УДК 517.9

О ТОЧНОСТИ ГЛАДКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ С ДИОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Нгуен Тхи Хиен

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 23.07.2010 г.

Аннотация: *для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью специального вида построена и изучена близкая к ней система с непрерывной правой частью и большим параметром K; доказаны теоремы о близости решений соответствующих начальных задач порядка* $1/\sqrt{K}$.
Ключевые слова: *система с диодной нелинейностью, выпуклое замкнутое множество, внешняя нормаль, идеальный диод, касательный и нормальный конусы.*

Abstract: *for system of the ordinary differential equations with an discontinuous right part of a special kind the system close to it with a continuous right part and the large parameter K is constructed and studied; theorems of closeness of decisions of corresponding initial problems of the order* $1/\sqrt{K}$ *are proved.*
Key words: *system with diode nonlinearity, convex closed set, external normal, ideal diode, tangent and normal cones.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы с диодными нелинейностями введены в рассмотрение в [1] в качестве математической модели электрических цепей с диодными преобразователями тока. Следуя [2], [3], мы рассматриваем *обобщенную* систему с диодной нелинейностью. Пусть Q — непустое выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда обобщенная система с диодной нелинейностью имеет вид:

$$\dot{x} = \tau_x f(t,x). \tag{1}$$

Здесь $\tau_x f(t,x)$ — проекция вектора $f(t,x)$ на T_x — касательный конус к Q в точке x (см. [4] с. 109).

Предполагается, что функция $f(t,x)$ обладает следующими свойствами:

$f:[t_0,t_0+a]\times Q\to\mathbb{R}^n$ — непрерывна по первому аргументу t при любом фиксированном втором аргументе x; (2)

удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу x с константой L; (3)

ограничена по норме константой C. (4)

Правая часть системы (1) может терпеть разрыв на границе множества Q. Под решением этой системы понимается локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая ей почти всюду. Наряду с (1) рассмотрим *гладкую модель*, которая определяется следующим уравнением:

$$\dot{y} = f(t,\overline{y}) - K(y-\overline{y}), \tag{5}$$

где $\overline{y} = P(y,Q)$ — проекция y на Q, K — большой параметр.

Кроме этого, в частном случае по сравнению с моделью (5) введена гладкая модель более эффективная, не использующая оператора проектирования, значения которого вычисляются достаточно сложно.

Цель данной работы — оценить расстояние между решениями гладкой модели и системы (1) с одинаковыми начальными условиями.

2. ТЕОРЕМА О ТОЧНОСТИ ГЛАДКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ С ДИОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Пусть $x(t), y(t)$ *— решения систем (1), (5), соответственно, удовлетворяющие начальным условиям:*

$$x(t_0) = y(t_0) = x_0 \in Q. \tag{6}$$

Тогда при всех $t\in[t_0,t_0+a]$ *выполнена следующая оценка:*

$$\left\|x(t)-y(t)\right\| \le \frac{Ce^{La}}{\sqrt{L}}\frac{1}{\sqrt{K}}. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим через N_x нормальный к Q конус в точке x и через $\nu_x z$

— проекцию вектора $z \in \mathbb{R}^n$ на N_x. Как известно (см. [4], с. 110), справедливо равенство

$$z = \tau_x z + \nu_x z,$$

причем слагаемые в правой части взаимно ортогональны. Поэтому систему (1) можно записать в виде:

$$\dot{x} = f(t,x) - \nu_x f(t,x).$$

В тех точках $x \in Q$, в которых $\dot{x}$ существует, мы оценим величину $p = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|x - y\right\|^2$:

$$\begin{aligned} p &= \left(\dot{x} - \dot{y}, x - y\right) = \\ &= \left(f(t,x) - f(t,\overline{y}) - \nu_x f(t,x) + \right. \\ &\quad \left. + K(y - \overline{y}), x - y\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Из условия Липшица для функции f следует, что

$$\begin{aligned} &\left(f(t,x) - f(t,\overline{y}), x - y\right) \le \\ &\le L\left\|x - \overline{y}\right\|\left\|x - y\right\|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись тем известным фактом (см., например, [4], с. 109), что оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество в евклидовом пространстве является нерастягивающим, получим:

$$\left(f(t,x) - f(t,\overline{y}), x - y\right) \le L\left\|x - y\right\|^2.$$

Отсюда и из (8) следует:

$$\begin{aligned} p &\le L\left\|x - y\right\|^2 + \left(\nu_x f(t,x), y - x\right) + \\ &+ K\left(y - \overline{y}, x - \overline{y}\right) + K\left(y - \overline{y}, \overline{y} - y\right). \end{aligned}$$

Очевидно, последнее слагаемое в правой части не больше нуля. Нетрудно проверить, что справедлива следующая эквивалентность:

$$\begin{aligned} &\overline{y} = P(y,Q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall(x \in Q)\left[\left(y - \overline{y}, x - \overline{y}\right) \le 0\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Поэтому

$$p \le L\left\|x - y\right\|^2 + \left(\nu_x f(t,x), y - x\right) \tag{10}$$

и, тем самым,

$$\begin{aligned} p &\le L\left\|x - y\right\|^2 + \left(\nu_x f(t,x), y - \overline{y}\right) + \\ &+ \left(\nu_x f(t,x), \overline{y} - x\right). \end{aligned}$$

Из определения нормального конуса (см. [4], с. 109) следует, что

$$\left(\nu_x f(t,x), \overline{y} - x\right) \le 0.$$

Следовательно,

$$p \le L\left\|x - y\right\|^2 + \left(\nu_x f(t,x), y - \overline{y}\right).$$

По аналогии с [2] можно получить оценку удаления y от Q :

$$\left\|y - \overline{y}\right\| \le \frac{C}{K}.$$

Далее, воспользовавшись ограниченностью функции f, получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|x - y\right\|^2 \le L\left\|x - y\right\|^2 + \frac{C^2}{K}.$$

Отсюда вытекает, что абсолютно непрерывная функция $u(t) = \left\|x(t) - y(t)\right\|^2$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению

$$\dot{u} = 2Lu + 2\frac{C^2}{K} - b(t)$$

с неотрицательной суммируемой функцией $b(t)$. С учетом равенства $u(t_0) = 0$ можно, как и в элементарной теории уравнений с непрерывными коэффициентами, получить:

$$u(t) = 2\int_{t_0}^{t} e^{2L(t-s)}\left[\frac{C^2}{K} - \frac{b(s)}{2}\right]ds.$$

Следовательно, при $t \in [t_0, t_0 + a]$

$$u(t) \le 2\frac{C^2}{K}\int_{t_0}^{t} e^{2L(t-s)}ds \le \frac{C^2}{LK}e^{2La},$$

то есть справедливо неравенство (7). Теорема полностью доказана.

3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

В двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим множество Q как пересечение двух полупространств Q_1 и Q_2, которые являются множествами векторов z, соответственно, удовлетворяющих при некоторых фиксированных единичных $n_i \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1,2)$ неравенствам $\left(n_i, z\right) \le 0$. При этом вектор n_i называется *внешней нормалью* к полупространству Q_i. Нетрудно видеть, что такое множество Q является непустым, замкнутым и выпуклым. Пусть n_1, n_2 не коллинеарны и $\omega \in \left(0, \pi\right)$ — меньший из двух углов между этими векторами. В частном случае *гладкая модель* определяется следующим уравнением:

$$\dot{z} = f(t,z) - K\max\left\{\left(n_1, z\right)_+, \left(n_2, z\right)_+\right\}\sum_{l \in M(z)} n_l, \tag{11}$$

здесь z_+ — положительная часть числа z, т.е. $\max\{0, z\}$;

$$l \in M(z) \Leftrightarrow \left(n_l, z\right) = \max\left\{\left(n_1, z\right)_+, \left(n_2, z\right)_+\right\}.$$

Теорема.

Пусть $x(t), z(t)$ — решения систем (1), (11), соответственно, удовлетворяющие начальным условиям:

$$x(t_0) = z(t_0) = x_0 \in Q. \tag{12}$$

Тогда при всех $t \in [t_0, t_0 + a]$ выполнена следующая оценка:

$$\left\|x(t) - z(t)\right\| \le \frac{Ce^{La}}{\sqrt{L\min\left\{2\sin\omega_0, 1\right\}\sin\omega_0}}\frac{1}{\sqrt{K}},$$

где $\omega_0 = \min\left\{\dfrac{\omega}{2}, \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\omega}{2}\right\}$.

Доказательство. В тех точках $x \in Q$, в которых $\dot{x}$ существует, мы оценим величину $p = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left\|x - z\right\|^2$. Будем оценивать эту величину в двух случаях. Первый случай, когда значение $\max\left\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\right\}$ достигается одним из значений $(n_1, z)_+$, $(n_2, z)_+$. Для определенности будем считать, что $\max\left\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\right\} = (n_1, z)_+$. Тогда уравнение (11) записывается в виде

$$\dot{z} = f(t, z) - K(z - z_1),$$

где $z_1 = P(z, Q_1)$.

Если $z_1 \in Q$, то по аналогии с доказательством теоремы предыдущего пункта получим, что

$$p \le L\left\|x - z\right\|^2 + \frac{C^2}{K}. \tag{14}$$

Если $z_1 \notin Q$, то нетрудно проверить, что проекция $\bar{z}$ точки z на Q является угловой точкой этого множества. Через γ обозначим угол, образуемый векторами $\bar{z}z$ и $\bar{z}z_1$. Легко видеть, что $\gamma \in \left[\omega_0, \pi/2\right]$. По аналогии с [2] можно получить оценку удаления z от Q_1:

$$\left\|z - z_1\right\| \le \frac{C}{K}$$

— и, следовательно,

$$\left\|z - \bar{z}\right\| = \frac{\left\|z - z_1\right\|}{\sin\gamma} \le \frac{C}{K\sin\omega_0}. \tag{15}$$

Как и в доказательстве теоремы предыдущего пункта, верно неравенство (10), в котором y заменено на z, т.е.

$$p \le L\left\|x - z\right\|^2 + \left(\nu_x f(t, x), z - x\right),$$

и далее, нетрудно получить, что

$$p \le L\left\|x - z\right\|^2 + C\left\|z - \bar{z}\right\|.$$

Отсюда и из неравенства (15) вытекает, что

$$p \le L\left\|x - z\right\|^2 + \frac{C^2}{K\sin\omega_0}. \tag{16}$$

Итак, в этом случае из неравенств (14) и (16) следует, что для величины p справедливо неравенство (16).

Теперь оценим p во втором случае, когда

$$\max\left\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\right\} = (n_1, z)_+ = (n_2, z)_+.$$

Уравнение (11) записывается в виде:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(t, z) - \\ &-K\max\left\{(n_1, z)_+, (n_2, z)_+\right\}(n_1 + n_2) = \\ &= f(t, z) - K\left((n_1, z)_+ n_1 + (n_2, z)_+ n_2\right)\end{aligned}$$

и, тем самым,

$$\dot{z} = f(t, z) - K\left(z - z_1 + z - z_2\right). \tag{17}$$

Если $z \in Q$, то $z = z_1 = z_2$. Тогда нетрудно получить, что

$$p \le L\left\|x - z\right\|^2 + \left(\nu_x f(t, x), z - x\right) \le L\left\|x - z\right\|^2 \tag{18}$$

(так как $\left(\nu_x f(t, x), z - x\right) \le 0$ в силу определения нормального конуса).

Если $z \notin Q$, то в этом случае $z \in -Q$ и лежит на биссектрисе угла $z_1\bar{z}z_2$, где z_1, $\bar{z}$ и z_2 являются проекциями, соответственно, на Q_1, Q и Q_2. Тогда

$$\begin{aligned}&z - z_1 + z - z_2 = \\ &= \frac{z - \bar{z}}{\left\|z - \bar{z}\right\|}2\left\|z - z_1\right\|\cos\frac{\omega}{2} = \\ &= 2\left(z - \bar{z}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right)\cos\frac{\omega}{2} = \\ &= 2\left(z - \bar{z}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}$$

В силу этого уравнение (17) имеет следующий вид:

$$\dot{z} = f(t, z) - K\left(z - \bar{z}\right)2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right).$$

По теореме предыдущего пункта получим, что

$$p \le L\left\|x - z\right\|^2 + \frac{C^2}{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\omega}{2}\right)}\frac{1}{K}$$

и, следовательно,

$$p \le L\left\|x-z\right\|^2 + \frac{C^2}{2\sin^2\omega_0}\frac{1}{K}. \qquad (19)$$

Во втором случае из неравенств (18) и (19) следует, что для величины p справедливо неравенство (19).

Из неравенств (16) и (19) вытекает, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|x-z\right\|^2 \le L\left\|x-z\right\|^2 + \frac{C^2}{\min\left\{2\sin\omega_0, 1\right\}\sin\omega_0}\frac{1}{K}.$$

Решив это дифференциальное неравенство способом, указанным в предыдущем пункте, непосредственно получим оценку (13).

4. ПРИМЕР

Рассматривается электрическая цепь, которая состоит из сопротивления R, индуктивности $\tilde{L}$ и источника ЭДС, подключенного с помощью диодного двухполупериодного выпрямителя (см. рис. 1) (см. [5]).

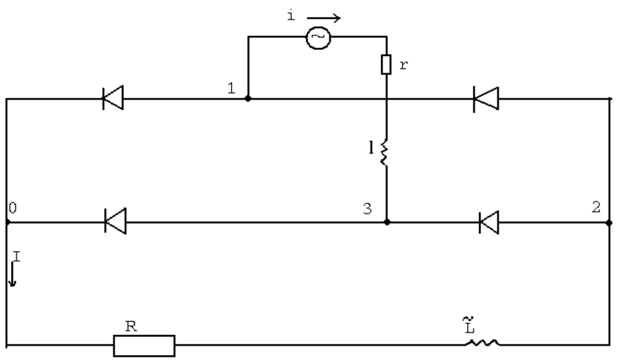

Рис. 1. Двухполупериодный выпрямитель

Диоды будем считать *идеальными*, т.е. их токи i_k и напряжения u_k от анода к катоду удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} i_k \ge 0, \\ u_k \le 0, \\ i_k u_k = 0. \end{cases}$$

В цепи питания имеется источник ЭДС, вырабатывающий напряжение $u = -f(t,i)$, сопротивление r, и индуктивность l. Обозначим через u_1 разность потенциалов между первым и нулевым узлами, через u_2 — между вторым и нулевым и через u_3 — между третьим и нулевым. Имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} l\dfrac{di}{dt} + ri + u_3 - u_1 = f(t,i) \\ \tilde{L}\dfrac{dI}{dt} + RI + u_2 = 0. \end{cases} \qquad (20)$$

Сделаем следующие замены переменных:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{l} \\ I\sqrt{\tilde{L}} \end{pmatrix}$$

и

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u_3 - u_1}{\sqrt{l}} \\ \dfrac{u_2}{\sqrt{\tilde{L}}} \end{pmatrix}.$$

Тогда система (20) записывается в виде

$$\dot{x} + Ax + y = F(t,x), \qquad (21)$$

где $A = \begin{pmatrix} r/l & 0 \\ 0 & R/\tilde{L} \end{pmatrix}$ и $F(t,x) = \begin{pmatrix} f(t,i)/\sqrt{l} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Можно доказать, что x лежит в конусе Q, который является конической оболочкой в $\mathbb{R}^2$ векторов $\begin{pmatrix} \sqrt{l/\tilde{L}} \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -\sqrt{l/\tilde{L}} \\ 1 \end{pmatrix}$, а y лежит в $N_x(Q)$ — нормальном конусе к конусу Q в точке x (см. [4] с. 109). Техника подобных преобразований описана в [6]. Если обозначим $G(t,x) := F(t,x) - Ax$, то получим эквивалентное уравнению (21) дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \tau_x G(t,x). \qquad (22)$$

В этом примере множество Q является пересечением двух полупространств, внешними нормалями которых являются, соответственно, векторы $N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{l/\tilde{L}} \end{pmatrix}$ и $N_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{l/\tilde{L}} \end{pmatrix}$. Наряду с (22) рассмотрим гладкую модель, описываемую уравнением (11), в котором $f(t,z)$ заменено на $G(t,z)$, т.е.

$$\dot{z} = G(t,z) - \\ -K\max\left\{(n_1,z)_+, (n_2,z)_+\right\}\sum_{l\in M(z)} n_l, \qquad (23)$$

где n_1, n_2 — единичные векторы, коллинеарные, соответственно, векторам N_1, N_2.

Векторы n_1 n_2 образуют угол ω, который вычисляется следующим образом:

$$\cos\omega = \frac{(N_1, N_2)}{\left\|N_1\right\|\left\|N_2\right\|} = \frac{l - \tilde{L}}{\tilde{L} + l}$$

и, следовательно,

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\tilde{L}}{\tilde{L}+l}} \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{l}{\tilde{L}+l}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\omega_0 = \min\left\{\frac{\omega}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right\} = \arcsin\sqrt{\frac{\min\left\{l, \tilde{L}\right\}}{\tilde{L} + l}}.$$

Пусть источник ЭДС таков, что $G(t,x)$ удовлетворяет условиям (2)—(4), тогда, применив теорему в частном случае, получим, что расстояние между решениями уравнений (22) и (23) с одинаковыми начальными условиями оценивается как в неравенстве (13), в котором $\sin\omega_0 = \sqrt{\frac{\min\left\{l, \tilde{L}\right\}}{\tilde{L} + l}}$, т.е. при $t \in [t_0, t_0 + a]$

$$\left\|x(t) - z(t)\right\| \le$$

$$\le \frac{Ce^{La}}{\sqrt{L\min\left\{2\sqrt{\frac{\min\left\{l, \tilde{L}\right\}}{\tilde{L} + l}}, 1\right\}\sqrt{\frac{\min\left\{l, \tilde{L}\right\}}{\tilde{L} + l}}}}\frac{1}{\sqrt{K}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петрова Л. П., Садовский Б. Н.* К математической теории электрических цепей с диодными преобразователями тока. — Воронеж. — 1982.

2. *Лобанова О. А.* О движении точки в ограниченном фазовом пространстве: Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. — Воронеж. — 1999. — С. 88—92.

3. *Лобанова О. А., Садовский Б. Н.* О двумерных динамических системах с ограничением, Дифф. Ур., 2007. — Том 43. — № 4. — С. 449—456.

4. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. — М., 1983.

5. *Нестеренко Р. В., Садовский Б. Н.* О вынужденных колебаниях в двумерном конусе, Автом. и телемех., 2002. — № 2. — С. 14—21.

6. *Петрова Л. П.* Об одной модели идеального диодного преобразователя // Тр. мат. факультета № 1 (новая серия). Воронеж: Изд-во ВГУ, 1996.

Нгуен Тхи Хиен, аспирантка кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет

E-mail: kfa@math.vsu.ru

Тел.: (4732) 208-771, 8 950 779-70-46

Nguyen Thi Hien, post-graduate student, chair of functional analysis and operator equations, Voronezh State University

E-mail: kfa@math.vsu.ru

Tel.: (4732) 208-771, 8 950 779-70-46