УДК 517.9:532

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С D_B-ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Л. Н. Ляхов, Л. Б. Райхельгауз

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19 июля 2010 г.

Аннотация: рассмотрена задача Коши для параболических систем сингулярных дифференциальных уравнений с D_B -оператором Бесселя, степени которого представляют собой степень сингулярного дифференциального оператора Бесселя или производную от степени этого оператора. Применяется операционный метод на основе интегрального преобразования, введенного ранее И. А. Киприяновым и В. В. Катраховым (называется — "полное преобразование Фурье-Бесселя"). Сформулированы теоремы существования и единственности решения этой задачи Коши в соответствующем классе обобщенных вектор-функций.
Ключевые слова: оператор Бесселя, D_B -оператор Бесселя, задача Коши, преобразование Фурье-Бесселя, полное преобразование Фурье-Бесселя, F_B -мультипликатор.

Abstract: the Cauchy's problem for parabolic systems of a singular differential equations with Bessel's operator which degrees represent a degree singular differential operator Bessel's operator or derivative of degree of this operator is considered. The operational method on the basis of the integrated transformation entered before I. A. Kiprijanov and V. V. Katrahov. (It is called "common Fourier-Bessel's transformation"). Theorems of existence and uniqueness theorems of solution in a corresponding class of the generalized vector functions are formulated.
Key words: Bessel's operator, D_B -Bessel's operator, a Cauchy's problem, Fourier-Bessel's transformation, common Fourier-Bessel's transformation, a F_B - multiplicator.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при исследовании задач теории функций и дифференциальных уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя

$$B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}dx, \ p > -\frac{1}{2}$$

роль преобразований Фурье с успехом выполняет преобразование Фурье—Бесселя следующего вида (см книгу И. А. Киприянова [1] и статью [2])*

$$F_B\left[f(x)\right](\xi) = \int_0^\infty f(x) j_p(x\xi) x^{2p+1} dx. \qquad (1)$$

Обратное преобразование Фурье-Бесселя определяется равенством

$$F_B^{-1}\left[g(\xi)\right](x) = \frac{1}{2^{2p}\Gamma^2(p+1)} F_B\left[g(x)\right](\xi). \quad (2)$$

Ядро преобразования (функция j_p) связано с функцией Бесселя первого рода J_p равенством $j_p(x) = 2^p\,\Gamma\left(p+1\right)\dfrac{J_p(x)}{x^p}$ и, кроме того, удовлетворяет уравнению

$$Bj_p(x,\xi) = -\xi^2 j_p(x\xi) \qquad (3)$$

и начальным условиям $j_p(0) = 1$, $j_p'(0) = 0$.

Функция j_p — четная, и поэтому преобразования (1), (2) уместны при работе с четными функциями (есть аналогия с косинус-преобразованием Фурье). Другое ограничение для применения преобразования (1) к дифференциальным уравнениям: оно приспособлено лишь для уравнений, содержащих дифференциальные операторы вида B^m четного порядка $2m$ (см. [1], [2]). Ситуация, когда в уравнении присутствуют "нечетные" производные (например, градиент функции), никогда не изучалась применением операционных методов, а эта ситуация более общая. Мы рассматриваем задачу Коши, в которой производные образуют сингулярный дифференциальный оператор порядка α следующего вида:

* По-видимому, это впервые заметила В. М. Борок. На это прямо указано в работе Житомирского Я. И. [2]. Изучение проблем теории функций на основе этого преобразования осуществлено И. А. Киприяновым и его научной школой.

$$D_B^\alpha = \begin{cases} B^{\alpha/2}, & \alpha = 2k, \\ \dfrac{d}{dx} B^{(\alpha-1)/2}, & \alpha = 2k+1 \end{cases}, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

В частности, при $\alpha = 1$ этот оператор совпадает с производной: $D_B^1 = \dfrac{d}{dx}$.

В этой работе мы используем введенное И. А. Киприяновым и В. В. Катраховым в работе [3] преобразование Фурье-Бесселя общего вида, ядро которого содержит “четную” $j_p(x)$ и “нечетную” $xj_{p+1}(x)$ свои составляющие.

Пусть $x = (x', x'') \in R_N = R_n \times R_{N-n}$, $x' \in R_n$, $x'' \in R_{N-n}$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\nu_i > -\dfrac{1}{2}$,

$$\Lambda_\nu^\pm\left(x', \xi'\right) = \\ = \prod_{i=1}^n \left(j_{\nu_i}\left(x_i \xi_i\right) \mp i \frac{x_i \xi_i}{2(\nu_i + 1)} j_{\nu_i + 1}\left(x_i \xi_i\right) \right).$$

Положим $\gamma_i = 2\nu_i + 1$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $x'^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. *Смешанное прямое и обратное полное преобразование Фурье-Бесселя* введем по формулам, соответственно

$$\mathcal{F}_B\left[f\right](\xi) = \\ = \int_{R_N} f(x) \Lambda_\nu^+(x', \xi') e^{-i\langle x'', \xi''\rangle} (x'^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx, \tag{4}$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}\left[f\right](\xi) = \\ = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2^{2p_i + 1} \Gamma^2(p_i + 1)} \mathcal{F}_B\left[f\right](-x). \tag{5}$$

Интегралы в (4), (5), как обычно, понимаются в смысле главного значения.

Через $S = S(R_N)$ будем обозначать пространство основных функций Л. Шварца, а через S_{ev} — его подпространство, состоящее из функций четных по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Для $f \in S$ имеют место формулы обращения (доказательство этих формул для четной составляющей преобразования Фурье-Бесселя приведено в [1], а для нечетной — в [4])

$$\mathcal{F}_B^{-1}\left[\mathcal{F}_B\left[f\right]\right] = f; \\ \mathcal{F}_B\left[\mathcal{F}_B^{-1}\left[f\right]\right] = f.$$

Весовая линейная форма

$$(f, g)_\gamma = \int_{R_N} f(x) g(x) (x'^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx$$

порождает банахово пространство $L_2^\gamma(R_N)$ с нормой $\left\|f\right\|_{L_2^\gamma} = \sqrt{(f, f)_\gamma}$.

Из связи (3) и из теоремы Планшереля для преобразования Ганкеля (см., например, книгу [5]) вытекают формула Планшереля и формула Парсеваля для полного преобразования Фурье—Бесселя, соответственно

$$(f, g)_\gamma = \left(\mathcal{F}_B\left[f\right], \mathcal{F}_B\left[g\right]\right)_\gamma, \\ \left\|f\right\|_{L_2^\gamma} = \left\|\mathcal{F}_B\left[f\right]\right\|_{L_2^\gamma}.$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА D_B^α В ОБРАЗАХ ПОЛНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ—БЕССЕЛЯ

Упрощая, рассмотрим функции одного переменного. Введем обозначение: $\dfrac{d}{dx} = D$. В этих обозначениях оператор Бесселя имеет вид

$$B = D^2 + \frac{\gamma}{x} D, \text{ (как и раньше, } \gamma > 0).$$

Пусть $f \in S_{ev}$. Для четного преобразования Фурье-Бесселя (1) хорошо известна формула $F_B\left[B^m f\right](\xi) = (i\xi)^{2m} F_B\left[f\right](\xi)$, $m = 0,1,2,\ldots$, (см. [1]). Из нее с очевидностью вытекает

$$\mathcal{F}_B\left[B^m f\right](\xi) = (i\xi)^{2m} \mathcal{F}_B\left[f\right](\xi), \\ m = 0,1,2,\ldots. \tag{6}$$

Для полного преобразования Фурье—Бесселя функции $D_B^\alpha f$, $f \in S_{ev}$ справедлива формула

$$\mathcal{F}_B\left[D_B^\alpha f\right](\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}_B\left[f\right](\xi), \\ \alpha = 0,1,2,\ldots. \tag{7}$$

Как видим, эта формула совпадает с (6), когда число α четное $(= 2m)$.

Докажем (7) при нечетном $\alpha = 2m + 1$. Пусть $f \in S_{ev}$, тогда $D_B^\alpha f$ — нечетная функция. Имеем (здесь и далее удобно пользоваться обозначениями $\gamma = 2\nu + 1$)

$$\mathcal{F}_B[D_B^\alpha f](\xi) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} DB^m f(x) \Lambda_\nu^+(x, xi) (x^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx = \\ = -2i \int_0^{+\infty} DB^m f(x) \frac{x\xi}{\gamma + 1} j_{\nu+1}(x\xi) x^\gamma dx = \\ = -\frac{2i}{\xi} \int_0^{+\infty} B^m f(x) \frac{1}{x^\gamma} D\left(x^\gamma D j_p(x\xi)\right) x^\gamma dx.$$

Здесь мы воспользовались рекуррентной формулой $Dj_\nu(x) = -\dfrac{x}{2(\nu+1)}\, j_{\nu+1}(x)$. Применяя (3) и (6), получим (7).

Замечание. *Из (7) видим, что символом оператора D_B^α (α — целое) в образах полного преобразования Фурье—Бесселя является функция $(i\xi)^\alpha$. Но точно такой же символ отвечает обычной степени производной D^α в образах преобразования Фурье. Это весьма примечательно и дает возможность воспользоваться классическими результатами* [6] *и* [7] *при исследовании задачи Коши для уравнений с D_B-оператором Бесселя по пространственным переменным, чем мы, разумеется, и воспользуемся далее.*

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С D_B-ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Пусть $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ — целочисленный мультииндекс длины $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Используем обозначения $\left(D_B\right)_{x'}^{\alpha'} = \left(D_{B_1}^{\alpha_1}, \ldots, D_{B_n}^{\alpha_n}\right)$, где

$$D_{B_j}^{\alpha_j} = \frac{1}{i^{\alpha_j}} \begin{cases} B_j^{\alpha_j/2}, & \alpha_j = 2k, \\ D_{x_j} B_j^{\frac{(\alpha_j - 1)}{2}}, & \alpha_j = 2k+1, \end{cases}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$B_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_j}{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j},$$
$$\gamma_j > 0;$$

и $D_{x''}^{\alpha''} = (D_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}, \ldots, D_{x_N}^{\alpha_N})$, где $D_{x_j} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Рассмотрим следующую систему линейных сингулярных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{|\alpha| \le k} P_{ij}^{\alpha}(t) (D_B)_{x'}^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''} u_j(x,t),$$
$$i = 1, \ldots, m,$$

которая в матричной форме представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left((D_B)_{x'}, (D)_{x''}\right) u(x,t); \tag{9}$$

здесь $u(x,t) = \left(u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t)\right)$ — искомая вектор-функция с m компонентами, зависящая от времени $t \in R_1^+$, $t > 0$ и от пространственных переменных $x = (x', x'')$, $x' \in R_n^+$, $x'' \in R_{N-n}$, четная по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$; оператор $P\left((D_B)_{x'}, (D)_{x''}\right)$ представляет собой $m \times m$ матрицу, элементами которой являются полиномы от D_B-производных по переменным x' и обычных производных по переменным x'' с коэффициентами, непрерывно зависящими от времени t.

Задача Коши ставится следующим образом: найти решение матричного уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{10}$$

где $u_0(x)$ — заданная вектор-функция.

Мы следуем подходу к решению подобных задач, развитому в работе В. М. Борок в [7]. Также, как в [7], используется терминология, приненная И. М. Гельфандом, Г. Е. Шиловым в [6], согласно которой уравнение (9) истолковывается как уравнение относительно соответствующей обобщенной вектор-функции, принадлежащей по переменной x некоторому фиксированному пространству регулярных обобщенных вектор-функций $\Phi'(R_N^+)$.

В этой работе в качестве основного пространства удобно использовать пространство Φ_{ev}, построенное по типу основных пространств Лизоркина следующим образом. Введем основное пространство функций, зависящих от переменной t как от параметра

$$\Psi = \Psi(R_{N+1}) = \Big\{\psi(\xi,t) \in S_{ev}(R_N),$$
$$\forall t > 0 : (D_B)_{\xi'}^{\alpha'} D_{\xi''}^{\alpha''} \psi(0,t) = 0\Big\}.$$

Тогда

$$\Phi = \Psi(R_{N+1}) = \Big\{\varphi(\xi,t) = \mathcal{F}_B\left[\psi\right](x,t).$$

Отметим, что функции из этих пространств обладают в нуле разными свойствами, поэтому пространства Φ и Ψ не инвариантны относительно смешанного преобразования Фурье-Бесселя.

Пространство соответствующих весовых функционалов, порожденных весовой линейной формой $(\cdot,\cdot)_\gamma$ будем обозначать Ψ', Φ'.

Задачу (9), (10) рассматриваем в пространстве Φ'. Применим к ней смешанное полное преобразование Фурье-Бесселя. Тогда в пространстве, двойственном к Φ' по отношению к $\mathcal{F}_B$-преобразованию, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t} = P(i\xi) v(\xi,t),\; v(x\xi) = \hat{u}(\xi,t); \tag{11}$$

с начальным условием

$$v(\xi,0) = v_0(\xi) = \hat{u}_0(\xi), \qquad (12)$$

Здесь надо отметить следующее.

Во-первых, проблема единственности решения задачи Коши (9), (10) в силу изоморфизма пространств $\mathbf{\Phi}'$ и $\mathcal{F}_B[\mathbf{\Phi}']$ эквивалентна проблеме единственности решения задачи (11), (12).

Во-вторых, полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (11) ничем не отличается от соответствующих систем уравнений, исследованных в работах И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [6], В. М. Борок [7]. Есть естественные отличия от работы Я. И. Житомирского [2], где идеи В. Б. Борок перенесены на системы, в которых роль производной выполняли степени сингулярного дифференциального оператора Бесселя. Т.е., в работе Я. И. Житомирского все многочлены в двойственных переменных могли зависеть только от четных степеней ξ_i. Тем самым в наших исследованиях аналогия с классическими результатами более очевидная по сравнению с [2].

Следовательно, мы можем воспользоваться результатами работ [7], [6], [8] и пройти тот же путь, что и в [2], на более общих основаниях.

В частности имеем следующее.

Существует матрица нормальной фундаментальной системы решений (11)(для общности полагаем, что начальное условие поставлено в произвольной точке t_0):

$$Q(\xi,t_0,t) = \begin{Vmatrix} v_1^{(1)}(\xi,t_0,t) & \dots & v_1^{(m)}(\xi,t_0,t) \\ v_1^{(2)}(\xi,t_0,t) & \dots & v_2^{(m)}(\xi,t_0,t) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_m^{(1)}(\xi,t_0,t) & \dots & v_m^{(m)}(\xi,t_0,t) \end{Vmatrix}.$$

элементами которой являются решения

$$v^{(j)}(\xi,t_0,t) = (v_1^{(j)}(\xi,t_0,t),\dots,v_m^{(j)}(\xi,t_0,t)),$$

удовлетворяющие начальному условию

$$v_k^j(\xi,t_0,t)\,|_{t=t_0} = \delta_k^j = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}.$$

При этом матрица $Q(\xi,t_0,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dQ(\xi,t_0,t)}{dt} = P(i\xi,t)Q(\xi,t_0,t)$$

и начальному условию

$$Q(\xi,t_0,t_0) = E$$

(E — $m \times m$ единичная матрица).

И, наконец, из работы [6] известно, что решение системы (11), обращающееся в заданную вектор-функцию $\hat{u}_0(\xi)$, может быть записано в форме

$$\hat{u}(\xi,t_0,t) = Q(\xi,t_0,t)\hat{u}_0(\xi).$$

Элементы матрицы $Q(\xi,t_0,t)$ представляют собой аналитические функции от $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_N)$. Для случая одного уравнения $\left(m=1\right)$ матрица $Q(\xi,t_0,t)$ оказывается функцией

$$Q(\xi,t_0,t) = e^{\int_{t_0}^{t} P(i\xi,t)dt}. \qquad (13)$$

В общем случае $\left(m \neq 1\right)$ матрица $Q(\xi,t_0,t)$ также может быть записана в виде интеграла (13), который надо понимать как мультипликативный.

О ТЕОРЕМАХ ГЕЛЬФАНДА—ШИЛОВА О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ И СВЕРТЫВАТЕЛЯХ

Обращаясь к равенству (13) видим, что формально решение задачи (9), (10) получается применением к (13) полного обратного четного преобразования Фурье-Бесселя:

$$u(x,t_0,t) = \mathcal{F}_{ev}^{-1}\left[Q(\xi,t_0,t)\hat{u}_0(\xi)\right](x,t). \qquad (14)$$

Но на этом пути две проблемы.

Первая, как и в классических задачах, состоит в том, что матрица $Q(\xi,t_0,t)$ и начальная функция $v_0(\xi)$ могут не выдерживать смешанного (полного, четного, нечетного) преобразования Фурье—Бесселя, даже в классе соответствующих весовых распределений; эта проблема решается так же, как в классическом случае — пожеланием, чтобы матрица $Q(\xi,t_0,t)$ принадлежала соответствующему классу "регулярных весовых распределений", и, соответственно, чтобы система (9), (10) принадлежала классу "регулярных" систем, порожденных сингулярным дифференциальным оператором D_B. Другими словами, нам надо твердо знать, что выражение $Q(\xi,t_0,t)\hat{u}_0(\xi)$ имеет смысл. В указанных выше классических работах это произведение должно было принадлежать классу соответствующих распределений, так, чтобы в этом классе распределений можно было воспользоваться *теоремой Гельфанда-Шилова о мультипликаторах и свертывателях*: *Если обобщенная функция является мультипликатором* в пространстве основных функций* $\mathbf{\Phi}$,

* Мультипликатором в пространстве $\mathbf{\Phi}$ называется любая функция f обладающая тем свойством, что из $\phi \in \mathbf{\Phi}$ следует $f\phi \in \mathbf{\Phi}$ и из $\phi_k \to 0$ следует $f\phi_k \to 0$.

то ее преобразование Фурье является свертывателем в том же пространстве основных функций: $F\left[f\phi\right]=\left(\hat{f}*\hat{\phi}\right)$.

В общем виде, когда преобразование Фурье—Бесселя (преобразования Ганкеля по каждой из некоторого набора переменных) действует по части переменных (с разными индексами γ_i), а по другой части переменных действует преобразование Фурье, а основное пространство не инвариантно относительно используемого преобразования Фурье—Бесселя, теорема, типа теоремы Гельфанда—Шилова о мультипликаторах и свертывателях получена в [9], [10]. Свертка, порожденная преобразованием Фурье—Бесселя, введена в [2]; ее определение можно найти в книге [1], и мы его не приводим. Из [9] известен следующий результат о F_B-мультипликаторе и обобщенном свертывателе. *Пусть* $\Phi(R_N^+)$ *— основное пространство функций с непрерывным обобщенным сдвигом,* F_B *и* F_B^{-1} *— прямое и обратное* (четное, смешанное) *преобразование Фурье-Бесселя, и*

$$\Psi(R_N^+)=\left\{\psi:\psi=F_B[\phi],\phi\in\Phi(R_N^+)\right\}.$$

Если регулярное распределение g является мультипликатором в пространстве $\Psi'(R_N^+)$, то распределение (весовая обобщенная функция) $f=F_B^{-1}[g]$ *— обобщенный свертыватель в пространстве распределений* $\Phi'(R_N^+)=F_B[\Psi(R_N^+)]$, *и для любого распределения* $f_1\in\Phi(R_N^+)$ *имеет место равенство*

$$F_B\left[\left(f*f_1\right)_\gamma\right]=F_B\left[f\right]F_B\left[f_1\right].$$

Именно этой теоремой мы и воспользуемся в дальнейшем, понимая под пространствами основных функций и соответствующих регулярных весовых распределений вектор-функции $\Phi^{(m)}(R_N^+)$, $\Phi'^{(m)}(R_N^+)$ и $\Psi^{(m)}(R_N^+)$, $\Psi'^{(m)}(R_N^+)$.

Вторая проблема более специфична и заключена как раз в проблеме мультипликатора. Дело в том, что решение рассматриваемой системы сингулярных дифференциальных уравнений мы должны определить из равенства (14). В самом же равенстве (14) слева, по условиям нашей задачи, обязательно четная функция, а справа произведение, в котором лишь начальная функция $v_0(\xi)$ является четной. Таким образом, функция (весовая обобщенная) слева в равенстве (14) не обязана быть четной, т.е. удовлетворять условию, что ее производная по x_1 равна нулю на гиперплоскости $x_1=0$ и, следовательно, принадлежать $S'_{ev}(R_N)$, и это несмотря на то, что это произведение, рассматриваемое как функция, определенная на множестве R_N^+, безусловно принадлежит пространству ограниченных, линейных функционалов $S'(R_N^+)$.

Эта проблема решается введением специального класса обобщенных функций, допускающих гладкое продолжение по каждой из весовых координат.

ПРОСТРАНСТВО ЛИЗОРКИНА ФУНКЦИЙ, ИСЧЕЗАЮЩИХ НА СИНГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Мультипликатором для пространства $S_{ev}(R_N^+)$ является любая бесконечно дифференцируемая функция, четная по переменной x_i, $1\le i\le n$ (т.е. функция f, заданная на R_N^+, такая, что $f'_{x_1}(0,x')=0$), которая вместе со всеми своими производными растет не быстрее некоторого полинома при $|x|\to\infty$. Задача, следовательно, заключается в определении подмножества множества $S_{ev}(R_N^+)$, имеющего одновременно и четное и нечетное бесконечно дифференцируемое продолжение по весовым переменным x_i, $i=1,2\dots,n$ на все R_n. И ответ у этой задачи: это подмножество состоит из функций, вырождающихся на сингулярной гиперплоскости оператора Бесселя вместе со всеми производными и B-производными любого порядка:

$$\begin{gathered}\Psi_\gamma(R_N^+)=\Big\{\psi:\psi(x)\in S_{ev}(R_N^+),\\ \left((D_B)^{\alpha'}D_{x''}^{\alpha''}\right)\psi(x',x'')\Big|_{x_i=0}=0\Big\},\end{gathered}\qquad(15)$$

где α' и α'' — произвольные целочисленные мультииндексы размерности n, $N-n$ соответственно и

$$\Phi_\gamma\left(R_N^+\right)=\left\{\phi:\phi=F_B[\psi]\right\}.\qquad(16)$$

Такие пространства основных функций исследовались П. И. Лизоркиным, который ввел основные пространства функций, исчезающих в начале координат, основные пространства функций, исчезающих на координатных гиперплоскостях (см. [11]). Основное пространство функций, исчезающих на сингулярной гиперплоскости оператора Бесселя введено в [9]. Введенное выше пространство $\Phi_\gamma(R_N^+)$ является обобщением основного пространства функций, введенного в [9] в связи с использованием D_B-оператра Бесселя вместо оператора Бесселя.

Свойства.

1. *Любая бесконечно дифференцируемая функция* $f(x)$, *растущая при* $|x| \to \infty$ *не быстрее некоторого многочлена, а при* $x_i \to 0$ $\left(1 \le i \le n\right)$, *не быстрее некоторой степени* $\frac{1}{x_i}$, *является мультипликатором пространства* $\Psi_\gamma(R_N^+)$.

2. *Если* $\psi \in \Psi_\gamma(R_N^+)$, *а регулярный функционал* $f \in S'(R_N)$ *задан нечетной по переменной* x_i $\left(1 \le i \le n\right)$ *функцией* $f(x)$, *то*

$$\int_{R_N^+} f(x)\psi(x)x'^\gamma dx =$$

$$= \int_{R_N} f(x)\psi_{od}(x)\left(x'^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} dx = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}(f, \psi_{od})_{R_N, \gamma},$$

а если четной, то

$$\int_{R_N^+} f(x)\psi(x)x'^\gamma dx =$$

$$= \int_{R_N} f(x)\psi_{ev}(x)\left(x'^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} dx = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{2}(f, \psi_{ev})_{R_N}, \gamma,$$

где $R_N^+ = \left\{x : x_i > 0\right\}$, ψ_{od} и ψ_{ev}, соответственно, нечетное и четное продолжение функции ψ на отрицательную полуось $x_i < 0$.

3. *Пространство* $\Phi_\gamma(R_N^+)$ *состоит из тех и только тех функций, которые ортогональны функциям* $x^\alpha \prod_{i=1}^n j_{\nu_i}(x_i\xi_i)e^{-i\langle x'', \xi''\rangle}$.

Следующее свойство представляет собой вариант теоремы Гельфанда—Шилова [6] о свертывателе.

4. (теорема об обобщенном свертывателе). *Пусть* $\Phi^\gamma(R_N^+)$ *и* $\Psi(R_N^+)$ *— основное пространство функций* (15), (16). *Если регулярное весовое распределение* g *является мультипликатором в пространстве* $\Psi'(R_N^+)$, *то весовое распределение* $f = F_B^{-1}[g]$ *— обобщенный свертыватель в пространстве распределений* $\Phi'(R_N^+) = F_B\left[\Psi(R_N^+)\right]$, *и для любого распределения* $f_1 \in \Phi(R_N^+)$ *имеет место равенство*

$$F_B\left[(f * f_1)_\gamma\right] = F_B\left[f\right]F_B\left[f_1\right].$$

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Следующие две теоремы доказываются по схеме, используемой в классической работе [6] (стр. 44, теоремы 1 и 2), и мы доказательства этих теорем не приводим.

Теорема 1. *Если в пространстве* $\Psi_\gamma(R_N^+) = \mathcal{F}_B\left[\Phi_\gamma(R_N^+)\right]$ *основных функций* $\psi(\xi)$ *(следовательно, и в пространстве весовых распределений* $\Psi'_\gamma(R_N^+)$*) элементы матрицы* $Q(\xi, t_0, t)$ *являются мультипликаторами при любом* $t \ge 0$, *причем собственные значения являются различными и отрицательными, то система* (11) *имеет решение при любой начальной весовой обобщенной вектор-функции* $v_0(\xi) \in \Psi'^{(m)}(R_N^+)$:

$$v(\xi, t) = \hat{u}(\xi, t) = Q(\xi, 0, t)v_0(\xi),$$

причем это решение непрерывно зависит от начальной вектор-функции $v_0(\xi)$ в смысле непрерывности, установленной для пространства распределений $\Psi'^{(m)}(R_N^+)$. .

Теорема 2. *Если в пространстве* $\Psi_\gamma(R_N^+)$ *основных функций* ψ *(следовательно, в весовом пространстве распределений* Ψ'_N*) элементы матрицы* $Q(\xi, t_0, t)$ *являются мультипликаторами при любых* t, $0 \le t < t_0$, *причем собственные значения являются различными и отрицательными, то система* (11), (12) *может иметь лишь единственное решение в классе* $\Psi'^{(m)}_\gamma(R_N^+)$.

Решение задачи Коши (9), (10) при выполнении условий теоремы 4 можно получить на основании теоремы о свертывателе (свойство 4 предыдущего пункта). Однако теорема 4 накладывает ограничения на рост матриц $Q(\xi, 0, t)(\xi = \sigma + i\tau)$ при $\sigma \to \infty$. И действительно (см. критерий F_B-мультипликатора в работе [10]), чтобы матрица $Q(\xi, 0, t)$ была мультипликатором в пространстве Ψ_γ основных функций, нужно, чтобы она и все ее производные (и D_B-производные по x') росли на вещественной оси не быстрее некоторого полинома:

$$\left|\left(D_B\right)_{\sigma'}^{q'} D_{\sigma''}^{q''} Q\left(\sigma, 0, t\right)\right| \le C\left(1 + \left|\sigma\right|^2\right)^k, \tag{19}$$

$k > 0$ — фиксировано, а целочисленный мультииндекс $q = (q', q'')$ — произвольный.

Системы, для которых выполняется условие (19), следуя [6], будем называть *регулярными*. Отметим, что этим понятием пользовались и авторы работ [7] и [2].

Итак, для регулярных систем (9) матрица $\mathcal{F}_B^{-1}\left[Q(\xi,t_0,t)\right]$ является, согласно свойству (18), свертывателем в пространстве $\hat{\mathbf{\Psi}}'\left(R_N^+\right)=\mathbf{\Phi}'\left(R_N^+\right)$, и имеет место формула свертки (с интегрированием в R_N^+, на что указывает знак у скобки, обозначающий весовое скалярное произведение):

$$\begin{gathered} u(x,t)=F_B^{-1}\left[v(\xi,t)\right]= \\ =F_B^{-1}\left[Q(\xi,0,t)v_0(\xi)\right]= \\ =\left(F_B^{-1}\left[Q(\xi,0,t)\right]*u_0(x)\right)_{R_N^+,\gamma}, \end{gathered}$$

$$u(x,t)=\left(F_B^{-1}\left[Q(\xi,0,t)\right]*u_0(x)\right)_{R_N^+,\gamma}. \qquad (20)$$

Формула (20) дает вид решения задачи Коши (9), (10) для произвольных регулярных систем вида (9).

Основываясь на теоремах 4 и 5, мы можем сформулировать следующие две теоремы, определяющие класс начальных данных, в котором решение задачи Коши (9), (10) существует и единственно.

Теорема 3. *Если вектор-функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\left|u_0(x)\right|\le C_1\left(1+x^2\right)^k, \qquad (21)$$

где $k>0$ — произвольное целое число, то решение задачи Коши (9), (10) существует в классе обобщенных вектор-функций $u(x,t)$, которые при каждом $t\ge 0$ принадлежат пространству $\mathbf{\Psi}'_\gamma(R_N^+)$.

Теорема 4. *Если вектор-функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству* (21), *то решение задачи Коши всегда единственно в классе обобщенных вектор-функций* $\mathbf{\Psi}'_\gamma(R_N^+)$.

Пример. Докажем существование решения следующей задачи Коши

$$\begin{cases} iD_{x_1}u+2B_{x_2}u-B_{x_2}^2u-B_{x_1}B_{x_2}u- \\ -B_{x_1}v+2iD_{x_1}B_{x_2}v=\dfrac{\partial}{\partial t}u, \\ -B_{x_1}u+2iD_{x_1}B_{x_2}u-iD_{x_1}B_{x_2}v- \\ -B_{x_1}B_{x_2}v+B_{x_1}v+B_{x_2}v=\dfrac{\partial}{\partial t}v. \end{cases} \qquad (22)$$

с начальными условиями $u(x,0)=u_0(x)$, $v(x,0)=v_0(x)$.

Применим к каждому уравнению системы (22) полное преобразование Фурье—Бесселя (4), тогда получим

$$\begin{cases} -\xi_1\hat{u}(\xi,t)-2\xi_2^2\hat{u}(\xi,t)-\xi_2^4\hat{u}(\xi,t)- \\ -\xi_1^2\xi_2^2\hat{u}(\xi,t)+\xi_1^2\hat{v}(\xi,t)+ \\ +2\xi_1\xi_2^2\hat{v}(\xi,t)=\dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}, \\ -\xi_1\hat{u}(\xi,t)-2\xi_2^2\hat{u}(\xi,t)-\xi_2^4\hat{u}(\xi,t)- \\ -\xi_1^2\xi_2^2\hat{u}(\xi,t)+\xi_1^2\hat{v}(\xi,t)+ \\ +2\xi_1\xi_2^2\hat{v}(\xi,t)=\dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}. \end{cases} \qquad (23)$$

Система (23) в матричной форме примет вид

$$\begin{pmatrix} -\xi_1-2\xi_2^2-\xi_2^4-\xi_1^2\xi_2^2 & \xi_1^2+2\xi_1\xi_2^2 \\ \xi_1^2+2\xi_1\xi_2^2 & -\xi_1^3-2\xi_1^2\xi_2^2-\xi_1^2-\xi_2^2 \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\hat{u}(\xi,t)\\ \hat{v}(\xi,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\hat{v}\end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Также, как в классических исследованиях систем дифференциальных уравнений (см., например, [12], где приведена методика оценок матрицы, которую мы в этом примере исследуем), можем матрицу $Q(\xi,t_o,t)$ представить в виде $Q(\xi,t_o,t)=e^{At}=Pe^{It}P^{-1}$. Данное представление e^{At} требует вычисления жордановой нормальной формы I матрицы A и приводящей матрицы P. В данном примере

$$I=\begin{pmatrix}(-\xi_1-2\xi_2^2)(1+\xi_1^2) & 0\\ 0 & (-\xi_1-\xi_2^2)(1+\xi_1^2)\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & \xi_1\\ -\xi_1 & 1\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+\xi_1^2} & \dfrac{-\xi_1}{1+\xi_1^2}\\ \dfrac{\xi_1}{1+\xi_1^2} & \dfrac{1}{1+\xi_1^2}\end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A: $\lambda_1=-\xi_1-2\xi_2^2$, $\lambda_2=-\xi_1-\xi_2^2$. Для того, чтобы можно было применить обратное четное преобразование Фурье—Бесселя (5), надо проверить выполнение условия (19). Имеем

$$\left|Q\left(\xi,t_o,t\right)\right|\le C_1\left(1+\left|\xi_1\right|\right)\times$$
$$\times C_2\frac{1+\left|\xi_1\right|}{1+\left|\xi_1\right|^2}\le\frac{C\left(1+\left|\xi_1\right|\right)^2}{1+\left|\xi_1\right|^2}\le 2C.$$

Таким образом, условие (19) выполнено, откуда следует существование решения системы (22), удовлетворяющего соответствующим начальным данным.

И еще заметим, что система (22) не могла быть исследована методами работы [2].

В заключение авторы благодарят рецензента этой работы за внимательное прочтение и обозначение одного из направлений дальнейших исследований по данной теме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 199 с.

2. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений с оператором Бесселя. // Математ. сборник. 1955. — Т. 36 (78). — № 2. — С. 29—310.

3. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сборник. — 1977. — Т. 104, — № 1. — С. 49 — 68.

4. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Псевдодифференциальные операторы, построенные на основе полного преобразования Фурье-Бесселя // Дифференц. уравнен. (принято к печати 17.04.2010 г.).

5. *Бохнер А. М.* Лекции об интегралах Фурье. — М.: ГИФМЛ, 1962. — С. 360.

6. *Гельфанд И. М., Шилов В. М.* Преобразование Фурье быстро растущих распределений и вопросы единственности решения задачи Коши // Успехи математю наук. — 1953. — Т. VIII. — Вып. 6 (58). — С. 3—54.

7. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Математ. сборник. — 1955. — Т. 36 (78). — № 2. — С. 281—310.

8. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука. — 1964. — С. 442.

9. *Ляхов Л. Н.* О свертывателях и мультипликаторах классов функций, связанных с преобразованием Фурье-Бесселя. ДАН. — 1998. — Т. 360. — № 1. — С. 16—19.

10. *Ляхов Л. Н.* Мультипликаторы смешанного преобразования Фурье-Бесселя. Тр.МИАН. — 1997. — Т. 214. — С. 234—249.

11. *Лизоркин П. И.* Теоремы вложения для функций из пространства $L_p^r(E_n)$ // ДАН. — 1962. — Т. 143. — № 5. — С. 1042—1045.

12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: МИР, 1970. — 720 с.

Ляхов Л. Н., профессор, доктор физико-математических наук, кафедра математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет

E-mail: lyakhov@box.vsi.ru

Тел.: (4732) 55-35-54

Райхельгауз Л. Б., аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет

E-mail: jikol_85@mail.ru

Тел.: (4732) 76-39-19; 8-908-139-85-85

Lyakhov L. N., professor, doctor of Sciences in Physics and Mathematics, of the Dept of mathematical and applied analysis, Voronezh State University

E-mail: lyakhov@box.vsi.ru

Tel.: (4732) 55-35-54

Raykhelgauz L. B., graduate student of dept of higher mathematics, Voronezh State University

E-mail: jikol_85@mail.ru

Tel.: (4732) 76-39-19; 8-908-139-85-85