$$| r_2(t) | \geq | r_1(t) |, \quad | p_2(t) | \geq | p_1(t) | . \tag{7}$$

Тогда, если одна из компонент $\overline{u}(t)$ имеет $\ell$ нулей на отрезке $[a,b]$, то одна из компонент $\overline{v}(t)$ имеет на том же отрезке не менее $\ell$ нулей, причем $k$-ый нуль компоненты $\overline{v}(t)$ не больше $k$-го нуля компоненты $\overline{u}(t)$.

© Саакян Г. Г., 2010

## 2. Формулировки и доказательства теорем об осцилляции решений систем

Рассмотрим сначала каноническую систему

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \tag{8}$$

где $p_i(t),\ r_i(t)\ (i = 1,2)$ — действительные функции, определенные на отрезке $[a,b]$.

Имеет место

**Теорема 2.** *Если в системе* (8) *на отрезке* $[a,b]$ $p(t)\cdot r(t) < 0$, *и длина отрезка* $[a,b]$ *больше или равна* $\dfrac{2\pi}{mn}$, *где*

$$\begin{gathered} m^2 = \min_{a\le t\le b} | p(t) |, \\ n^2 = \min_{a\le t\le b} | r(t) |, \\ m > 0,\ n > 0, \end{gathered} \tag{9}$$

*то одна из компонент всякого нетривиального решения системы* (8) *будет на этом отрезке осциллирующей.*

**Доказательство.** Предположим, что в системе (8) $p(t) < 0$ и $r(t) > 0$ (аналогично рассматривается и случай $p(t) > 0,\ r(t) < 0$ ) и рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1' = -m^2 y_2, \\ y_2' = n^2 y_1, \end{cases} \tag{10}$$

в которой $m$ и $n$ определяются из соотношений (9) (в силу непрерывности $p(t)$ и $r(t)$, и, следовательно, их ограниченности на отрезке $[a,b]$, такие числа $m$ и $n$ всегда будут существовать). Известно (см., например, [3]), что общее решение системы (10) $\overline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ можно представить в виде

$$u_1(t) = A\cos(mnt + \varphi),$$

$$u_2(t) = \frac{An}{m}\sin(mnt + \varphi),$$

где $A$ и $\varphi$ — произвольные постоянные. Предположим, что $\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ —некоторое нетривиальное решение системы (8), и пусть, $y_1(a) = y_{10},\ y_2(a) = y_{20}$. Из общего решения системы (10) выделим то, которое удовлетворяло бы начальным условиям: $u_1(a) = y_{10},\ u_2(a) = y_{20}$. Согласно теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для линейных однородных систем, такой выбор всегда возможен. Далее, так как длина отрезка $[a,b]$ больше или равна $\dfrac{2\pi}{mn}$, то каждая из компонент этого решения будет иметь на отрезке $[a,b]$ более одного нуля. Примем $p_1(t) = -m^2$, $r_1(t) = n^2$, $p_2(t) = p(t)$, $r_2(t) = r(t)$. Тогда, по отношению к системам (8) и (10) имеют место условия (4)—(7) теоремы 1, и, так как каждая из компонент выделенного выше решения системы (10) будет иметь на отрезке $[a,b]$ более одного нуля, то, применив теорему 1, получим, что одна из компонент решения системы (8) также будет иметь на отрезке $[a,b]$ более одного нуля, и, следовательно, будет осциллирующей, что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий утверждение теоремы 2.

**Пример.** Рассматривается следующая задача

$$\begin{cases} y_1' + ty_2 = 0, \\ y_2' - ty_1 = 0, \end{cases} \tag{11a}$$

$$y_1(2) = 1{,}5\ \ y_2(2) = 2 \tag{11b}$$

на отрезке $\left[2,4\right]$. В данном случае $y_{10} = 1{,}5$; $y_{20} = 2$, $p(t) = t$ и $r(t) = t$. Далее, имеем

$$\min_{2\le t\le 4}\left|p(t)\right| = \min_{2\le t\le 4}\left|r(t)\right| = 2,$$

и, следовательно, $m = n = \sqrt{2}$. Заметим, что для рассматриваемой задачи имеют место условия теоремы 2, а именно

1. на отрезке $[2,4]$ $p(t) > 0$ и $r(t) < 0$,

2. длина отрезка $[2,4]$ больше, чем $\dfrac{2\pi}{mn} = \dfrac{\pi}{2}$.

Следовательно, одна из компонент решения задачи (11a) — (11b), согласно теореме 2, имеет на интервале $[2,4]$ более одного нуля, т.е. является осциллирующей. Убедимся теперь в этом, проведя непосредственные вычисления. Нетрудно найти, что общее решение системы (7a) можно записать в виде

$$y_1(t) = A\sin\left(\int_{t_0}^{t}\tau d\tau + \phi\right) = A\sin\left(\frac{t^2}{2} + \psi\right),$$

$$y_2(t) = A\cos\left(\int_{t_0}^{t}\tau d\tau + \phi\right) = A\cos\left(\frac{t^2}{2} + \psi\right),$$

где $A$ и $\psi$ — произвольные постоянные. Учитывая условия (11b), получим для определения значений постоянных $A$ и $\psi$ следующую систему уравнений

$$\begin{cases} A\sin\left(2+\psi\right) = 1,5, \\ A\cos\left(2+\psi\right) = 2, \end{cases}$$

решив которую найдем, что

$$A = 2,5;\ \psi \approx -1,36.$$

Для полученных значений $A$ и $\psi$, как нетрудно убедиться, каждая из компонент решения действительно будет иметь на отрезке $\left[2,4\right]$ два нуля.

**Теорема 3.** *Если в системе* (1) *коэффициенты* $p_{11}(t) \equiv p_{22}(t)$ *не являются тождественными нулями,* $p_{12}(t)\cdot p_{21}(t) < 0$ *при* $t\in[a,b]$, *а длина отрезка* $[a,b]$ *больше или равна* $\frac{2\pi}{mn}$, *где*

$$m^2 = \min_{a\le t\le b}\left|p_{12}(t)\right|,$$
$$n^2 = \min_{a\le t\le b}\left|p_{21}(t)\right|,$$

*то одна из компонент всякого нетривиального решения системы* (1) *будет на этом отрезке осциллирующей.*

**Доказательство.** Воспользуемся преобразованием

$$y_1(t) = z_1(t)e^{\int_a^t p_{11}(\tau)d\tau}, \tag{12a}$$

$$y_2(t) = z_2(t)e^{\int_a^t p_{22}(\tau)d\tau}, \tag{12b}$$

Тогда система (1), как нетрудно проверить, сведется к равносильной системе

$$\begin{cases} z_1' = p(t)z_2, \\ z_2' = r(t)z_1, \end{cases} \tag{13}$$

в которой будем иметь

$$p(t) = p_{12}(t),\ r(t) = p_{21}(t). \tag{14}$$

Предположим, что $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ — некоторое нетривиальное решение системы (1), а $\bar{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ — соответствующее ему решение системы (13), и пусть, $y_1(a) = y_{10}$, $y_2(a) = y_{20}$. Тогда, согласно соотношениям (12a) и (12b) будем иметь

$$y_1(a) = z_1(a),\ y_2(a) = z_2(a).$$

По отношению к системе (13) имеют место условия теоремы 2, применив которую получим, что одна из компонент решения системы (13) является на отрезке $[a,b]$ осциллирующей. И так как нули компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$, согласно соотношениям (12a) и (12b) совпадают с нулями соответствующих им компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$, то получим, что одна из компонент решения $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ также будет осциллировать на отрезке $[a,b]$. Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Если в системе* (1) $p_{12}(t) \equiv -p_{21}(t)$, *и длина отрезка* $[a,b]$ *больше или равна* $\frac{2\pi}{mn}$, *где*

$$m^2 = \min_{a\le t\le b}\left|p_{12}(t)\right| e^{\int_a^t \left(p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau)\right)d\tau},$$

$$k^2 = \min_{a\le t\le b}\left|p_{12}(t)\right| e^{-\int_a^t \left(p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau)\right)d\tau},$$

$$m > 0,\ k > 0$$

*то одна из компонент всякого нетривиального решения системы* (1) *будет на этом отрезке осциллирующей.*

**Доказательство** проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы с использованием преобразования (12a) и (12b), и применения теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кодингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ЛКИ, 2007.

2. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. — М.: Едиториал УРСС, 2007.

3. *Филлипов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: КомКнига, 2007.

4. *Агафонова С. А., Муратова Т. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Академия, 2008.

5. *Саакян Г. Г.* О некоторых свойствах канонической системы Дирака. Ученые записки ЕрГУ, 2007, — № 2.

*Саакян Георгий Грантович — к.ф.м.н, зав. кафедрой прикладной математики и информатики, Арцахский государственный университет*

*Телефон: (+37497) 22-22-51*

*E-mail: ter_saak_george@mail.ru*

*Sahakyan Georgii G. — candidate of phisico-mathematical sciences, head of the department of applied mathematics and informatics, Department of the Applied Mathematics and Informatics, Artsakh State University.*

*Телефон: (+37497) 22-22-51*

*E-mail: ter_saak_george@mail.ru*