УДК 517.988.63

МНОГОМЕРНАЯ ВЕРСИЯ ПРИНЦИПА ОБОБЩЕННОГО СЖАТИЯ М. А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО

А. И. Перов, И. Д. Коструб

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.05.2010 г.

Аннотация. Пусть M — полное K-метрическое пространство с n-мерной метрикой $\rho(x,y): M\times M\to\mathbb{R}^n$, где K — конус неотрицательных векторов из $\mathbb{R}^n$. Отображение $F: M\to M$ называется обобщённым сжатием, если $\rho(Fx,Fy)\le Q\rho(y,x)$, где $Q: K\to K$ есть полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение. Обобщённое сжатие всегда имеет в M единственную неподвижную точку x^*, причём $\rho(x^*,a)\le(I-Q)^{-1}\rho(Fa,a)$, для любой точки a из M. Точка x^* может быть получена методом последовательных приближений $x_k=Fx_{k-1}$, $k=1,2,\ldots$, начиная с произвольной точки x_0 из M причём имеют место следующие оценки погрешности $\rho(x^*,x_k)\le Q^k(I-Q)^{-1}\rho(x_1,x_0)\le(I-Q)^{-1}Q^k\rho(x_1,x_0)$, $k=1,2,\ldots$. Отображения $(I-Q)^{-1}$ и Q^k, вообще говоря, не коммутируют. Полученный результат при $n=1$ близок к принципу обобщённого сжатия М. А. Красносельского.
Ключевые слова: K-метрическое пространство, полуаддитивное отображение, обобщённое сжимающее отображение, принцип сжимающих отображений.

Abstract. Let M be a complete K-metric space equipped with n-dimensional metric $\rho(x,y): M\times M\to\mathbb{R}^n$ where K be a cone of nonnegative vectors from $\mathbb{R}^n$. A map F is said to be a generalized contraction provided that $\rho(Fx,Fy)\le Q\rho(y,x)$, where Q is semi-additive absolutely stable map. A generalized contraction does always have a unique fixed point x^* in M satisfying $\rho(x^*,a)\le(I-Q)^{-1}\rho(Fa,a)$ for any a from M. The fixed point x^* can be obtained by method of successive approximations $x_k=Fx_{k-1}$, $k=1,2,\ldots$, with any point x_0 from M. Moreover, the following error estimations hold true $\rho(x^*,x_k)\le Q^k(I-Q)^{-1}\rho(x_1,x_0)\le(I-Q)^{-1}Q^k\rho(x_1,x_0)$, $k=1,2,\ldots$. The maps $(I-Q)^{-1}$ and Q^k do not, generally speaking, commute. The result obtained is similar to the generalized contraction principle due to M. A. Krasnoselskii in case when $n=1$.
Key words: K-metric space, semi-additive map, generalized contraction map, principle of contraction maps.

Пусть M — есть произвольное непустое множество и F есть некоторое отображение этого множества в себя, $F: M\to M$. Рассмотрим уравнение

$$x=Fx,\ (x\in M), \tag{1}$$

решения которого, как обычно, называются *неподвижными точками* изучаемого отображения. Для доказательства существования решения уравнения (1), а также для его фактического точного или приближенного нахождения часто прибегают к помощи *метода последовательных приближений*, состоящего в том, что решение уравнения (1) ищут как предел последовательности

$$x_k=Fx_{k-1},\ (k=1,2,\ldots), \tag{2}$$

где за нулевое приближение x_0 принимается, как правило, произвольная точка множества M. Отметим, что при сделанных нами предположениях процесс построения последовательных приближений x_k неограниченно продолжим и вся проблема заключается в том, чтобы указать такие ограничения на множество M и отображение F, которые гарантировали как сходимость последовательности x_k к некоторому пределу x^*,

$$x_k\to x^*, \tag{3}$$

так и то, что этот предел является решением уравнения (1). Таким образом, нам нужно предполагать, что в множестве M определена сходимость, то есть что оно является *пространством* [1, с. 17].

Пусть n — некоторое фиксированное натуральное число и $\mathbb{R}^n$, как обычно, вещественное n-мерное пространство, в котором частичная упорядоченность вводится естественным путём: если α и β — векторы из $\mathbb{R}^n$ с компонентами $\alpha_1,...,\alpha_n$ и $\beta_1,...,\beta_n$ соответственно, но неравенство $\alpha \le \beta$ означает, что $\alpha_1 \le \beta_1,...,\alpha_n \le \beta_n$, а неравенство $\alpha < \beta$ означает, что $\alpha_1 < \beta_1,...,\alpha_n < \beta_n$. Вещественный вектор α с неотрицательными (положительными) компонентами называют *неотрицательным (положительным)* и пишут $\alpha \ge 0$ $(\alpha > 0)$.

Через $|\alpha|$, где α — вектор из $\mathbb{R}^n$, обозначается неотрицательный вектор, компоненты которого равны модулям соответствующих компонент вектора α. Дальнейшие свойства неотрицательных векторов и неотрицательных матриц можно найти, например, в [2, с. 352].

Обозначим через K выпуклый замкнутый *конус* неотрицательных векторов из $\mathbb{R}^n$

$$K = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha \ge 0\}, \tag{4}$$

который является *воспроизводящим*, то есть любой элемент σ из $\mathbb{R}^n$ представим в виде $\sigma = \alpha - \beta$, где α и β из K, и *правильным*, то есть монотонная ограниченная последовательность элементов из $\mathbb{R}^n$ всегда сходится [3, с. 13 и с. 33 — 34].

Напомним, что функция $\rho(x,y) : M \times M \to \mathbb{R}^n$, обладающая свойствами

1^o $\rho(x,y) \ge 0$;

2^o $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3^o $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

4^o $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$

называется *псевдометрикой*, а множество M — *псевдометрическим пространством* [4, с. 58 — 61].

Отображение $Q : K \to K$ в этой статье называется *полуаддитивным*, если выполнены следующие условия (сравни с [5, с. 268 — 271])

1) $Q0 = 0$;

2) *если* $\alpha \le \beta$, *то* $Q\alpha \le Q\beta$ (*свойство монотонности*);

3) *если* $\alpha, \beta \ge 0$, *то* $Q(\alpha + \beta) \le Q\alpha + Q\beta$ (*свойство полуаддитивности*);

4) Q – *непрерывное отображение.*

Отметим, что сумма полуаддитивных отображений, а также произведение полуаддитивного отображения на неотрицательное число есть снова полуаддитивное отображение. Точно также полуаддитивным оказывается произведение (суперпозиция) полуаддитивных отображений и предел последовательности полуаддитивных отображений, если она, например, локально равномерно сходится. Для полуаддитивного отображения Q справедливо неравенство

$$|Q\alpha - Q\beta| \le Q|\alpha - \beta| \quad (\alpha, \beta \in K) \tag{5}$$

(сравни с [6, с. 43]).

Пусть $Q : K \to K$ есть произвольное полуаддитивное отображение. Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\alpha = Q\alpha \ (\alpha \in K). \tag{6}$$

Ясно, что $\alpha = 0$ является неподвижной точкой отображения Q. Говорят, что нуль *абсолютно устойчив* относительно отображения Q, если любая последовательность, построенная по правилу

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1}, \ k = 1,2,..., \tag{7}$$

начиная с произвольного элемента α_0 из конуса K, сходится к нулю,

$$\alpha_k \to 0. \tag{8}$$

В этом случае отображение Q также называется *абсолютно устойчивым.*

В этой статье приводимые ниже леммы 1 — 4 излагаются без доказательства. Начало и конец доказательства теорем обозначается значками □ и ■ соответственно.

Лемма 1. *Пусть* Q *есть полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение. Тогда если для некоторого элемента* α *имеем*

$$0 \le \alpha, \ \alpha \le Q\alpha,$$

то $\alpha = 0$.

Лемма 2. *Пусть* Q *есть полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение. Тогда если для некоторой последовательности* α_k *имеем*

$$0 \le \alpha_k, \ \alpha_k \le Q\alpha_{k-1}, \ k = 1,2,...,$$

то $\alpha_k \to 0$.

Ясно, что лемма 1 является частным случаем леммы 2 $(\alpha_k \equiv \alpha)$

Лемма 3. *Пусть* $\alpha \ge 0$ *и* $\alpha - Q\alpha = \sigma$. *Тогда можно считать, что элемент* α *есть решение уравнения*

$$\alpha = Q\alpha + \sigma.$$

Возьмём произвольный элемент $\alpha_0 \ge \alpha$ *и построим последовательные приближения по правилу*

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \sigma,\ k = 1,2,\ldots.$$

Тогда $\alpha \le \alpha_k \to \alpha$.

Подчеркнём, что в лемме 3 не предполагается неотрицательности элемента σ.

Во всей статье важную роль играет отображение $T : K \to \mathbb{R}^n$, которое определяется следующим образом

$$T\alpha = \alpha - Q\alpha = (I - Q)\alpha,\ \alpha \in K, \tag{9}$$

где I есть единичное отображение в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Для того, чтобы полуаддитивное отображение Q было абсолютно устойчивым необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

5) *если* $\alpha,\beta \ge 0$ *и* $\alpha \ne \beta$, *то* $T\alpha \ne T\beta$;

6) *для любого* $\beta \ge 0$ *существует единственное* $\alpha \ge 0$ *для которого* $T\alpha = \beta$;

7) *если* σ *и* τ *принадлежат области определения обратного отображения* T^{-1} *и* $\sigma \le \tau$, *то* $T^{-1}\sigma \le T^{-1}\tau$.

Условие 5) обозначает, что отображение T является взаимно однозначным и поэтому существует обратное отображение T^{-1}, определённое на области значений отображения T. Условие 6) означает, что область определения обратного отображения T^{-1} содержит конус K (может быть, совпадая с ним). Условие 7) означает, что обратное отображение T^{-1} является монотонным.

☐ Необходимость. Пусть полуаддитивное отображение Q является абсолютно устойчивым. Покажем, что тогда оно удовлетворяет условиям 5) — 7).

Покажем, что выполнено условие 5). Пусть $\alpha,\beta \ge 0$.

Нам достаточно показать, что если $T\alpha = T\beta$, то $\alpha = \beta$. Действительно, в этом случае $\alpha - \beta = Q\alpha - Q\beta$, откуда согласно (5) получаем

$$\left|\alpha - \beta\right| = \left|Q\alpha - Q\beta\right| \le Q\left|\alpha - \beta\right|.$$

Полагая $\sigma = |\alpha - \beta|$, находим, что $\sigma \ge 0$ и $\sigma \le Q\sigma$, откуда по лемме 1 имеем $\sigma = 0$, то есть $\alpha = \beta$. Свойство 5) установлено.

Покажем, что выполнено условие 6), то есть покажем, что уравнение

$$\alpha = Q\alpha + \beta \tag{10}$$

при любом $\beta \ge 0$ имеет единственное решение $\alpha \ge 0$. Единственность решения вытекает из 5), так что в доказательстве нуждается только существование решения. Будем искать решение уравнения (10) методом последовательных приближений

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \beta,\ k = 1,2,\ldots, \tag{11}$$

начиная с $\alpha_0 = 0$. Покажем, что

$$0 \le \alpha_k - \alpha_{k-1} \to 0. \tag{12}$$

Действительно, методом математической индукции нетрудно убедиться в том, что последовательность α_k является неубывающей. Далее из (11) получаем

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = Q\alpha_k - Q\alpha_{k-1} \le Q(\alpha_k - \alpha_{k-1}).$$

Полагая $\delta_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$, имеем $0 \le \delta_k$ и $\delta_k \le Q\delta_{k-1}$ при $k = 1,2,\ldots$, откуда по лемме 2 находим $\delta_k \to 0$. Утверждение (12) полностью доказано.

Переписывая соотношение (11) в виде

$$\alpha_k = Q\alpha_k + \beta_k,\ \text{где}\ \beta_k = Q\alpha_{k-1} - Q\alpha_k + \beta,$$

мы видим, что уравнение (10) имеет решение $\alpha = \alpha_k$ при $\beta = \beta_k$, сколь угодно близком к β. Запомнив это, найдём $\xi \ge \beta$, при котором уравнение

$$\gamma = Q\gamma + \xi \tag{13}$$

имеет решение γ.

Вернёмся к последовательности α_k и покажем, что

$$\alpha_k \le \gamma,\ k = 0,1,2,\ldots. \tag{14}$$

При $k = 0$ оценка (14) очевидна. Пусть уже установлено, что $\alpha_{k-1} \le \gamma$ (предположение индукции). Тогда согласно (11) и (13) в силу монотонности отображения Q получаем

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \beta \le Q\gamma + \xi = \gamma.$$

Шаг индукции проведен и оценка (14) установлена. Так как согласно (14) неубывающая последовательность α_k ограничена сверху, то она сходится к некоторому пределу α, $\alpha_k \to \alpha$. Совершая предельный переход в (11) в силу непрерывности отображения Q получаем, что $\alpha \ge 0$ является решением уравнения (10). Свойство 6) установлено.

Покажем, что выполнено условие 7). Пусть σ и τ принадлежат области определения обратного отображения T^{-1}. Положим $\alpha = T^{-1}\sigma$ и $\beta = T^{-1}\tau$. Тогда $\alpha \ge 0$ и $\alpha = Q\alpha + \sigma$, $\beta \ge 0$ и $\beta = Q\beta + \tau$. Нам нужно доказать, что если $\sigma \le \tau$, то $\alpha \le \beta$.

Выберем элемент ξ так, чтобы $\xi \ge \alpha$ и $\xi \ge \beta$ и построим последовательные приближения α_k и β_k по правилу

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \sigma \text{ и } \beta_k = Q\beta_{k-1} + \tau,\ k = 1,2,..., \quad (15)$$

положив $\alpha_0 = \xi = \beta_0$. По лемме 3 процесс построения последовательных приближений α_k и β_k неограниченно продолжим, причём

$$\alpha \le \alpha_k \to \alpha \text{ и } \beta \le \beta_k \to \beta. \quad (16)$$

Проверим, что

$$\alpha_k \le \beta_k,\ k = 1,2,.... \quad (17)$$

Действительно, при $k = 0$ по построению имеем $\alpha_0 = \beta_0$ и неравенство (17) выполнено даже со знаком равенства. Предположим, что неравенство $\alpha_{k-1} \le \beta_{k-1}$ уже установлено и проведем шаг математической индукции. Согласно (15)

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \sigma \le Q\beta_{k-1} + \tau = \beta_k$$

(мы воспользовались монотонностью отображения Q и неравенством $\sigma \le \tau$). Шаг индукции проведён и требуемое неравенство (17) установлено. Совершая с учётом (16) предельный переход в неравенстве (17) получаем $\alpha \le \beta$. Свойство 7) установлено.

Достаточность. Пусть полуаддитивное отображение Q удовлетворяет условиям 5) — 7). Покажем, что в этом случае оно всегда абсолютно устойчиво, то есть любая последовательность α_k, построенная по правилу (7), отправляясь от произвольно взятого элемента α_0 из конуса K, сходится к нулю, то есть имеет место (8).

Напомним прежде всего, что согласно 1) нуль есть неподвижная точка отображения Q, $0 = Q0$. Из условия 5) следует, что других неподвижных точек отображение Q не имеет.

Возьмём произвольный элемент α_0 из K и построим согласно (7) последовательность α_k. Если

$$\alpha_0 \ge Q\alpha_0, \quad (18)$$

то в силу монотонности отображения Q получаем

$$\alpha_0 \ge \alpha_1 \ge ... \ge \alpha_k \ge .... \quad (19)$$

Так невозрастающая последовательность α_k ограничена снизу (нулем), то она, в силу *правильности* конуса, сходится к некоторому элементу α, $\alpha_k \to \alpha$. Совершая предельный переход в (7) в силу непрерывности отображения Q получаем (6). Итак, α должна быть неподвижной точкой отображения Q, но единственной неподвижной точкой отображения является нуль. Поэтому $\alpha = 0$ и в этом случае соотношение (8) установлено.

Однако последовательность α_k сходится к нулю не только тогда, когда выполнено условие (18), но и в том случае, если

$$\alpha_0 \le \beta_0 \text{ и } \beta_0 \ge Q\beta_0 \quad (20)$$

для некоторого элемента β_0. Действительно, в этом случае в силу монотонности отображения Q

$$\alpha_k \le \beta_k,\ k = 1,2,..., \quad (21)$$

и так как согласно предыдущему $\beta_k \to 0$, то из (21) следует $0 \le \alpha_k \to 0$ и соотношение (8) и в этом случае также имеет место.

В общем случае найдём такие $\sigma, \tau \ge 0$, что $T\alpha_0 = \sigma - \tau$ (мы воспользовались тем, что конус K является *воспроизводящим*). Поэтому

$$T\alpha_0 \le \sigma. \quad (22)$$

Элемент $T\alpha_0$ входит в область определения обратного отображения T^{-1} и $T^{-1}(T\alpha_0) = \alpha_0$. В силу условия 6) элемент σ, будучи неотрицательным, также входит в область определения T^{-1}. Так как согласно 7) отображение T^{-1} является монотонным, то из (22) получаем

$$\alpha_0 \le T^{-1}\sigma \equiv \beta_0. \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что $\alpha_0 \le \beta_0$ и $\beta_0 \ge Q\beta_0$ — это в силу $T\beta_0 = \sigma \ge 0$; поэтому согласно (20) и (21) получаем $0 \le \alpha_k \to 0$. Мы показали, что соотношение (8) имеет место во всех случаях, то есть полуаддитивное отображение Q является абсолютно устойчивым. ■

Пусть $Q : K \to K$ есть некоторое полуаддитивное отображение, которое мы будем предполагать абсолютно устойчивым. Тогда в силу теоремы 1 существует обратное отображение T^{-1}, которое рассматриваемое только на конусе K (речь идёт о *сужении* $T^{-1} \mid K$) является полуаддитивным. Остановимся лишь на доказательстве свойства полуаддитивности.

Пусть $\sigma, \tau \ge 0$. Положим $T^{-1}\sigma = \alpha$ и $T^{-1}\tau = \beta$. Тогда в силу свойства 6) имеем $\alpha \ge 0$ и $\beta \ge 0$. Отметим ещё, что $T\alpha = \sigma$ и $T\beta = \tau$. Так как согласно 3) имеем $T(\alpha + \beta) \ge T\alpha + T\beta$, то $\sigma + \tau = T\alpha + T\beta \le T(\alpha + \beta)$, то есть $\sigma + \tau \le T(\alpha + \beta)$. Применяя к обеим частям неравенства обратное отображение T^{-1} в силу его монотонности получаем $T^{-1}(\sigma + \tau) \le \alpha + \beta = T^{-1}\sigma + T^{-1}\tau$ и свойство 3) установлено.

Лемма 4. *Пусть Q есть полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение. Тогда если для некоторой последовательности α_k имеем*

$$0 \le \alpha_k,$$
$$\alpha_k \le Q\alpha_{k-1} + \sigma,$$
$$k = 1, 2, ...,$$

причём $\sigma \ge 0$ и $\alpha_0 \le \alpha$, где $\alpha \ge 0$ есть единственное решение уравнения

$$\alpha = Q\alpha + \sigma,$$

то $0 \le \alpha_k \le \alpha$ при всех $k = 1, 2, ...$

Переводящее псевдометрическое пространство M в себя отображение F называется *обобщённым сжатием* или *обобщённым сжимающим отображением*, если оно удовлетворяет условию

$$\rho(Fx, Fy) \le Q\rho(x, y), \ (x, y \in M), \qquad (24)$$

где $Q : K \to K$ есть некоторое полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение.

Теорема 2. *Пусть M есть полное псевдометрическое пространство. Пусть отображение F переводит это пространство в себя и является обобщённым сжатием.*

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение, которое мы обозначим x^*. Для произвольной точки a из M справедлива оценка

$$\rho(x^*, a) \le (I - Q)^{-1}\rho(Fa, a) \qquad (25)$$

(локализация решения). Это решение может быть получено методом последовательных приближений (2), отправляясь от произвольного нулевого приближения x_0 из M (то есть имеет место (3)), причем справедливы следующие оценки погрешности $\left(k = 1, 2, ...\right)$

$$\begin{aligned} \rho(x^*, x_k) &\le Q^k (I - Q)^{-1}\rho(x_1, x_0) \le \\ &\le (I - Q)^{-1} Q^k \rho(x_1, x_0), \ k = 1, 2, ... \end{aligned} \qquad (26)$$

Здесь Q^k — это k-я итерация отображения Q. Как Q^k, так и $(I - Q)^{-1}$, рассматривамое на K, — это полуаддитивные отображения, которые, вообще говоря, не коммутируют, но произведение которых в любом порядке является снова полуаддитивным отображением.

☐ Мы начнём с самого сложного вопроса — с доказательства существования решения уравнения (1). Возьмём произвольную точку x_0 из псевдометрического пространства M и построим согласно (2) последовательные приближения x_k. Покажем, что эта последовательность является фундаментальной. Прежде всего установим, что

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \to 0. \qquad (27)$$

Согласно условию обобщенного сжатия (24) имеем

$$\begin{aligned} \rho(x_{k+1}, x_k) \le Q\rho(x_k, x_{k-1}),\\ k = 1, 2, ... \end{aligned} \qquad (28)$$

Полагая $\alpha_k = \rho(x_{k+1}, x_k)$ согласно (28) получаем: $0 \le \alpha_k$ и $\alpha_k \le Q\alpha_{k-1}$, $k = 1, 2, ...$, откуда в силу леммы 2 имеем $\alpha_k \to 0$ и соотношение (27) доказано.

Теперь приступим к центральной части доказательства — установлению важной оценки

$$\begin{aligned} \rho(x_l, x_k) \le (I - Q)^{-1}\rho(x_{k+1}, x_k),\\ l > k. \end{aligned} \qquad (29)$$

Обратим внимание на то, что $l (l > k)$ здесь совершенно произвольно. Фиксируем k и обозначим для краткости $\alpha_s = \rho(x_{k+s}, x_k)$ $s = 0, 1, ...$ и $\sigma = \rho(x_{k+1}, x_k)$. В силу условия обобщённого сжатия (24) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_s = \rho(x_{k+s}, x_k) \le \\ \le \rho(Fx_{k+s-1}, Fx_k) \le \\ \le \rho(Fx_{k+s-1}, Fx_k) + \rho(Fx_k, Fx_k) \le \\ \le Q\rho(x_{k+s-1}, x_k) + \rho(x_{k+1}, x_k) = Q\alpha_{s-1} + \sigma, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$0 \le \alpha_s, \ \alpha_s \le Q\alpha_{s-1} + \sigma, \ s = 1, 2, ...$$

Так как α_0, то на основании леммы 4 имеет оценку

$$0 \le \alpha_s, \ \alpha_s \le \alpha = (I - Q)^{-1}\sigma, \ s = 1, 2, ...,$$

которая в силу принятых обозначений при $s = l - k$ в точности совпадает с оценкой (29).

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{R}^n)$. Так как $(I - Q)^{-1}0 = 0$ и отображение $(I - Q)^{-1}$ непрерывно, то в силу (27) можно указать такое k, что $(I - Q)^{-1}\rho(x_{k+1}, x_k) \le \varepsilon$. Согласно оценке (29) отсюда получаем $\rho(x_l, x_k) \le \varepsilon$ при $l > k$. Поэтому последовательность x_k является фундаментальной. В силу предполагаемой полноты псевдометрического пространства M она сходится к некоторой точке x^* из M, то есть имеет место (3). Так как отображение F непрерывно, то, совершая предельный переход в формуле (2), получаем, что x^* есть решение уравнения (1). *Существование решения* уравнения (1) доказано.

Проверим единственность построенной неподвижной точки. Предположим, что отображение F имеет неподвижные точки x^* и y^*. Тогда согласно условию обобщённого сжатия (24) получаем

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(Fx^*, Fy^*) \le Q\rho(x^*, y^*).$$

Обозначая для краткости $\alpha = \rho(x^*, y^*)$, имеем

$$0 \le \alpha, \ \alpha \le Q\alpha,$$

откуда по лемме 1 находим $\alpha = 0$, то есть $x^* = y^*$, и *единственность решения* уравнения (1) установлена.

Докажем локализационную оценку (25). Пусть x^* — как это было у нас до сих пор — неподвижная точка отображения F и a — произвольная точка из M. Так как согласно условию обобщённого сжатия (24) получаем

$$\rho(x^*, a) = \rho(Fx^*, a) \le$$
$$\le \rho(Fx^*, Fa) + \rho(Fa, a) \le$$
$$\le Q\rho(x^*, a) + \rho(Fa, a),$$

то

$$T\rho(x^*, a) \le \rho(Fa, a). \tag{30}$$

Обозначим левую часть неравенства (30) через σ, а правую — через τ; тогда $\sigma \le \tau$. Ясно, что элемент σ входит в область определения отображения T^{-1} и $T^{-1}\sigma = \rho(x^*, a)$. Согласно свойству 6) обратное отображение T^{-1} определено на конусе K неотрицательных элементов из $\mathbb{R}^n$ и, в частности, определено на элементе τ. В соответствии со свойством 7) обратное отображение T^{-1} является монотонным. Поэтому из $\sigma \le \tau$ вытекает $T^{-1}\sigma \le T^{-1}\tau$, то есть $\rho(x^*, a) \le T^{-1}\rho(Fa, a)$, и требуемая *локализационная оценка* (25) установлена.

Осталось получить оценки (26). Используя условие обобщённого сжатия (24) k раз, находим

$$\rho(x^*, x_k) \le Q^k\rho(x_1, x_0), \ k = 1, 2, \ldots. \tag{31}$$

Так как согласно локализационной оценке (25) (мы положим $a = x_0$)

$$\rho(x^*, x_0) \le (I - Q)^{-1}\rho(Fx_0, x_1),$$

то в силу монотонности полуаддитивного отображения Q^k получаем

$$\rho(x^*, x_k) \le Q^k\{(I - Q)^{-1}\rho(Fx_0, x_0)\} =$$
$$= Q^k(I - Q)^{-1}\rho(x_1, x_0)$$

и первая часть оценок (26) установлена.

Для завершения доказательства (26) нам достаточно показать, что

$$Q^k(I - Q)^{-1}\alpha \le (I - Q)^{-1}Q^k\alpha, \quad \alpha \ge 0, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{32}$$

Покажем прежде всего, что неравенство (32) справедливо при $k = 1$

$$Q(I - Q)^{-1}\alpha \le (I - Q)^{-1}Q\alpha, \ \alpha \ge 0. \tag{33}$$

Действительно, так как

$$(I - Q)(I - Q)^{-1}\alpha = \alpha,$$

то

$$Q(I - Q)^{-1}\alpha = (I - Q)^{-1}\alpha - \alpha.$$

Далее, в силу свойства полуаддитивности отображения T^{-1}

$$(I - Q)^{-1}\alpha = (I - Q)^{-1}(\alpha - Q\alpha + Q\alpha) \le$$
$$\le (I - Q)^{-1}(I - Q)\alpha + (I - Q)^{-1}Q\alpha =$$
$$= \alpha + (I - Q)^{-1}Q\alpha$$

и мы приходим к неравенству (33).

Предполагая, что неравенство

$$Q^{k-1}(I - Q)^{-1}\alpha \le \le (I - Q)^{-1}Q^{k-1}\alpha, \ \alpha \ge 0, \tag{34}$$

уже установлено, проведём шаг математической индукции

$$Q^k(I - Q)^{-1}\alpha = Q[Q^{k-1}(I - Q)^{-1}\alpha] \le$$
$$\le Q[(I - Q)^{-1}Q^{k-1}\alpha] = Q(I - Q)^{-1}Q^{k-1}\alpha =$$
$$= [Q(I - Q)^{-1}]Q^{k-1}\alpha \le [(I - Q)^{-1}Q]Q^{k-1}\alpha =$$
$$= (I - Q)^{-1}Q^k\alpha$$

и неравенство (32) доказано; при проведении выкладок мы воспользовались неравенствами (33) и (34). ■

В некоторых случаях обобщенное сжимающее отображение F задано не на всем пространстве M, а только на некоторой его части. В такой ситуации можно воспользоваться приведенным ниже локальным вариантом теоремы 2.

Пусть на псевдошаре $S(a, \tau) = \{x \in M : \rho(x, a) \le \tau\}$, где a из M и τ из K, задано обобщённое сжимающее отображение $F : S(a, \tau) \to M$, для которого

$$\rho(Fx, Fy) \le Q\rho(x, y) \quad (x, y \in S(a, \tau)), \tag{35}$$

где $Q : K \to K$ есть некоторое полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение. По теореме 1 существует обратное отображение $(I - Q)^{-1}$, определённое, во всяком случае, на конусе K.

Теорема 3. *Пусть на псевдошаре $S(a, \tau)$ полного псевдометрического пространства M задано обобщённое сжимающее отображение F. Пусть дополнительно выполнено условие*

$$(I-Q)^{-1}\rho(Fa,a)\le\tau. \tag{36}$$

Тогда уравнение (1) в псевдошаре $S(a,\tau)$ имеет единственное решение, котрое мы обозначим через x^*. Для этого решения имеет место локализационная оценка

$$\rho(x^*,a)\le(I-Q)^{-1}\rho(Fa,a). \tag{37}$$

Решение x^* может быть получено методом последовательных приближений (2), отправляясь от нулевого приближения $x_0=a$, причём справедливы следующие оценки погрешности

$$\begin{gathered}\rho(x^*,x_k)\le Q^k(I-Q)^{-1}\rho(Fa,a)\le\\ \le(I-Q)^{-1}Q^k\rho(Fa,a),\ k=1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{38}$$

Обозначим через σ левую часть неравенства (36). Тогда $\sigma\ge 0$ и $\sigma\le\tau$. Поэтому $S(a,\sigma)\subseteq S(a,\tau)$. Для нас важно, что $\sigma=Q\sigma+\rho(Fa,a)$. Проверим, что псевдошар $S(a,\sigma)$ инвариантен относительно отображения F, то есть $F[S(a,\sigma)]\subseteq S(a,\sigma)$. Действительно, если x из $S(a,\sigma)$, то $\rho(x,a)\le\sigma$ и так как в силу (35)

$$\begin{gathered}\rho(Fx,a)\le\rho(Fx,Fa)+\rho(Fa,a)\le\\ \le Q\rho(x,a)+\rho(Fa,a)\le Q\sigma+\rho(Fa,a)=\sigma,\end{gathered}$$

то $\rho(Fx,a)\le\sigma$, $Fx\in S(a,\sigma)$, и наше утверждение доказано. К отображению F, рассматриваемому только на псевдошаре $S(a,\sigma)$, применима теорема 2, из которой немедленно вытекают все утверждения теоремы 3. Отметим только, что метод последовательных приближений (2) реализуем и сходится к x^* не только при $x_0=a$, но и при любом другом x_0 из псевдошара $S(a,\sigma)$.

Отметим частный, но весьма важный случай, когда отображение Q является *линейным*, то есть может быть описано с помощью матрицы $Q=(q_{ij})$. В этом случае требования 1) — 4) сводятся к тому, что матрица Q должна быть *неотрицательной*, а требование абсолютной устойчивости равносильно тому, что *спектральный радиус* матрицы Q должен быть меньше единицы

$$0\le Q,\ sprQ<1. \tag{39}$$

В таком виде теоремы 2 и 3 хорошо известны (см., например, [4], [7], [8]), причём в рассматриваемом случае отображения $(I-Q)^{-1}$ и Q^k (то есть матрицы) всегда коммутируют.

Поводом для написания статьи послужила теорема из [9, с. 153 — 154], которую мы ниже приведём в несколько изменённых обозначениях. Пусть M — метрическое пространство с метрикой $d(x,y):M\times M\to\mathbb{R}$. Действующий в M оператор F называют обобщённым сжатием (подчеркнём, что это определение отличается от данного выше), если

$$\begin{gathered}d(Fx,Fy)\le q(\alpha,\beta)d(x,y)\\ (\alpha\le d(x,y\le\beta)),\end{gathered} \tag{40}$$

причём при $0\le\alpha\le\beta$

$$0\le q(\alpha,\beta)<1. \tag{41}$$

Теорема 4 (принцип обобщённого сжатия М. А. Красносельского).

Пусть оператор F преобразует в себя полное метрическое пространство M и является обобщённым сжатием.

Тогда уравнение (1) имеет в M единственное решение x^*. К этому решению сходятся последовательные приближения (2) *при любом начальном приближении x_0 из M, то есть имеет место* (3).

Эта теорема нашла различные приложения (см., например, [9, с. 158] или [10, с. 109]). Заметим, однако, что в отличие от классического принципа сжимающих отображений, получающегося при $q(\alpha,\beta)\equiv q$, $0\le q<1$ сформулированная выше теорема не содержит ни локализационной оценки неподвижной точки x^*, ни оценки погрешности метода последовательных приближений x_k; кроме того, в том виде, в котором она сформулирована, она оказалась мало пригодной для перенесения её на случай многомерной метрики.

Ситуация коренным образом меняется, если правую часть неравенства (40) заменить *модулем непрерывности* $q(u)$ отображения F; тогда мы придём к условию

$$d[Fx,Fy]\le q[d(x,y)], \tag{42}$$

где $q(u)$ $\big(u\ge 0\big)$ есть некоторая *полуаддитивная функция*, удовлетворяющая условию

$$(0\le)q(u)<u \text{ при } u>0. \tag{43}$$

Напомним, что функция $q(u)$ $(u\ge 0)$ называется *полуаддитивной*, если $q(0)=0$, и она обладает свойствами монотонности, полуаддитивности и непрерывности.

Отметим, что модуль непрерывности обладает всеми перечисленными выше свойствами, если M есть банахово пространство или замкнутое выпуклое множество банахова пространства (сравни с [11, с. 108 и с. 124]). В рассматриваемом случае условие абсолютной устойчивости принимает вид (43).

Краткое сообщение об излагаемых в этой статье результатах опубликовано в заметке [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Люстерник Л. А.* Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — Москва: Высшая школа, 1982. — 272 с.

2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / А. Ф. Гантмахер. — Москва: Физматгиз, — 1967. — 576 с.

3. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — Москва: Физматгиз, — 1962. — 396 с.

4. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. — Москва: Мир, 1969. — 448 с.

5. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — Москва: ИЛ, — 1962. — 832 с.

6. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций / И. К. Даугавет. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, — 1977. — 184 с.

7. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейтболдт. — Москва: Мир, 1975. — 560 с.

8. *Перов А. И.* Обобщённый принцип сжимающих отображений / А. И. Перов // Вестник ВГУ. — Воронеж, 2005. — N 1. — С. 196 — 207.

9. *Красносельский М. А.* Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — Москва: Наука, — 1970. — 352 с.

10. *Трубников Ю. В.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями /Ю. В. Трубников, А. И. Перов. — Минск: Наука и техника, — 1986. — 200 с.

11. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. — Минск: Наука и техника, 1960. — 624 с.

12. *Перов А. И.* Многомерная версия принципа обобщённого сжатия М. А. Красносельского / А. И. Перов // Функциональный анализ и его приложения. — Москва, 2010. — Том 44, — N 1. — С. 83 — 87.

Перов Анатолий Иванович — д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейных колебаний ВГУ, тел. (4732) 208-649, (4732) 26-43-56, e-mail: anperov@mail.ru

Коструб Ирина Дмитриевна — ассистент кафедры нелинейных колебаний ВГУ, тел. (4732) 208-649, (4732) 31-92-42, e-mail: ikostrub@yandex.ru

Perov Anatoly I. — professor, chair of nonlinear oscillations of Voronezh State Universiry, tel. (4732) 208-649,(4732) 264-356, e-mail: anperov@mail.ru

Kostrub I.D. — assistant lecturer, chair of nonlinear oscillations of Voronezh State Universiry, tel. (4732) 208-649,(4732) 31-92-42, e-mail: ikostrub@yandex.ru